

**Специальные
случайные
распределения,
используемые в
математической
статистике**

Гамма-функция

Интегральное представление:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Основное свойство : $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

где x – любое действительное число.

Частные свойства.

$\Gamma(n+1) = n!$, где n - натуральное число.

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \approx 1,77245 \dots$$

$$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi} / 2 \approx 0,88623 \dots$$

Асимптотика

$$\Gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^x \sqrt{2\pi/x}$$

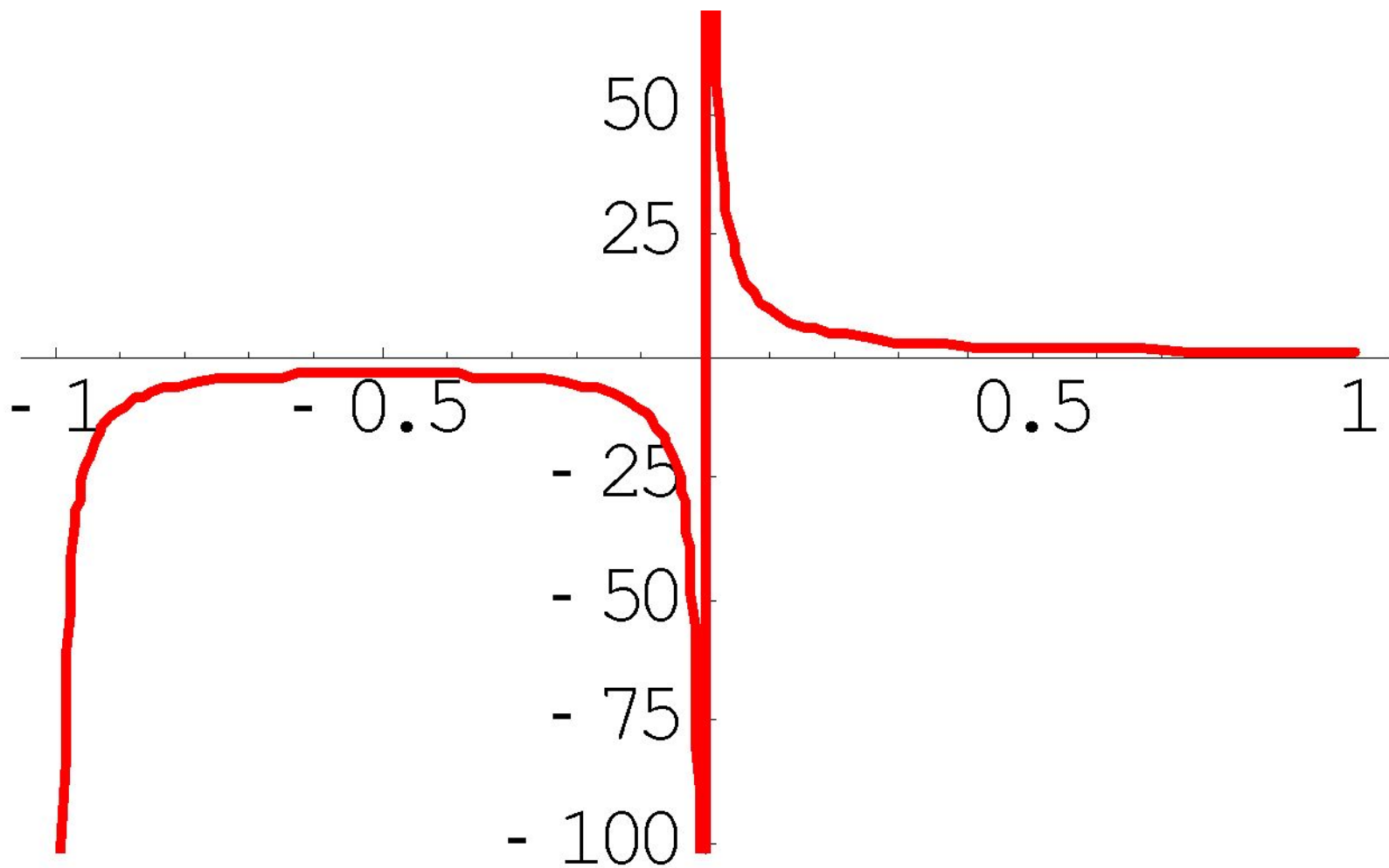


График функции $\Gamma(x)$.

Интервал: $[-1; 1]$.

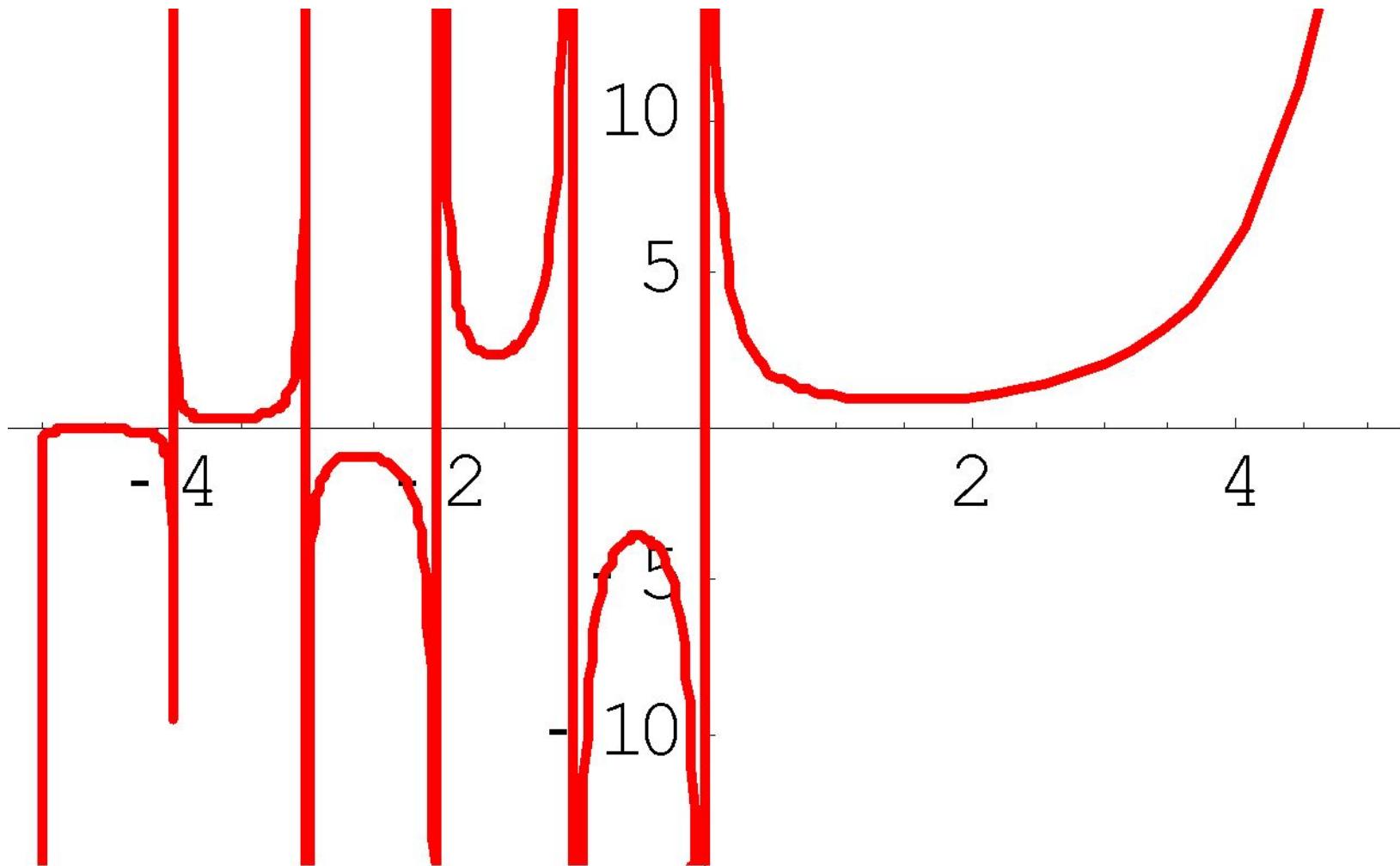


График функции $\Gamma(x)$.

Интервал: $[-5; 5]$.

