Специальные случайные распределения, используемые в математической статистике

Гамма-функция

Интегральное представление:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Основное свойство : $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

где **x** – любое действительное число.

Частные свойства.

$\Gamma(n+1) = n!$, где **n** - натуральное число.

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \approx 1{,}77245\ldots$$

$$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2 \approx 0{,}88623\ldots$$

Асимптотика

$$\Gamma(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{-x} x^{x} \sqrt{2\pi / x}$$

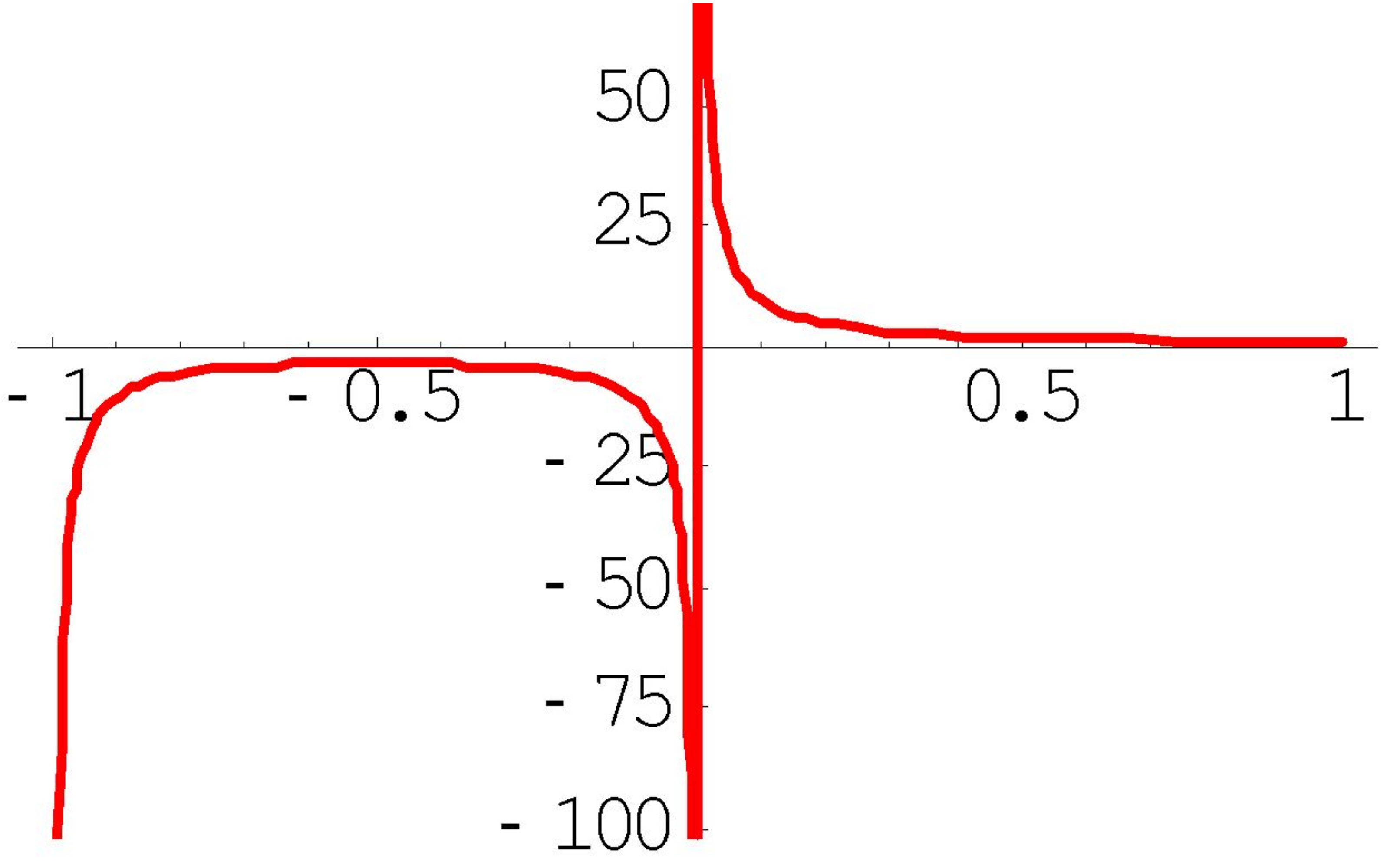


График функции **Г(x)**. Интервал: **[- 1; 1].**

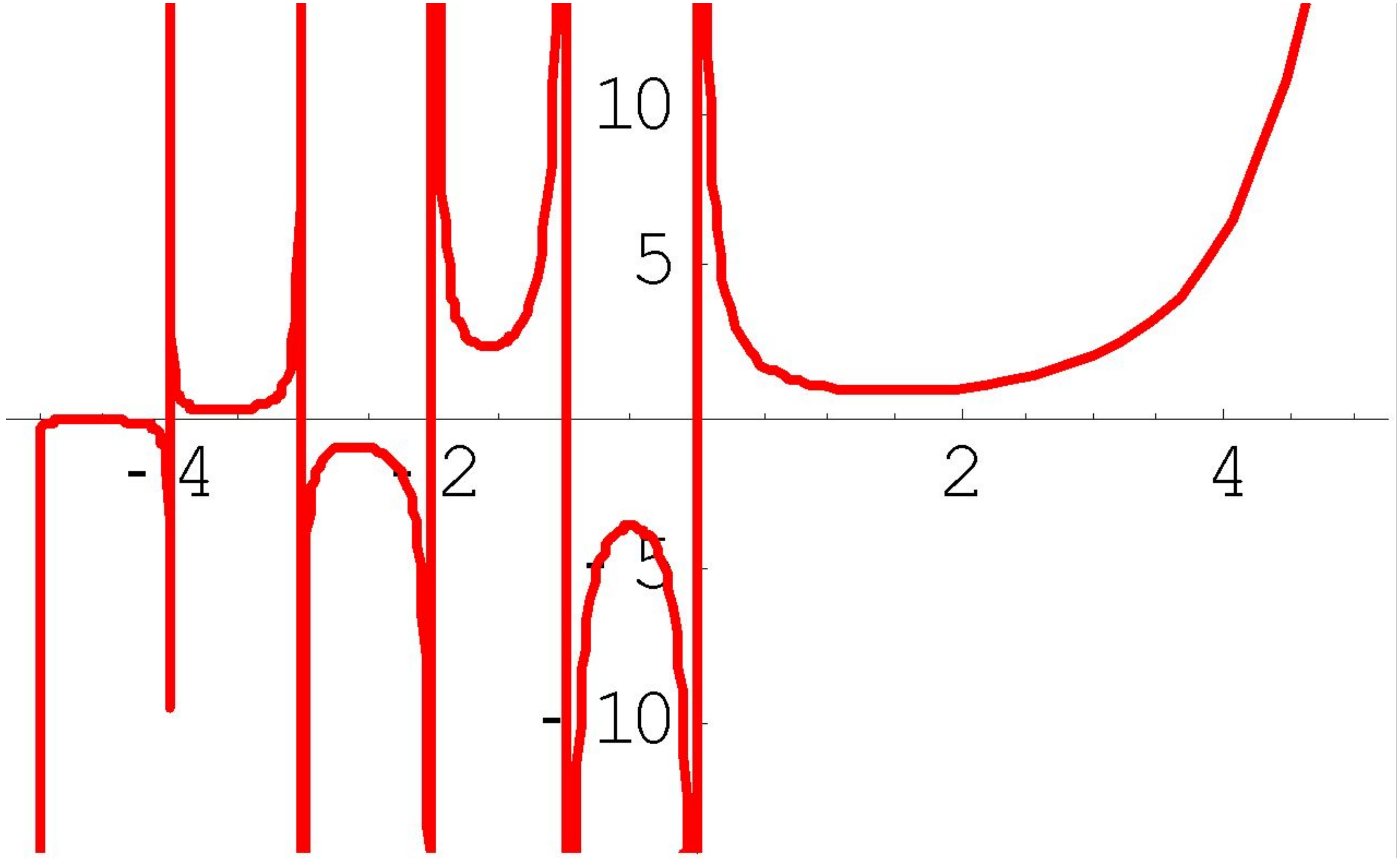


График функции **Г(х)**. Интервал: **[- 5; 5]**.

