

Законы сохранения в механике

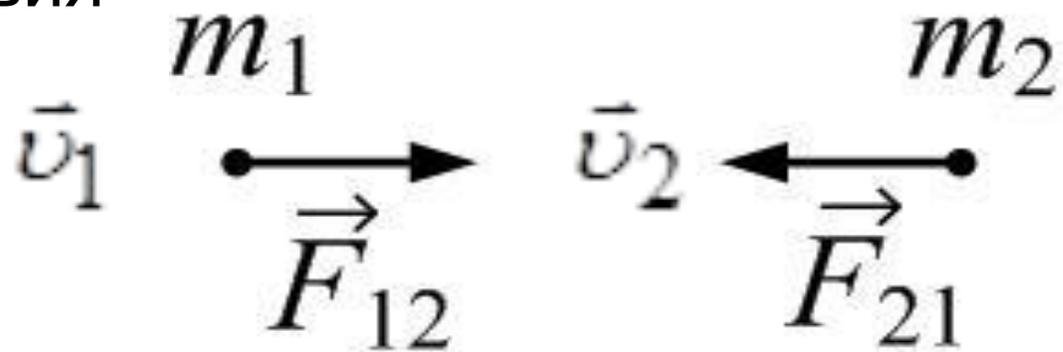
Замкнутая система

Замкнутой (изолированной) системой тел в механике называется система, на которую не действуют внешние силы

Рассмотрим замкнутую систему двух тел массами m_1 и m_2

Скорости тел до взаимодействия

и



Скорости тел после взаимодействия

и



По второму закону Ньютона

$$\begin{aligned}m_1 \vec{v}'_1 - m_1 \vec{v}_1 &= \vec{F}_{12} \cdot \Delta t, \\m_2 \vec{v}'_2 - m_2 \vec{v}_2 &= \vec{F}_{21} \cdot \Delta t,\end{aligned}$$

ИЛИ:

$$\begin{cases} dp_1 = F_{12} \cdot dt \\ dp_2 = F_{21} \cdot dt \end{cases}$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) \cdot dt = 0,$$

По третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Полный импульс системы сохраняется

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$$

Закон сохранения импульса

в замкнутой системе полный

импульс сохраняется

Если на систему действуют внешние
силы,

то полный импульс сохраняется

только в случае компенсации

данных внешних сил

Даже если равнодействующая внешних сил не равна нулю, но **равна нулю её проекция** на какую-либо ось, то **проекция полного импульса** системы на ту же ось **сохраняется**

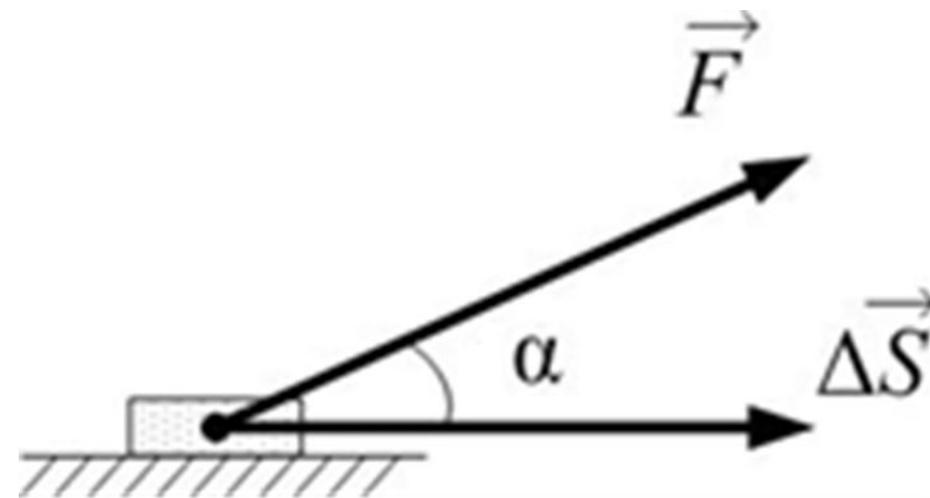
Механическая работа

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S} = F \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha$$

где α – угол между векторами силы и перемещения.

При $\alpha > 90$ работа $\Delta A < 0$.