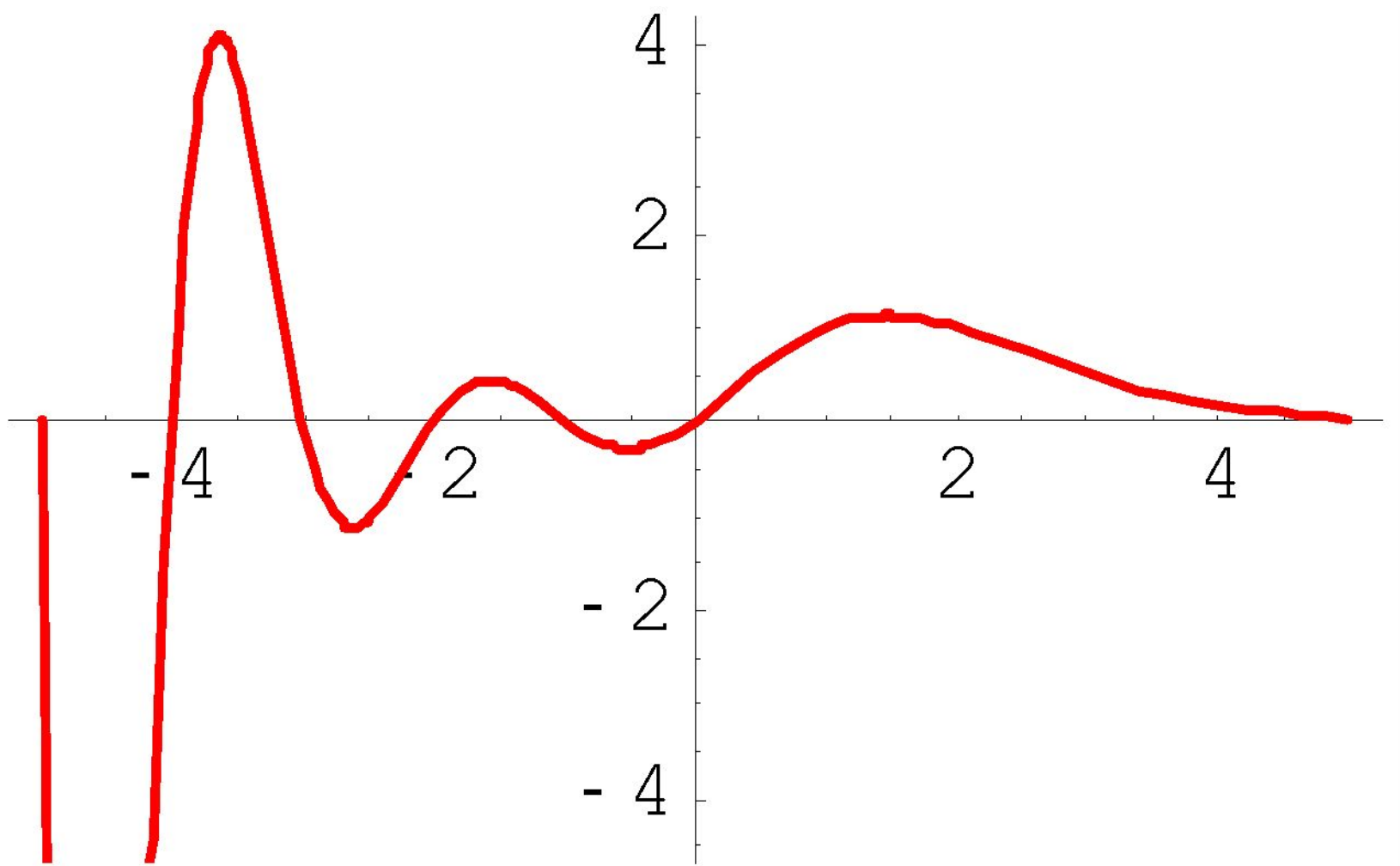
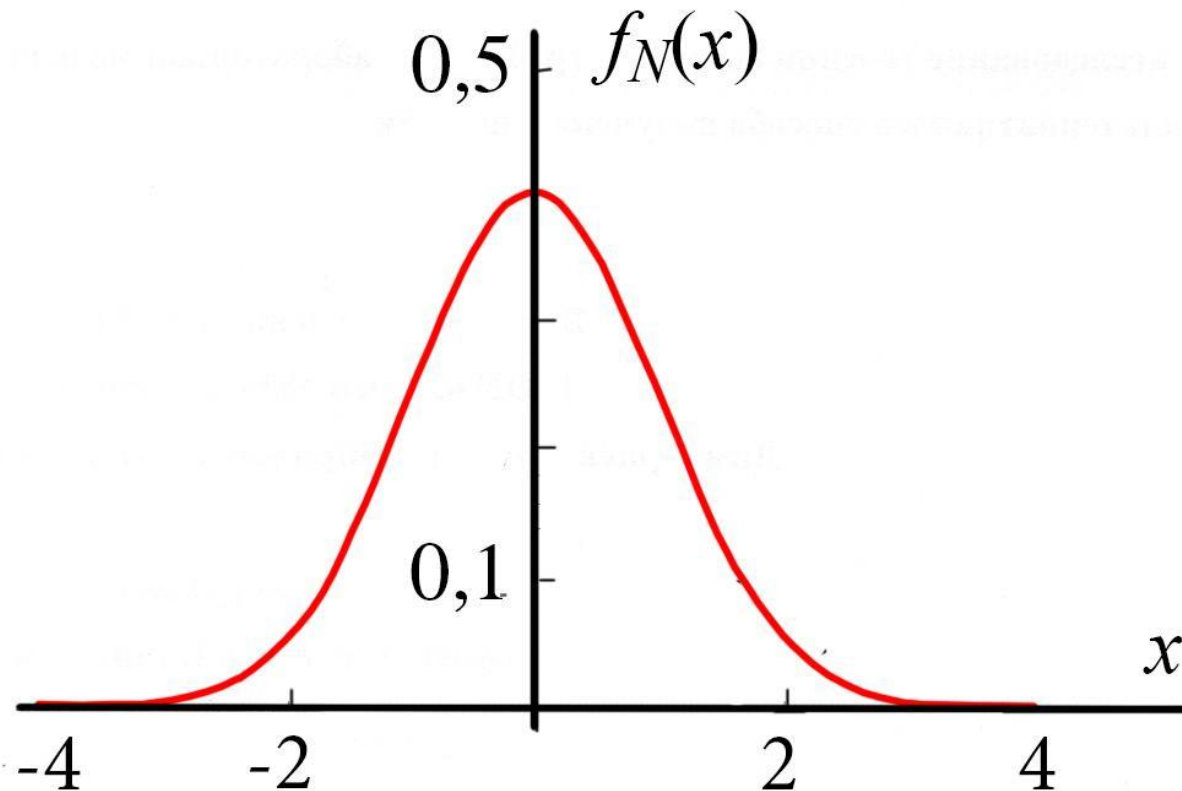


График функции **$1 / \Gamma(x)$** .

Нормированная функция Гаусса

$$f_{Gn}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



Случайная величина «хи-квадрат»

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2$$

где ξ_i – независимые случайные величины, каждая из которых имеет **нормальное нормированное** распределение вероятностей, имеющее плотность вида

$$f_{Gn}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

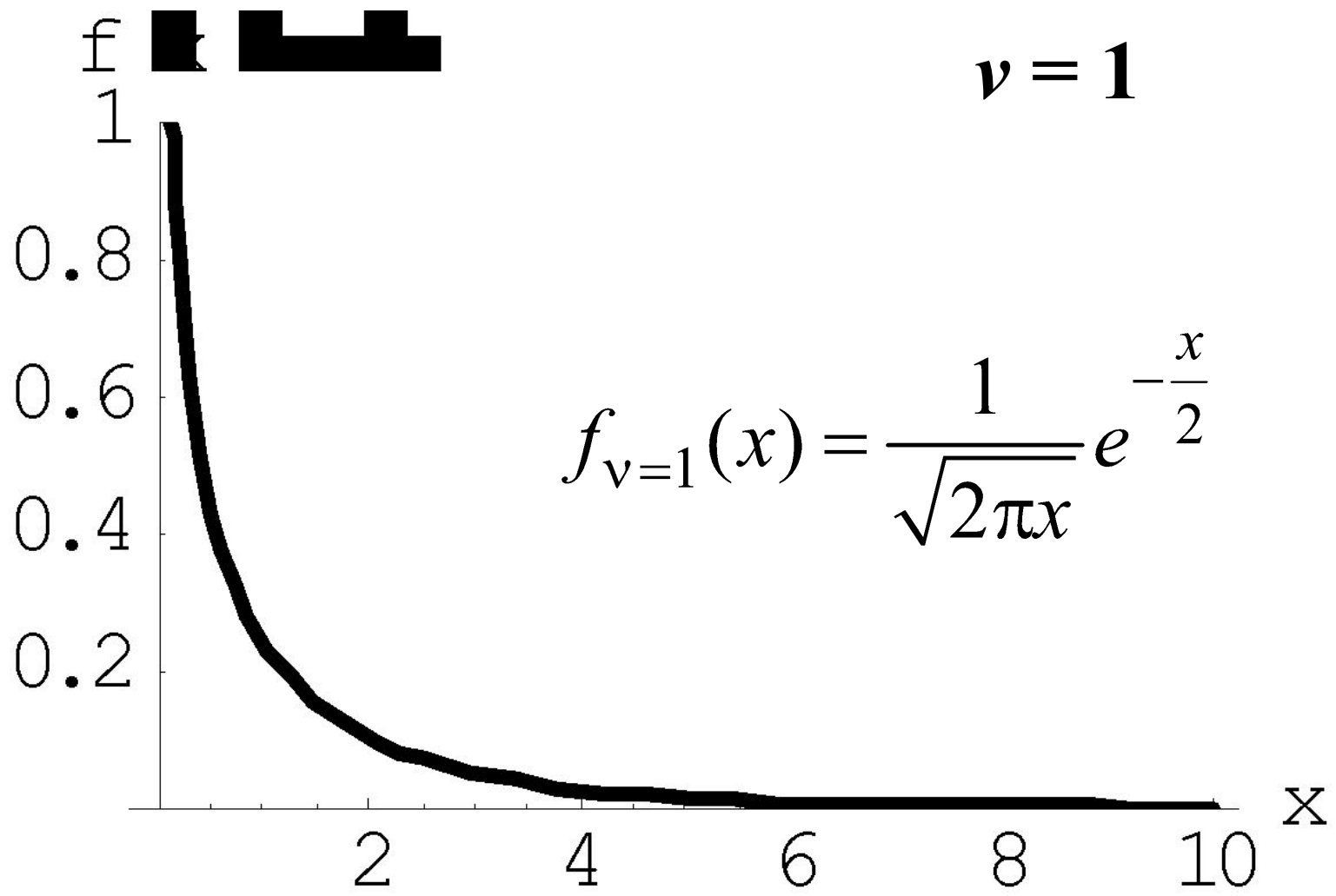
Вид распределения зависит от целочисленного параметра **ν** , который называется **число степеней свободы** и принимает значения натурального ряда чисел.

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} 2^{-\frac{\nu}{2}} \quad x \geq 0$$