Единица измерения работы в СИ – Джоуль



Если траектория движения тела – кривая линия и сила не постоянна,

то траекторию разбивают на малые участки $d\vec{S}$, для каждого из которых работа определяется соотношением

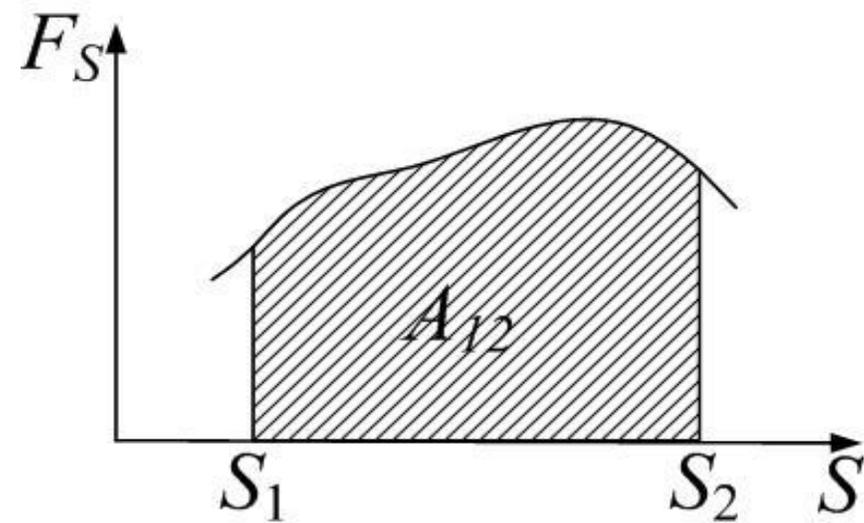
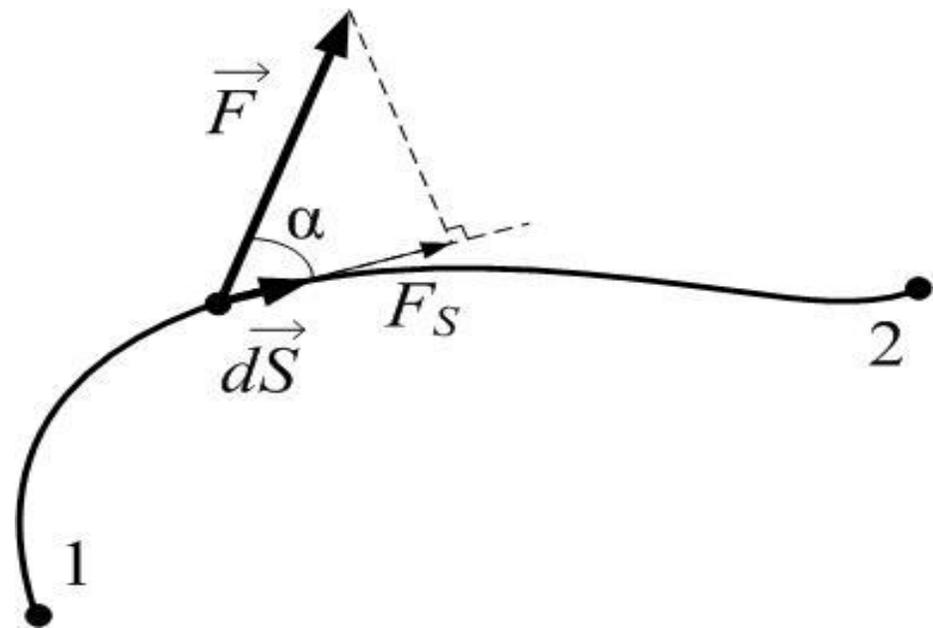
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cdot \cos\alpha = F_S \cdot dS$$

Полная работа на всей траектории

будет равна сумме работ на каждом из участков:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

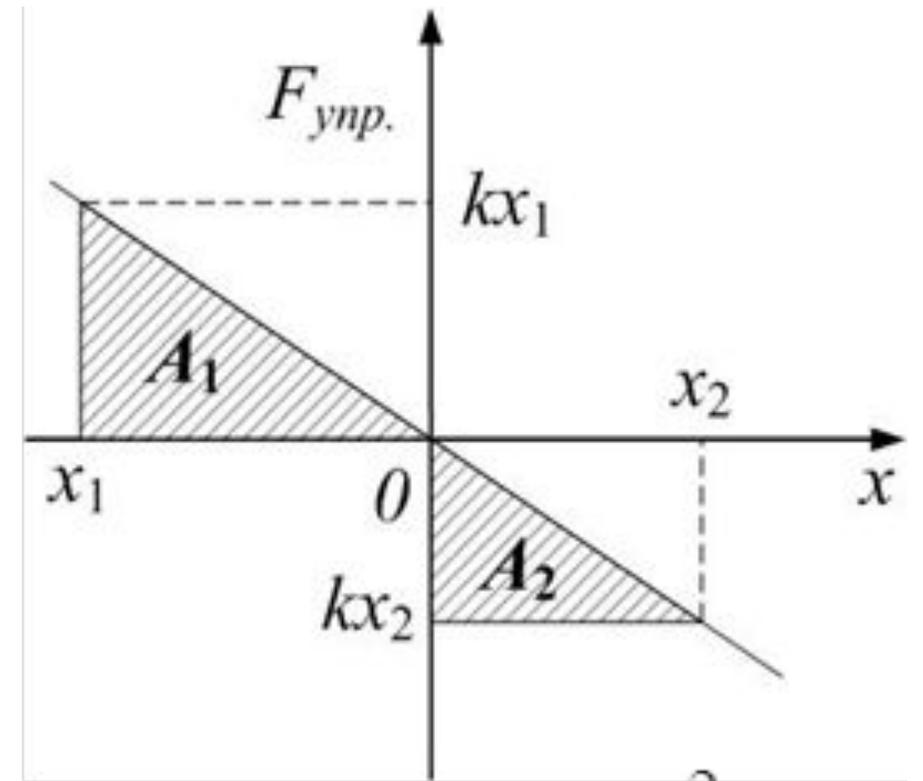
$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 F \cdot \cos\alpha \cdot dS = \int_1^2 F_S \cdot dS$$



Работа силы упругости

При $x < 0$ сила упругости положительна, пружина сжата.

Работа силы упругости при восстановлении длины пружины от $x = x_1$ до 0 положительна и равна площади под графиком – площади треугольника



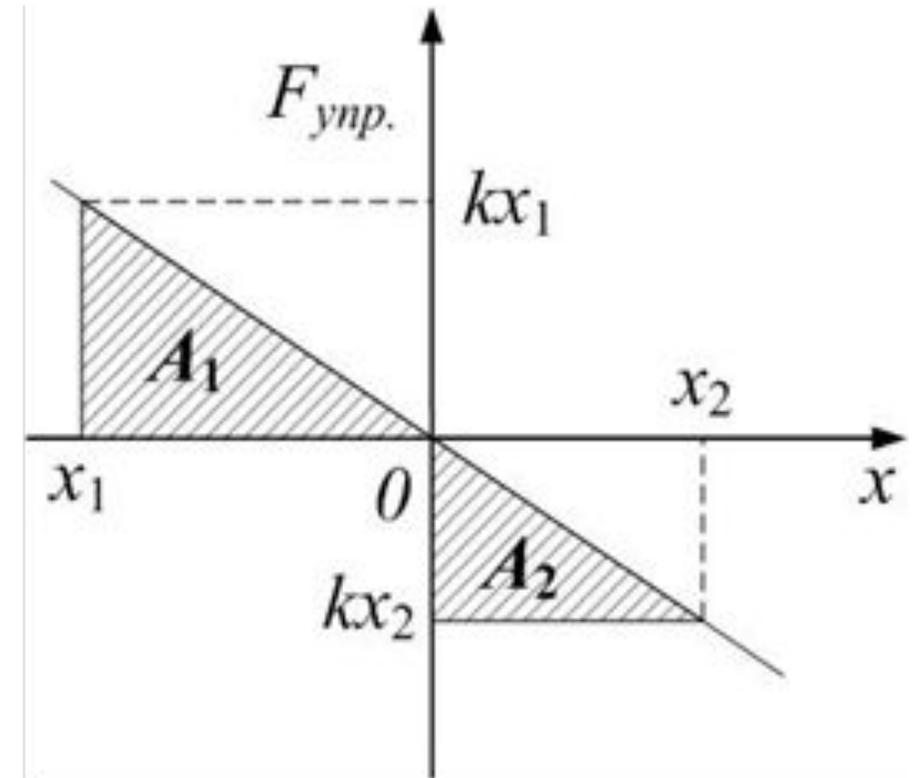
$$A_1 = \frac{1}{2} kx_1 \cdot x_1 = \frac{kx_1^2}{2}$$

Работа силы упругости

При $x > 0$ сила упругости отрицательна, пружина растягивается.