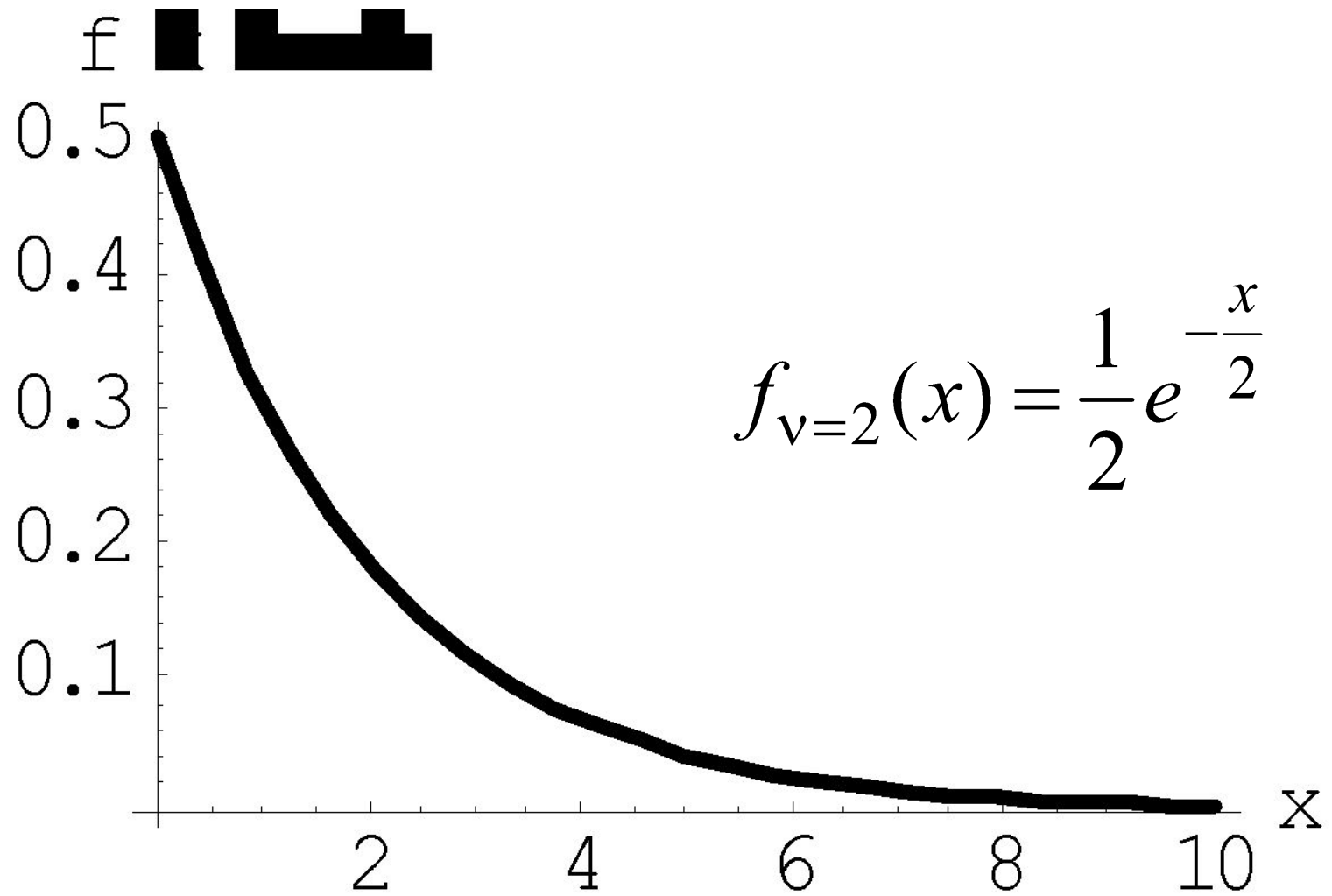
Математическое ожидание и дисперсия

$$M(\chi^2) = \nu$$

$$D(\chi^2) = 2\nu$$

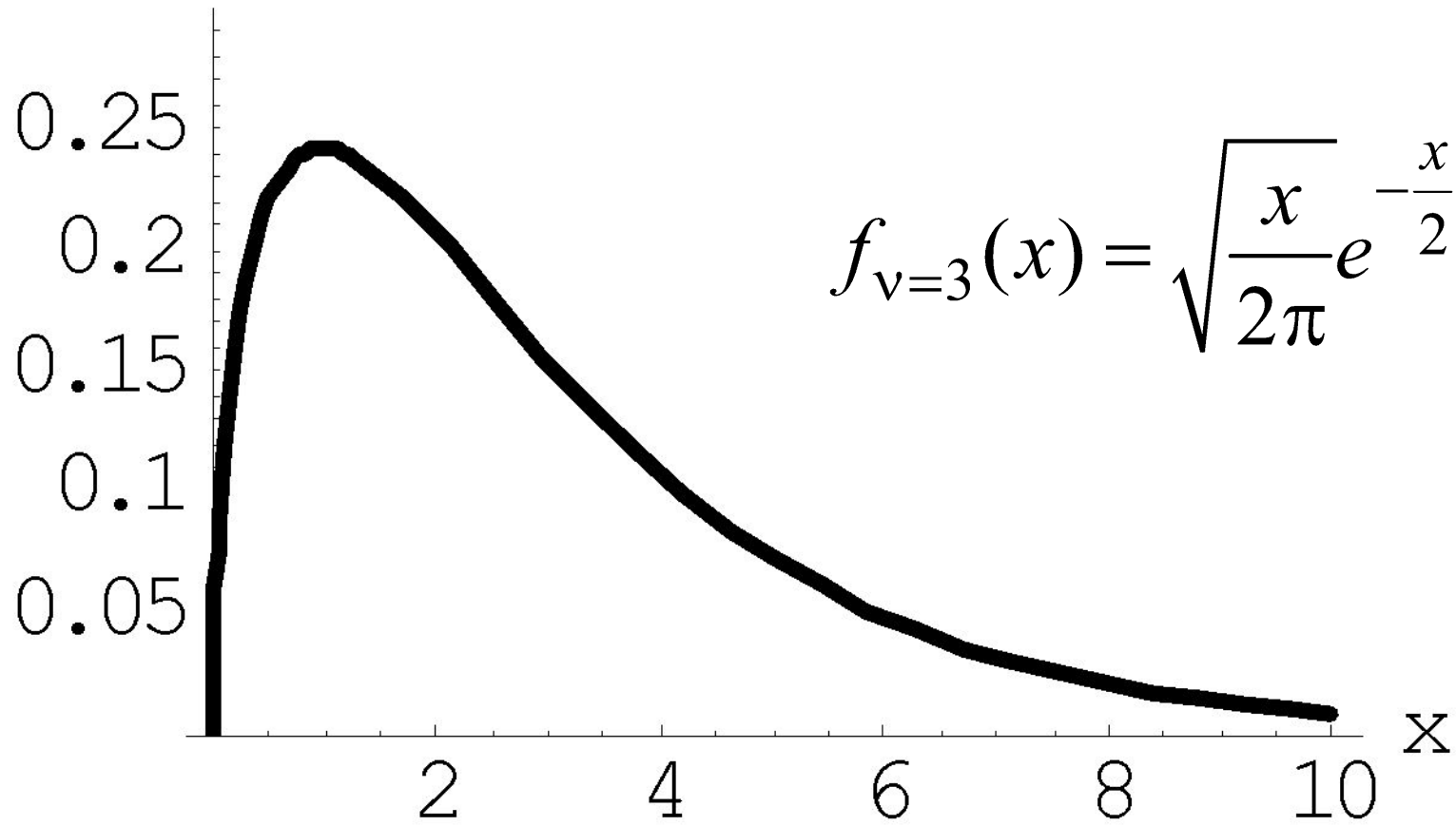


$\nu = 2$

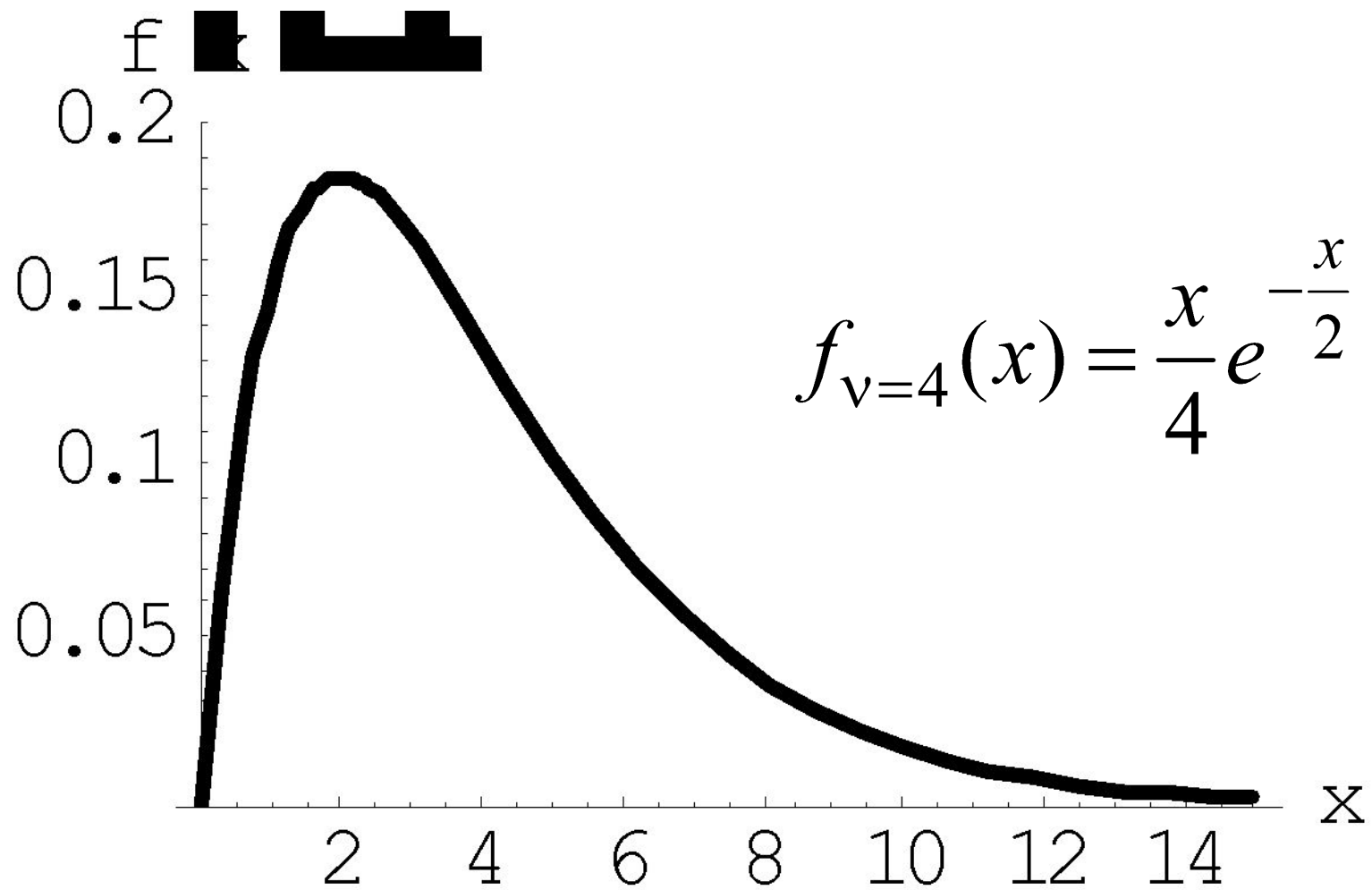


$\nu = 3$

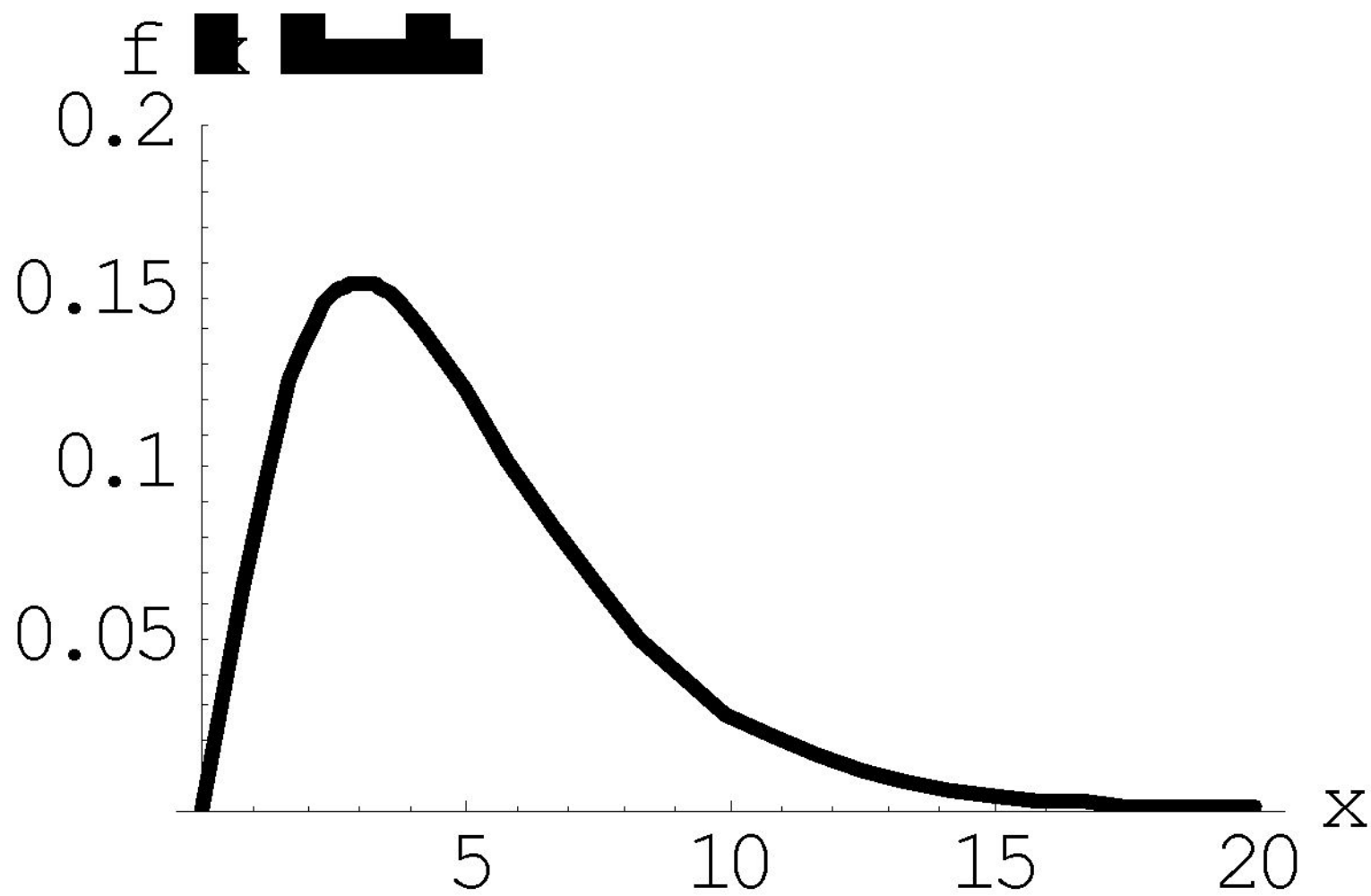
f 



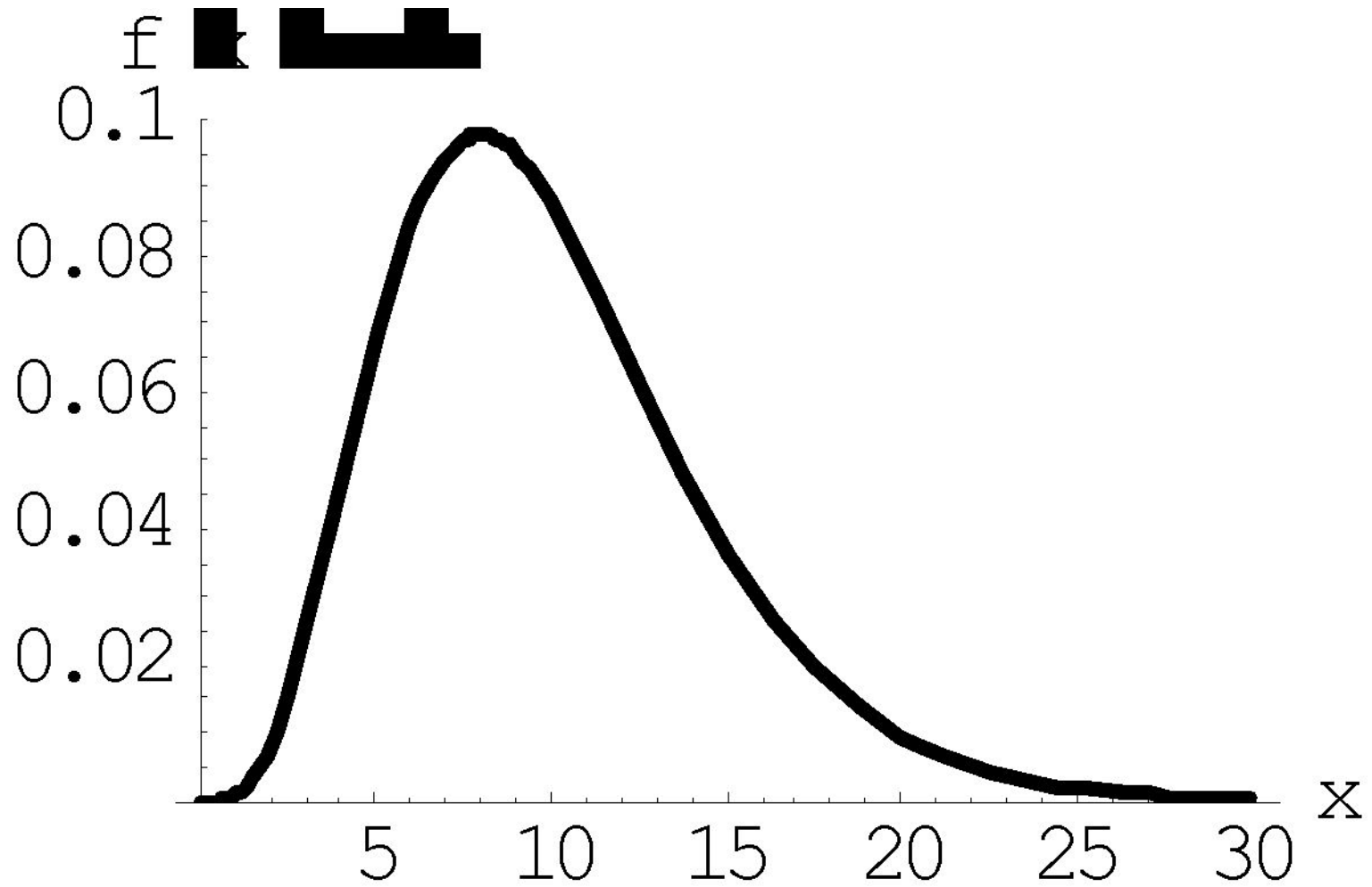
$\nu = 4$