Работа силы упругости при растяжении пружины от 0 до $x = x_2$ тоже отрицательна и рассчитывается как площадь треугольника

$$A_2 = -\frac{1}{2} kx_2 \cdot x_2 = -\frac{kx_2^2}{2}$$



Суммарная работа силы упругости

$$A = A_1 + A_2 = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = \frac{k(x_1^2 - x_2^2)}{2}$$

Работа упругой силы не зависит от промежуточных состояний, а зависит только от начального и конечного состояния пружины.

Если начальная и конечная деформации равны, то работа равна нулю. Такие силы называются консервативными.

Консервативная сила

сила, работа которой не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положения тела

Работа консервативной силы по любой замкнутой траектории равна нулю

Сила трения

Сила трения не является консервативной

Работа силы трения всегда отрицательна, так как сила всегда противоположна перемещению

Работа этой силы по замкнутой траектории будет всегда отлична от нуля

Сила трения относится к диссипативным силам

Диссипативные силы

это силы, работа которых зависит не только от начального и конечного положения тела, но и от формы траектории, а работа по замкнутой траектории не равна нулю

Мощность

- быстрота совершения работы (Вт)

Средняя мощность – работа за единицу времени:

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

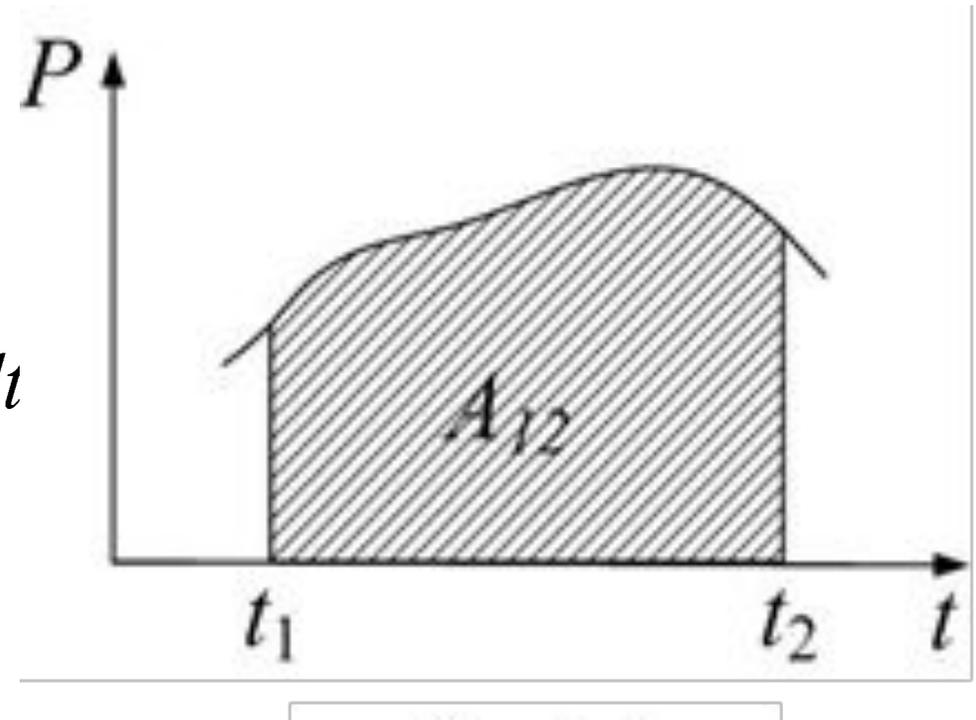
Мгновенная мощность

$$P = \frac{dA}{dt}$$

$$dA = P \cdot dt$$

\Rightarrow

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt$$



Если сила постоянна, то:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Энергия

- кинетическая: энергия, которой обладает тело вследствие движения;
- потенциальная: энергия, которой обладает тело вследствие взаимодействия с другими телами