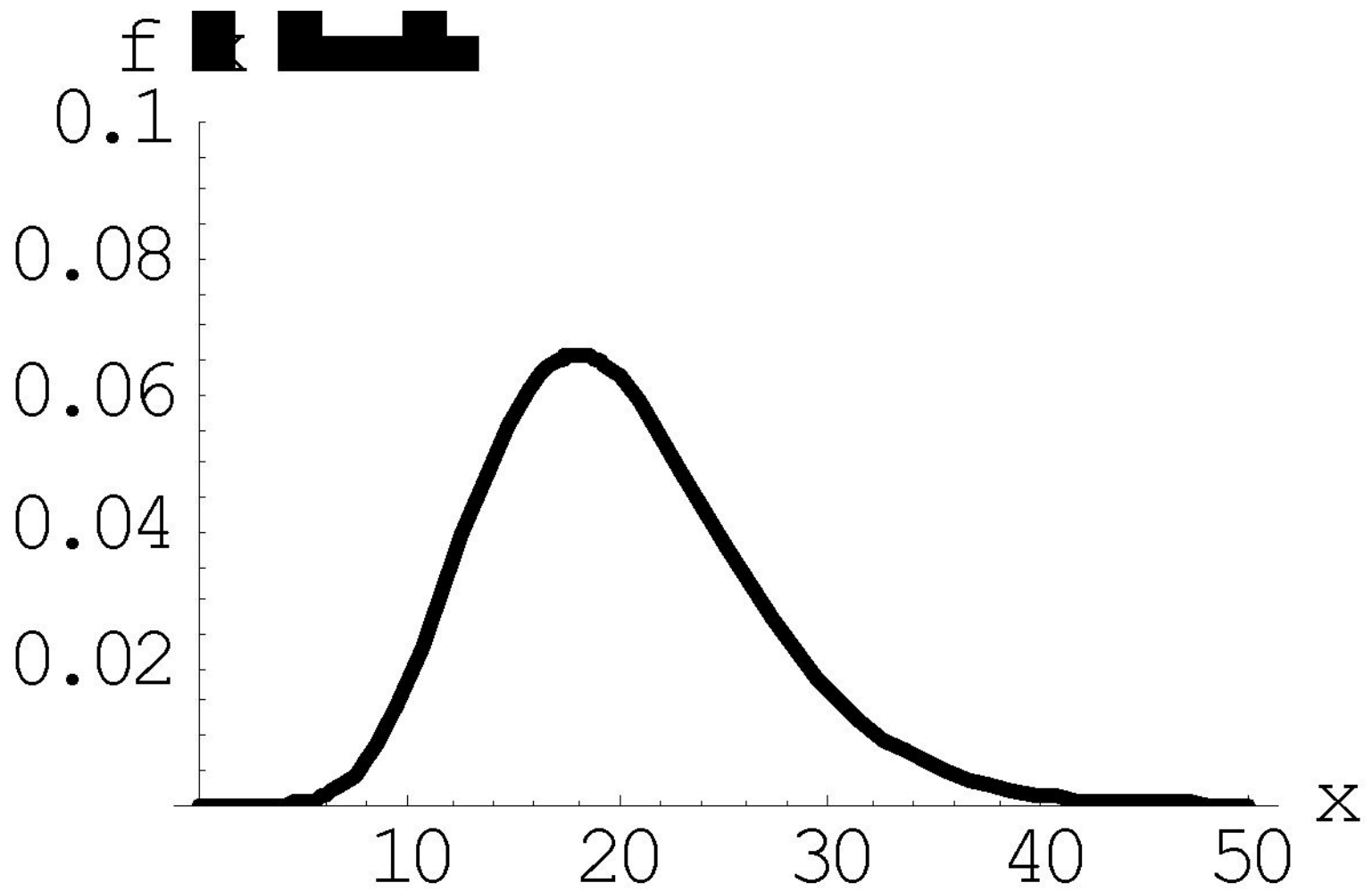
$\nu = 5$



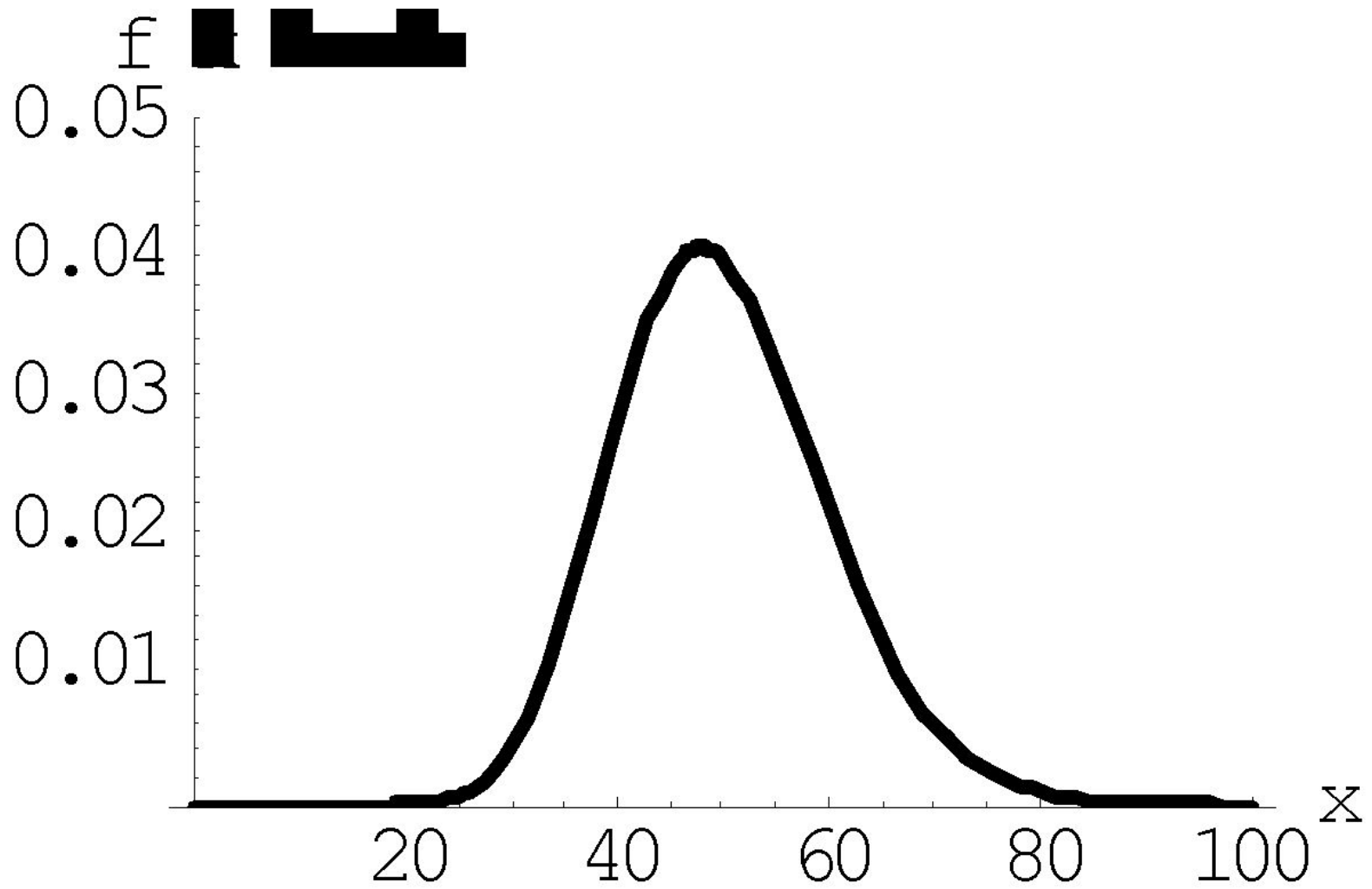
$\nu = 10$



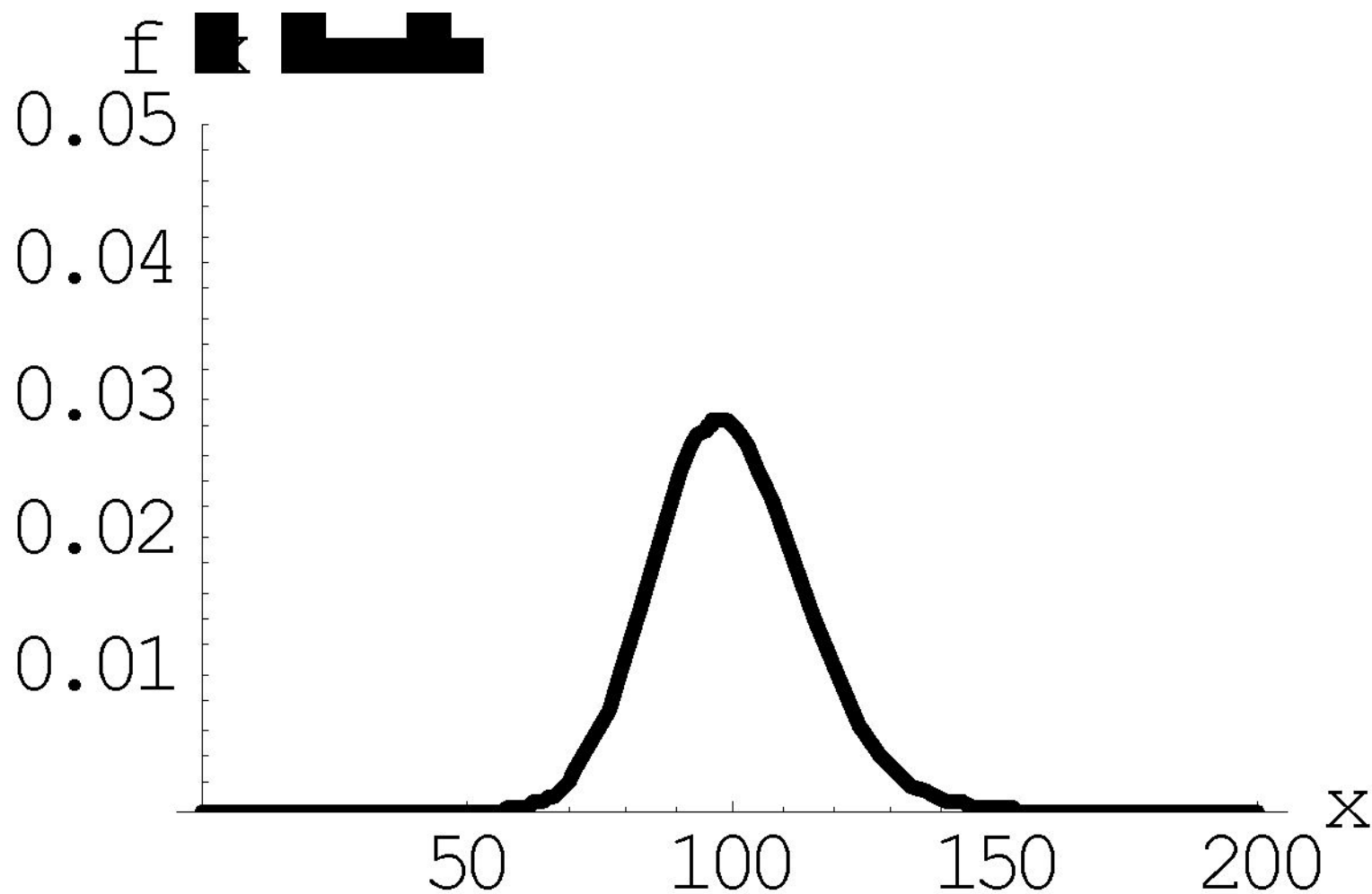
$\nu = 20$



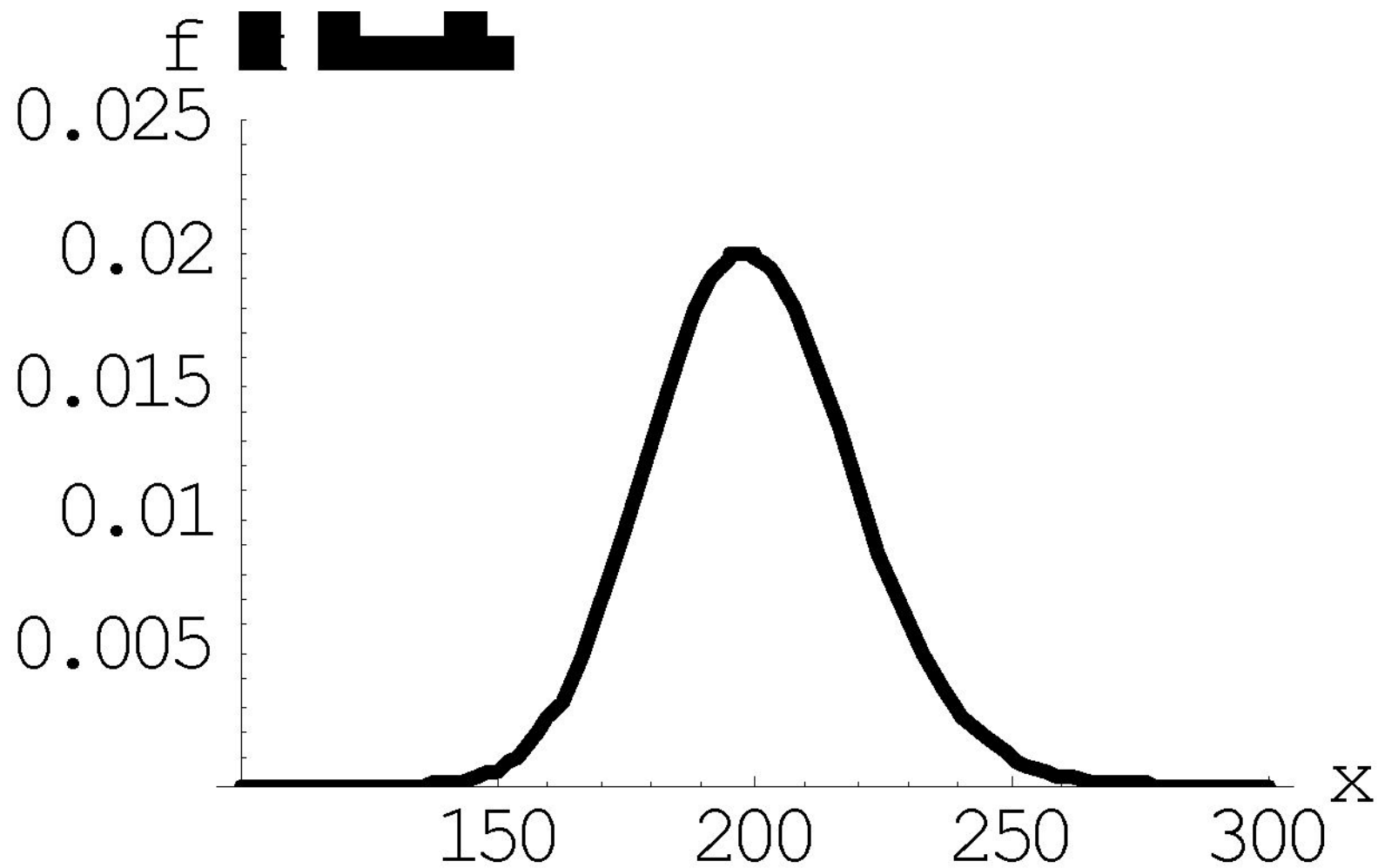
$\nu = 50$



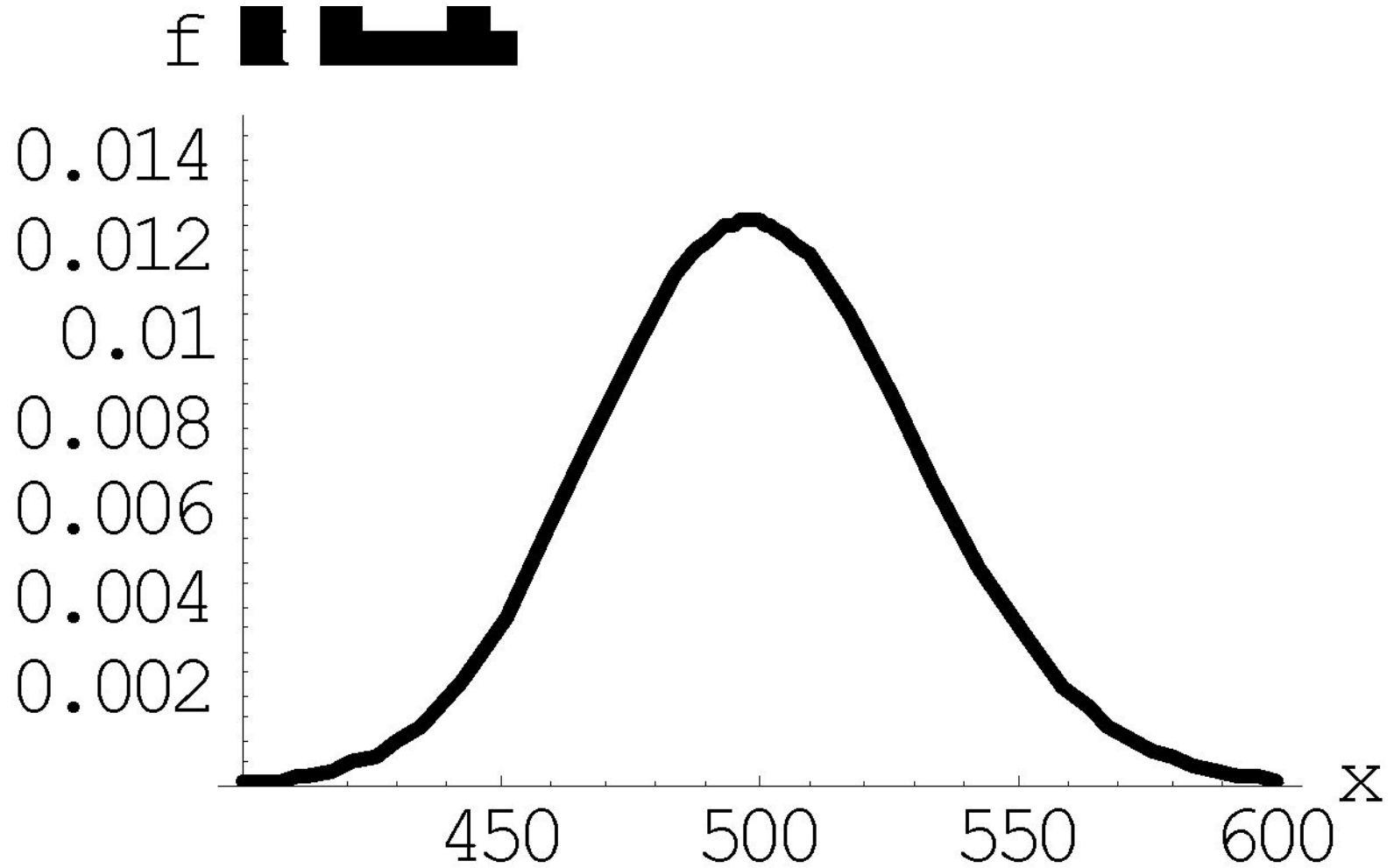
$\nu = 100$



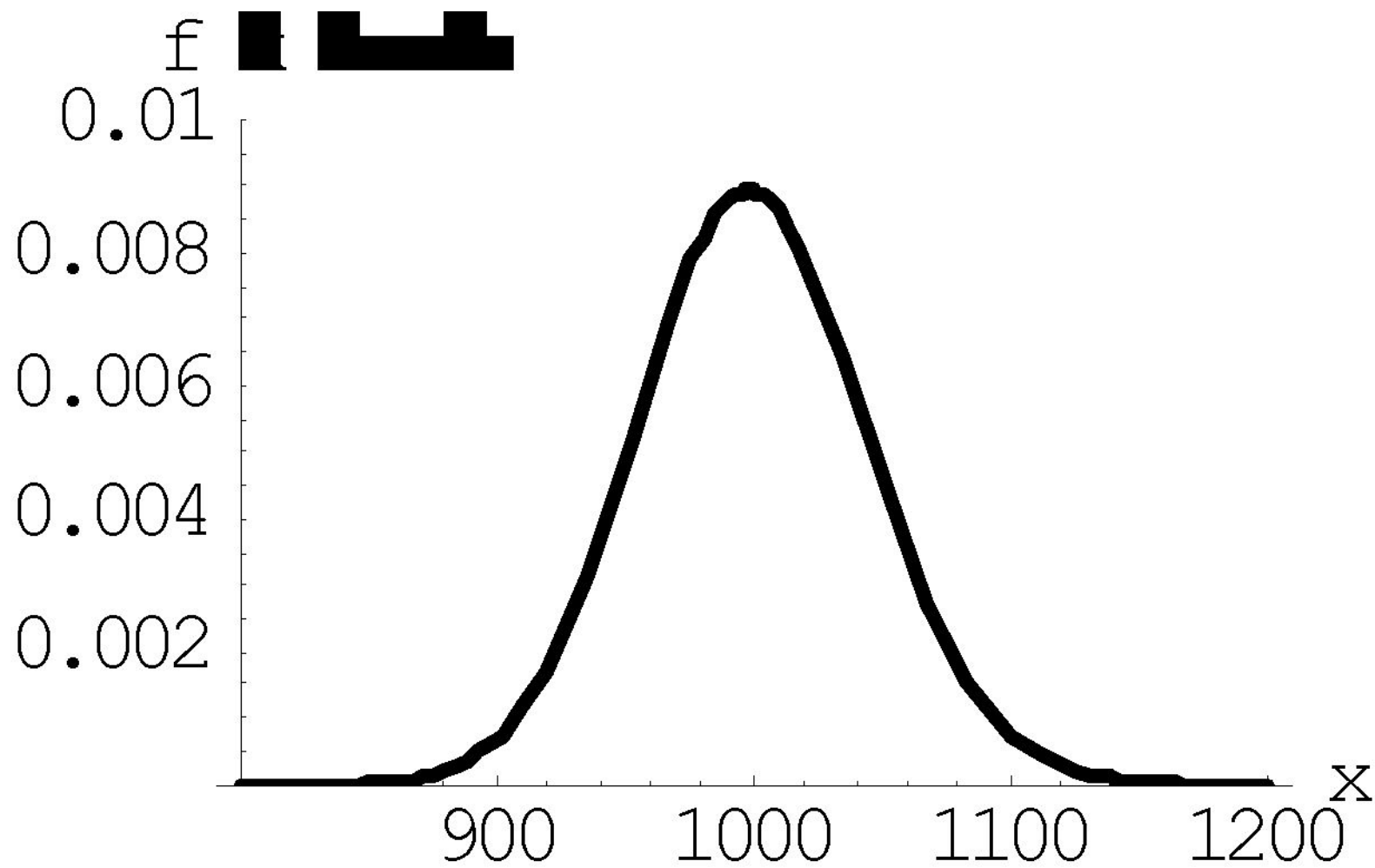
$\nu = 200$



$\nu = 500$



$\nu = 1000$



Случайная величина

$$\frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}$$

при $\nu \rightarrow \infty$ превращается в **гауссову**
нормированную случайную величину.

Случайная величина Стьюдента

$$T_v = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \xi_i^2}}$$

где все $(v + 1)$ случайные величины ξ_i независимы и имеют нормальное нормированное распределение вероятностей.

Параметр v называется **числом степеней свободы** и принимает значения натурального ряда чисел.

Плотность случайной величины Стьюдента

$$f_{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

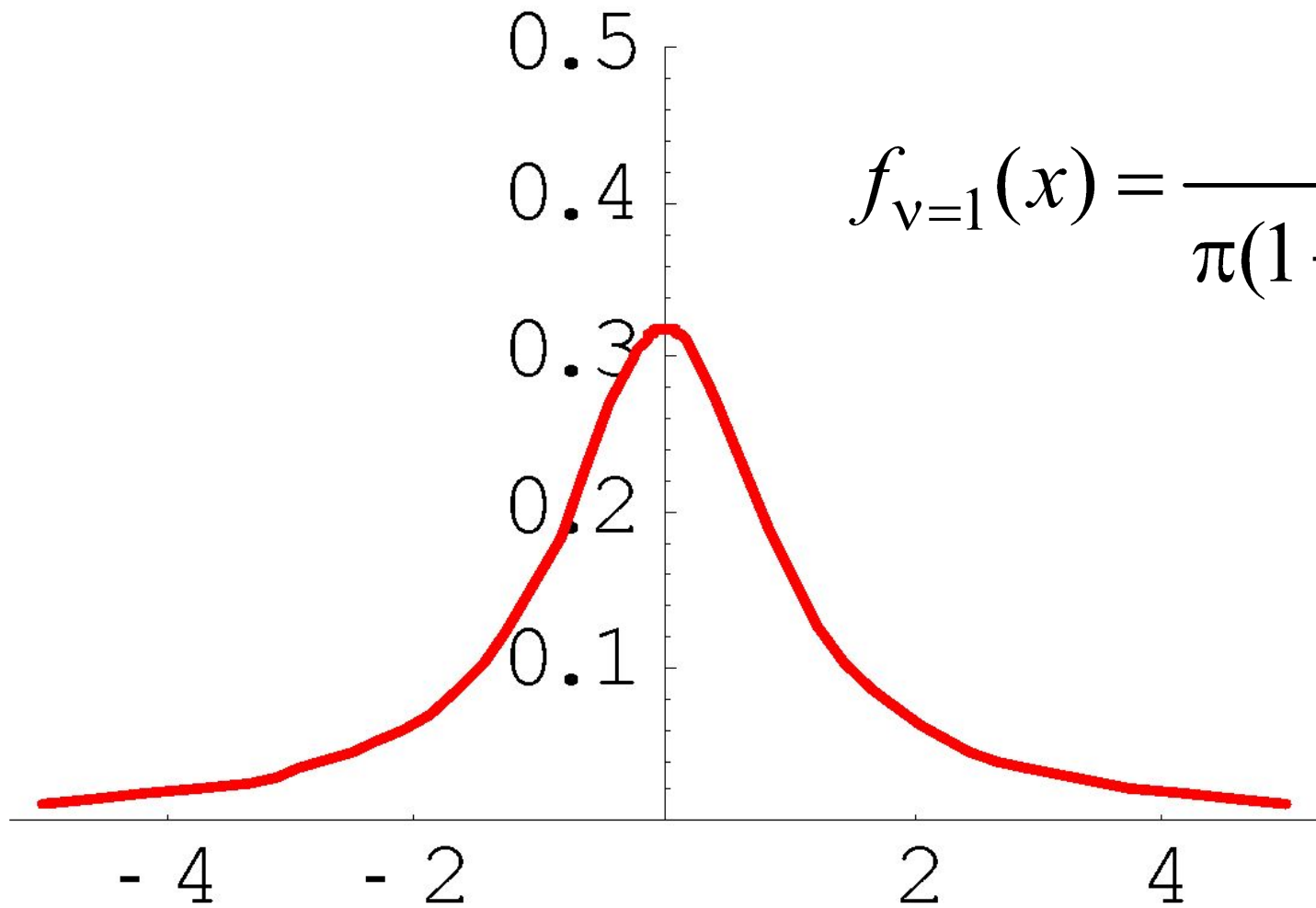
Вид распределения зависит от **числа степеней свободы**