Кинетическая энергия

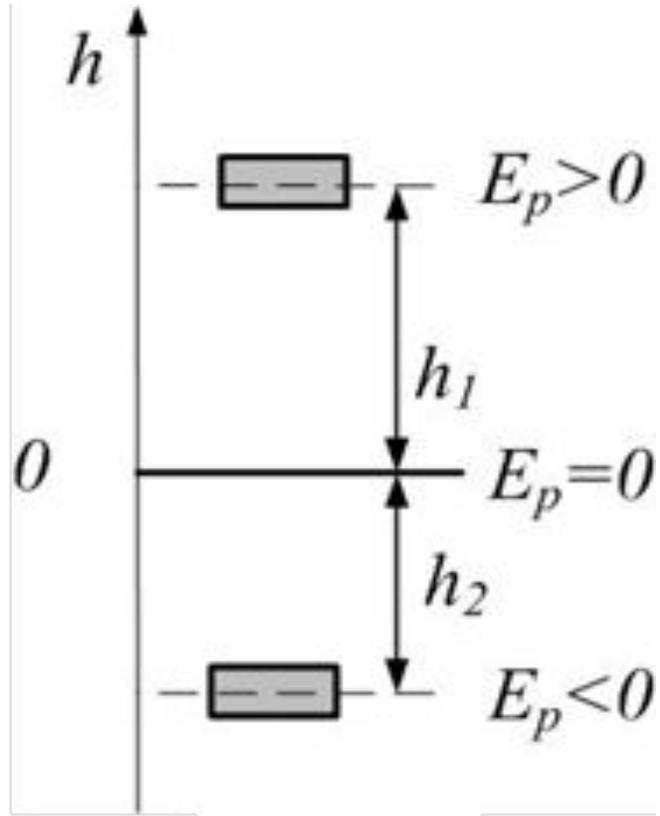
$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$$

Теорема о кинетической энергии:

изменение кинетической энергии тела равно работе силы (или равнодействующей всех сил, если сил несколько):

$$\Delta E_{\text{кин}} = E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1} = A$$

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести Земли



$$E_{p.} = mgh$$

Эта формула справедлива только для однородного поля тяготения:

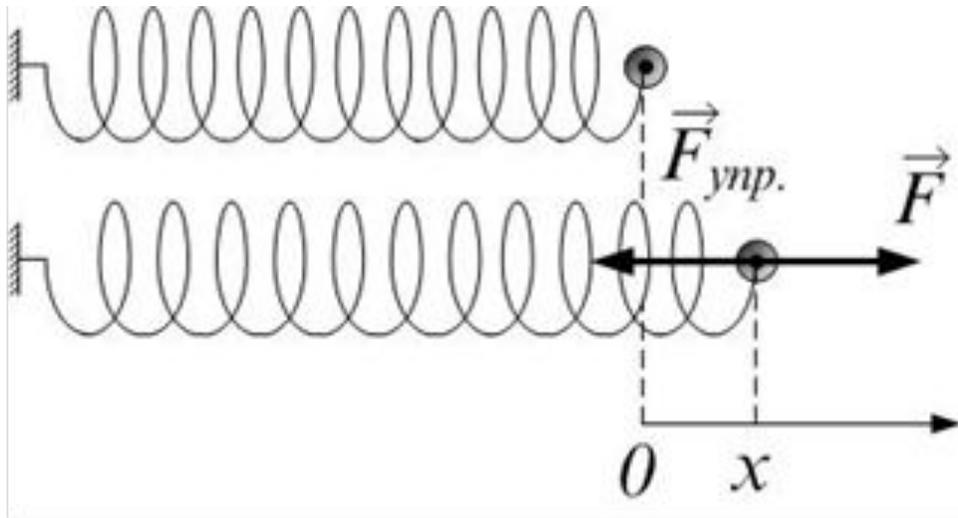
$g = \text{const}$, то есть при $h \ll R$ Земли.

В зависимости от выбора начала отсчёта потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной.

Если $h \ll R$ не соблюдается, то

$$E_{p.} = -\gamma \frac{M \cdot m}{r}$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела



$$A_{внеш.} = \Delta E_p = E_{p.2} - E_{p.1}$$

$$F_{внеш.} = -F_{упр} = kx$$

$$A_{внешн.сил} = \int_0^x dA = \int_0^x F_{внеш} dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Закон сохранения механической энергии

полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, остаётся постоянной:

$$E_{\text{мех.}} = E_p + E_k = \text{const}$$

$$E_{\text{мех}1} = E_{\text{мех}2}$$

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$$

При наличии диссипативных сил (силы трения, вязкости, силы неупругой деформации) механическая энергия необратимо превращается в другие виды энергии, например, тепловую.