Математическое ожидание и дисперсия

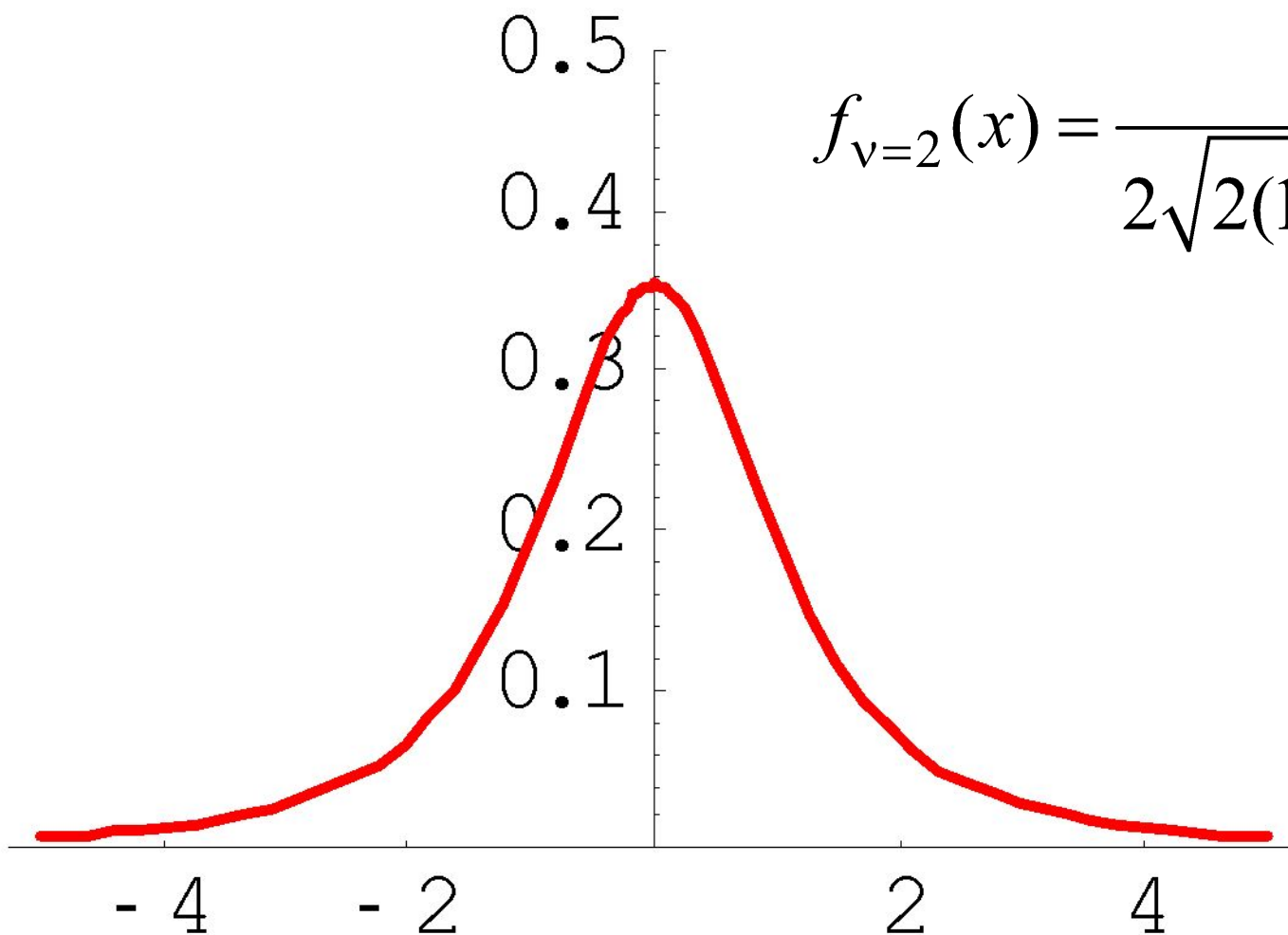
$$M(T_{\nu}) = 0$$

$$D(T_{\nu}) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

$\nu = 1$

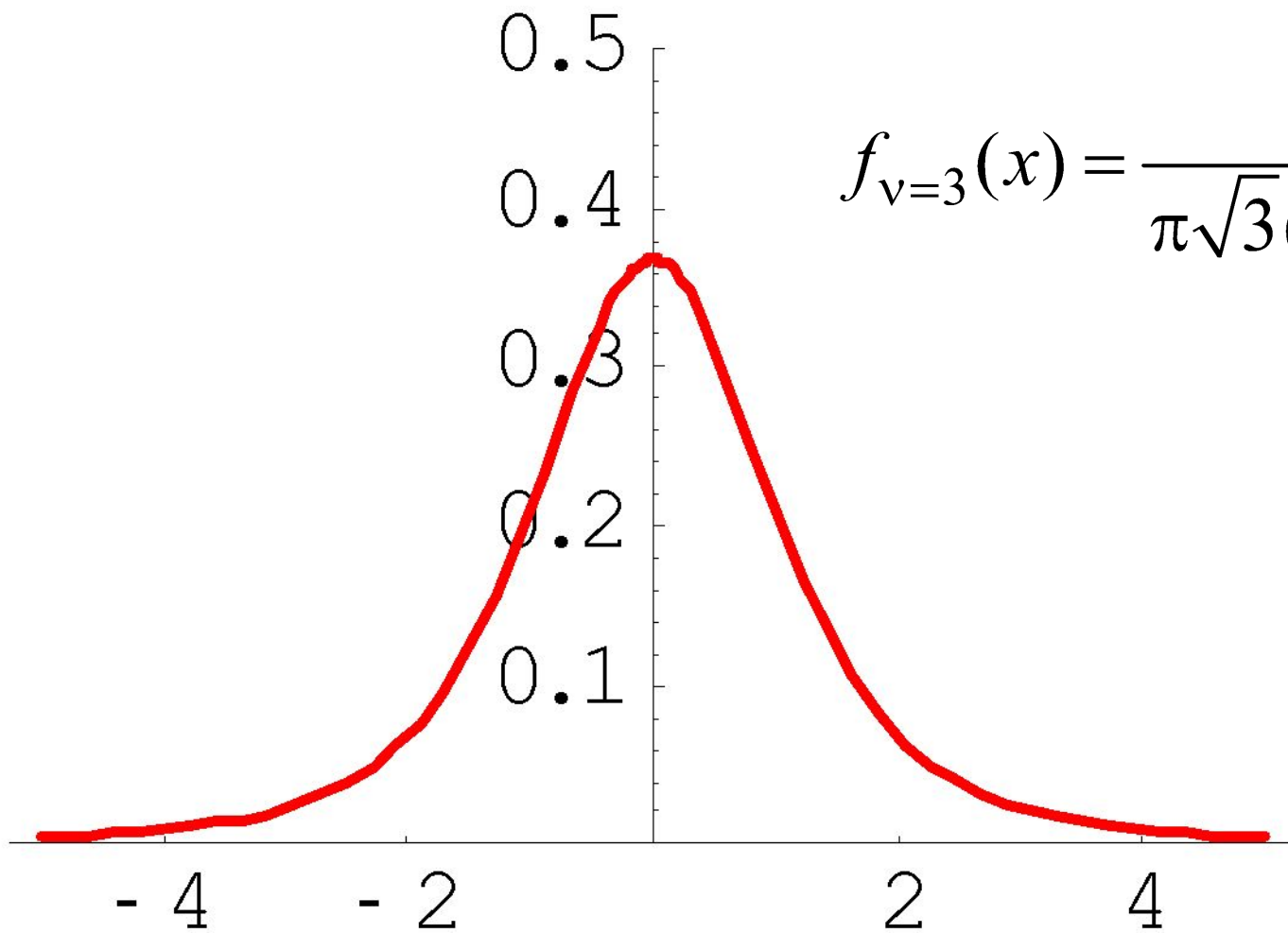


$\nu = 2$



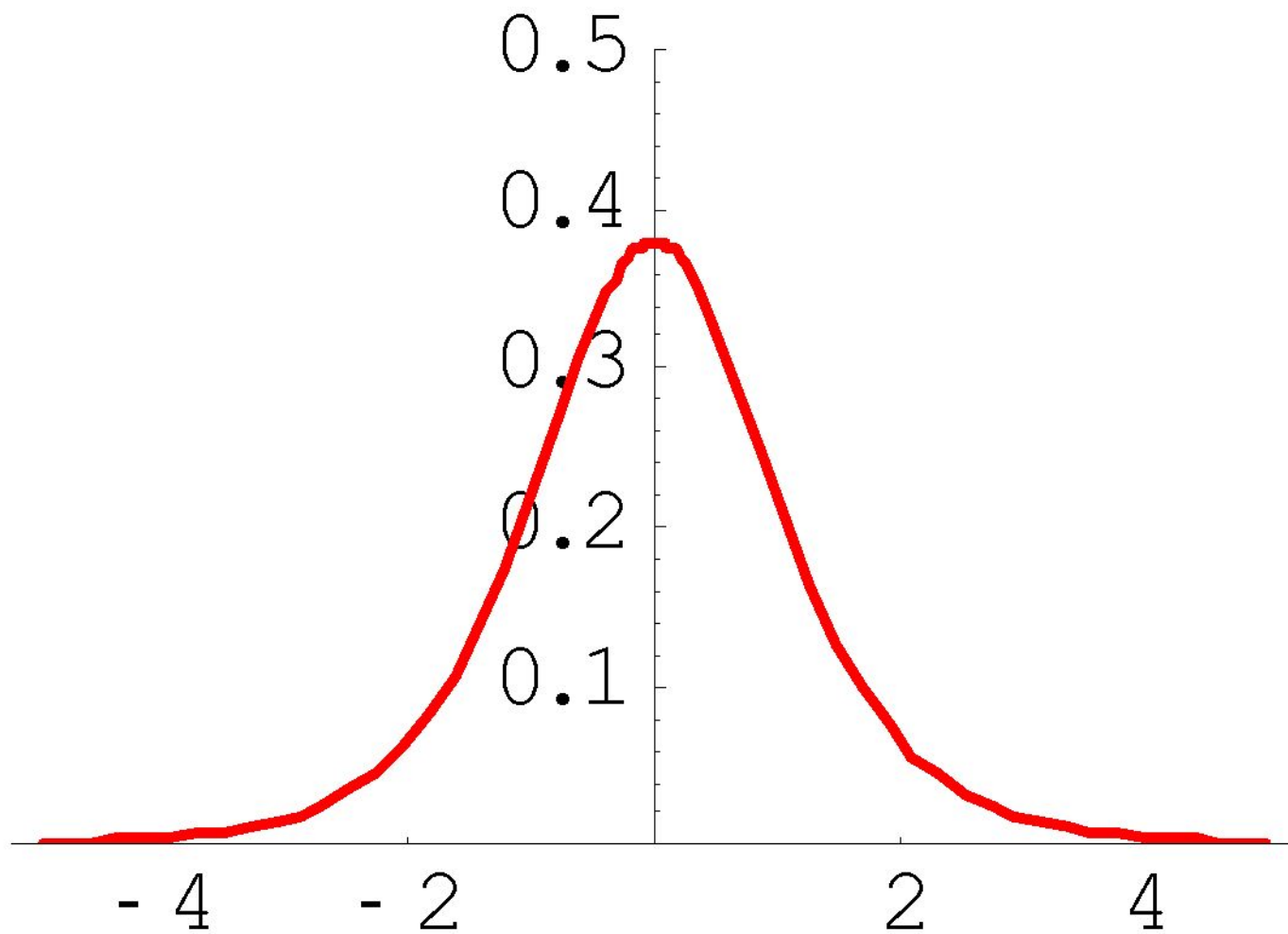
$$f_{\nu=2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+x^2/2)^3}$$