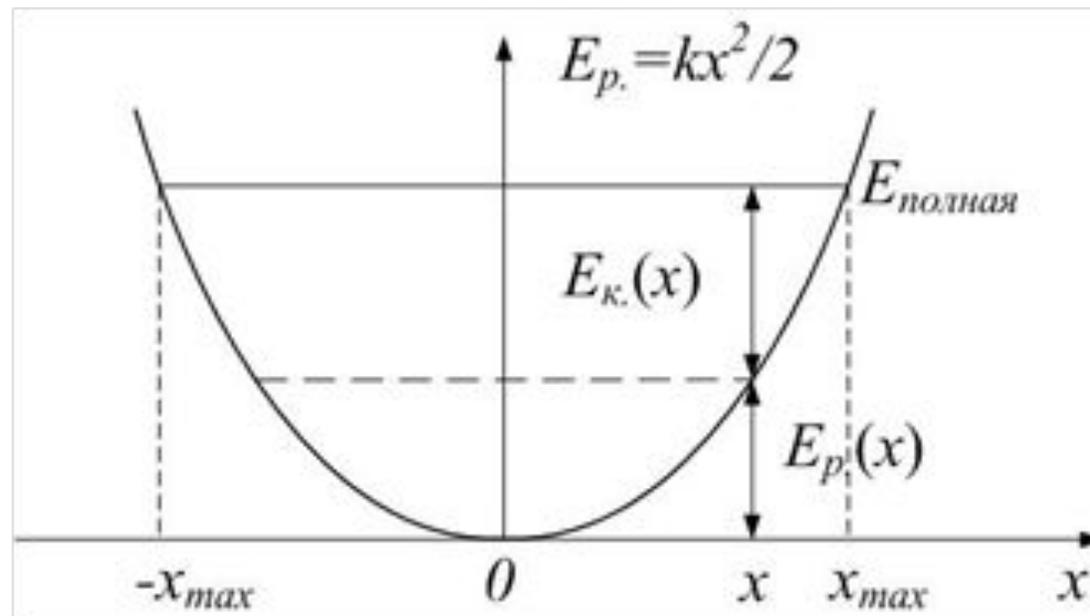
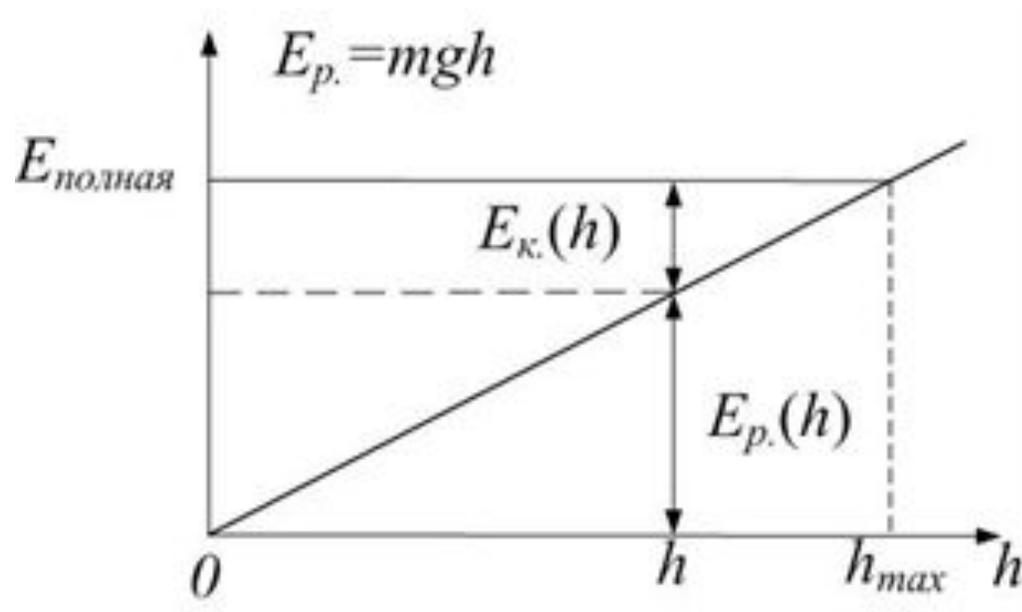
Причём работа системы против диссипативных сил всегда положительна.

$$E_{1\text{мех}} = E_{2\text{мех}} + A_{\text{против диссипативных сил}}$$

При наличии любых внешних сил

$$E_{1\text{мех.}} = E_{2\text{мех.}} + A_{\text{против диссипативных сил}} + A_{\text{против внешних сил}}$$

Графическое представление энергии



$$mgh_{\text{max}} = mgh + E_k$$

$$\frac{kx_{\text{max}}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + E_k$$

Спасибо за внимание!