$\nu = 3$

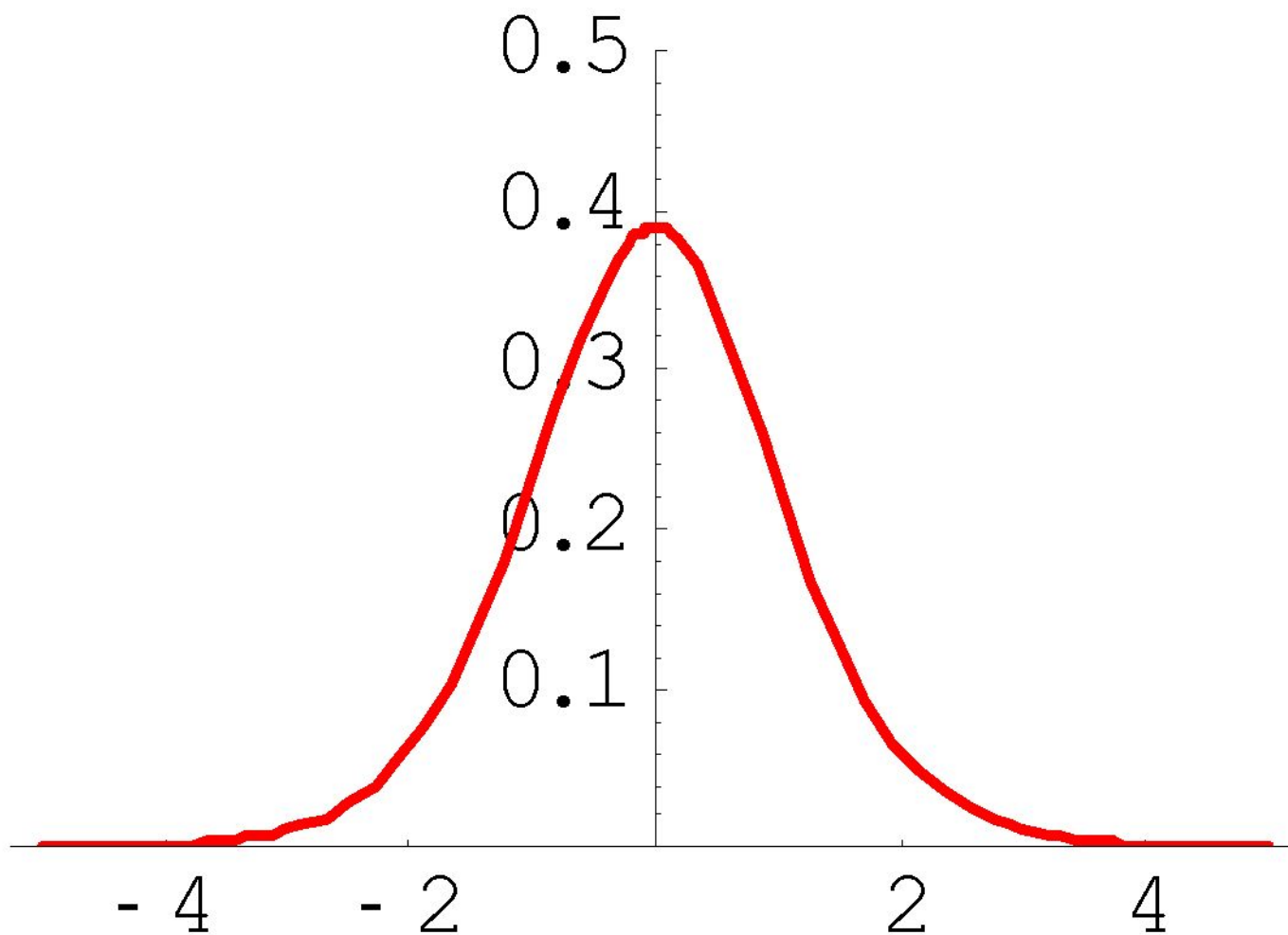


$$f_{\nu=3}(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}(1+x^2/3)^2}$$

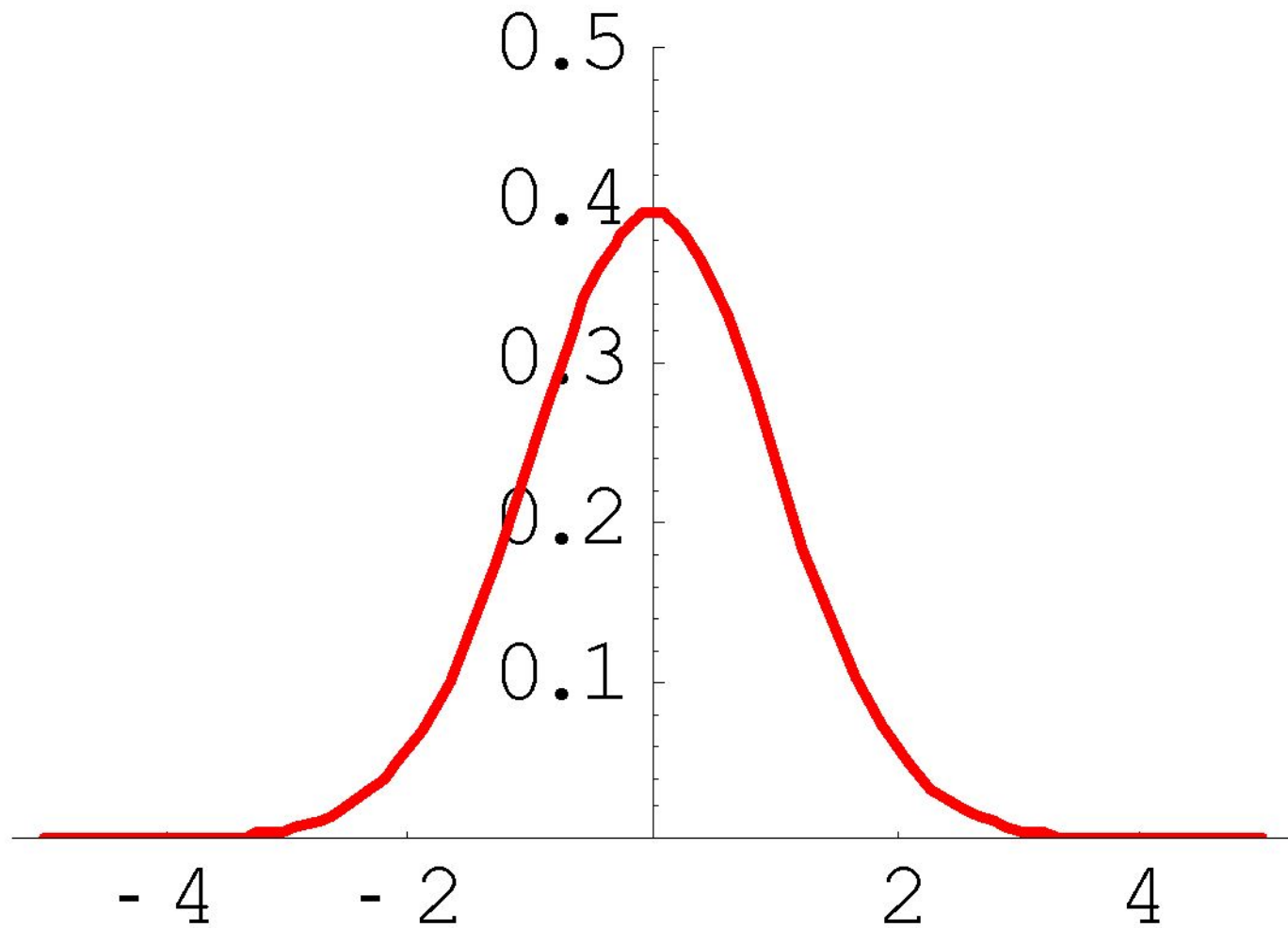
$\nu = 5$



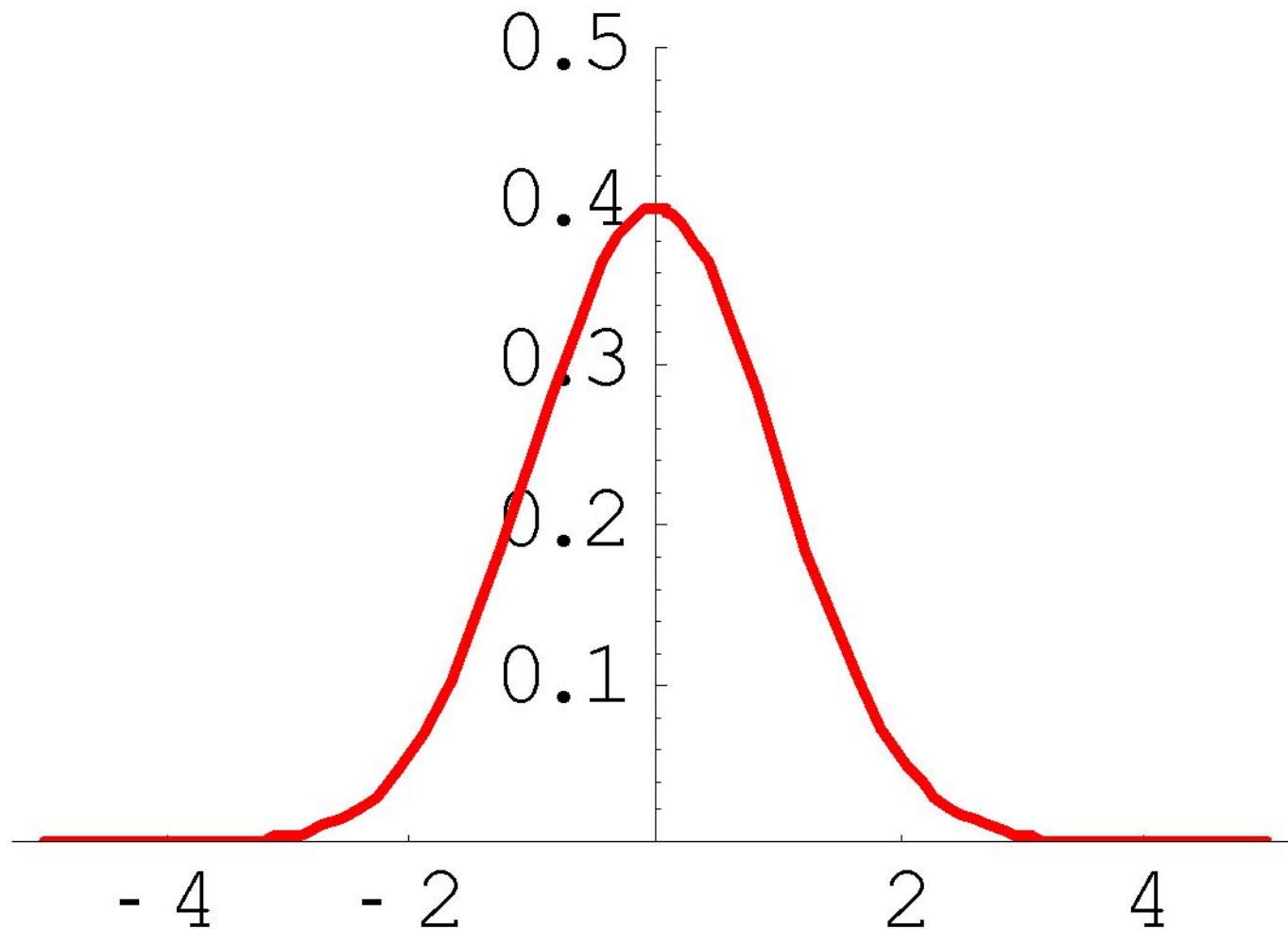
$\nu = 10$



$\nu = 40$



Нормированная функция Гаусса



Случайная величина **Стьюдента**

при $\nu \rightarrow \infty$ превращается в **гауссову**
нормированную случайную величину.