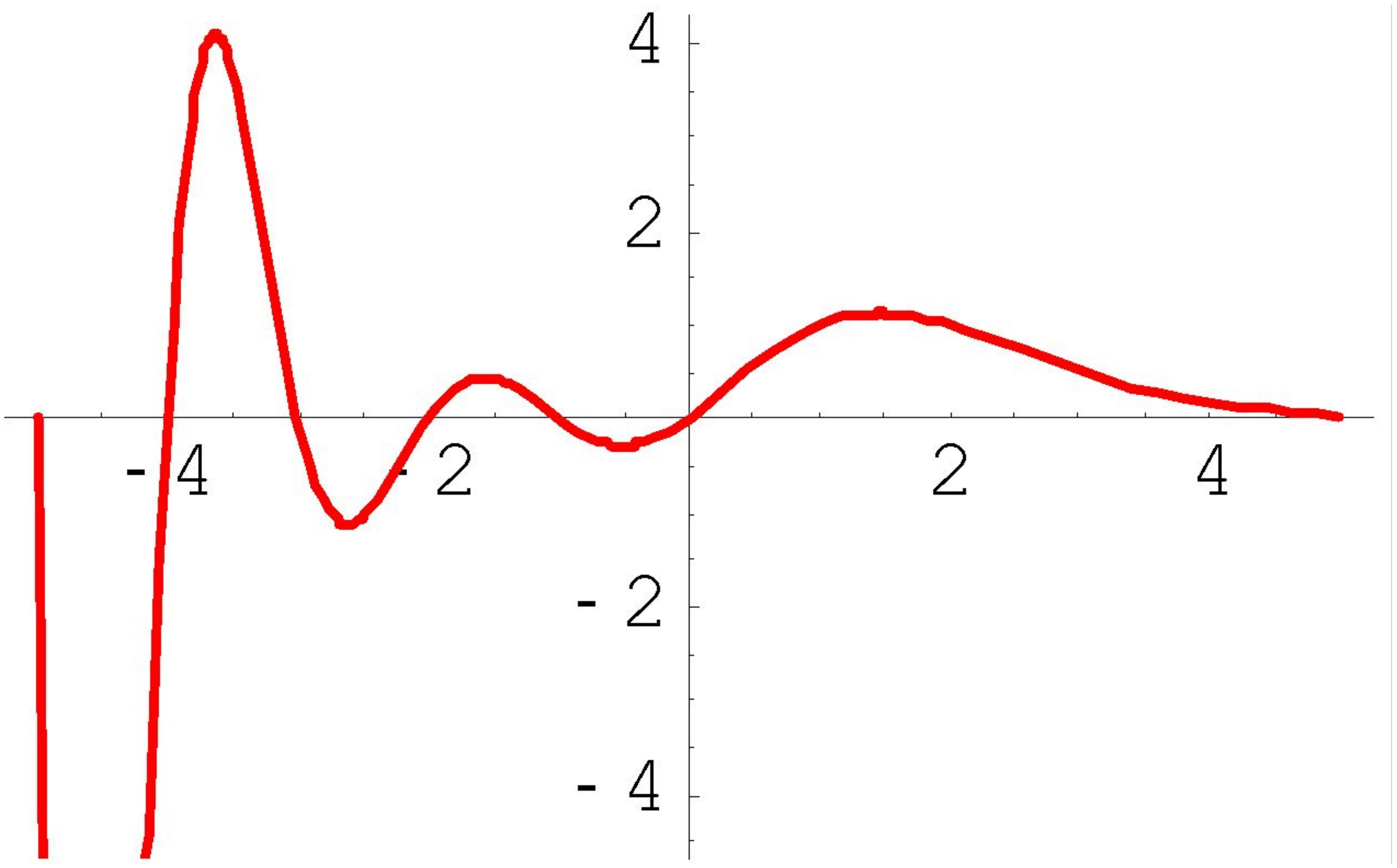
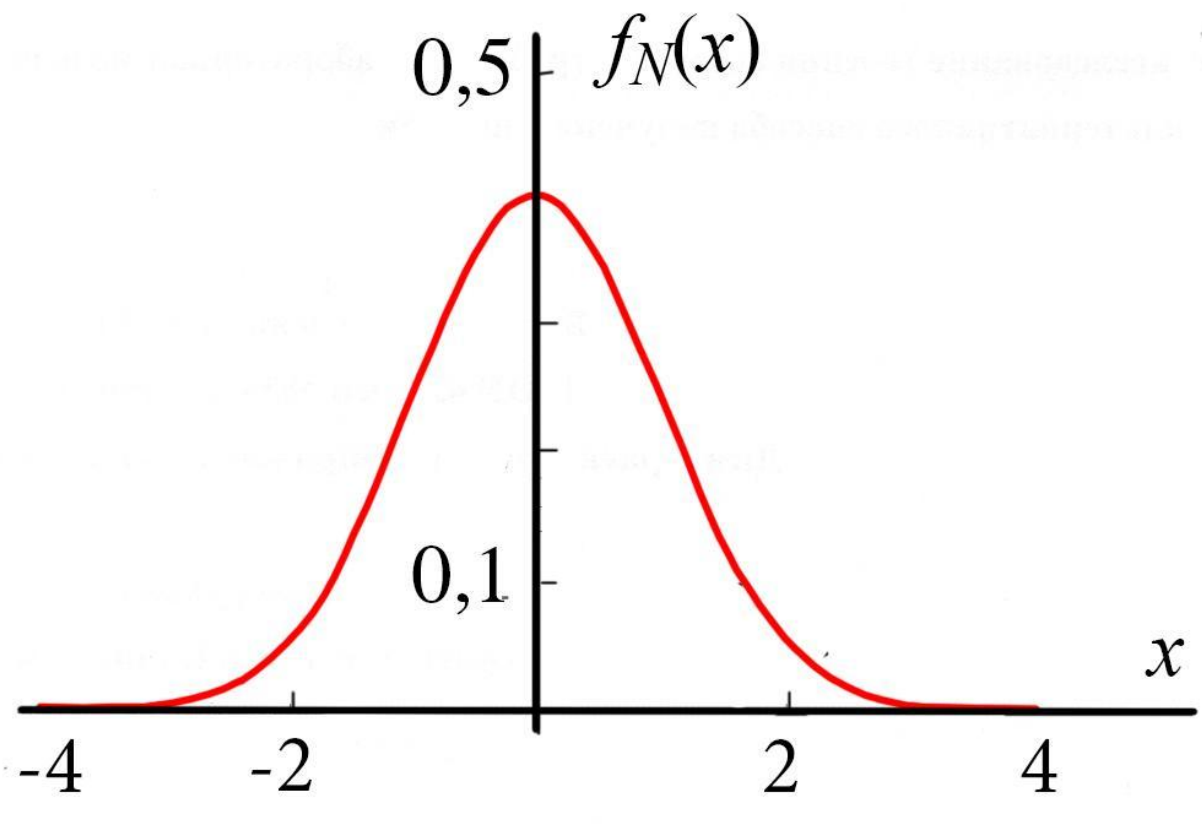


График функции **1 / Г(x).**

Нормированная функция Гаусса

$$f_{Gn}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



Случайная величина «хи-квадрат»

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{v} \xi_i^2$$

где $\boldsymbol{\xi_i}$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет **нормальное нормированное** распределение вероятностей, имеющее плотность вида

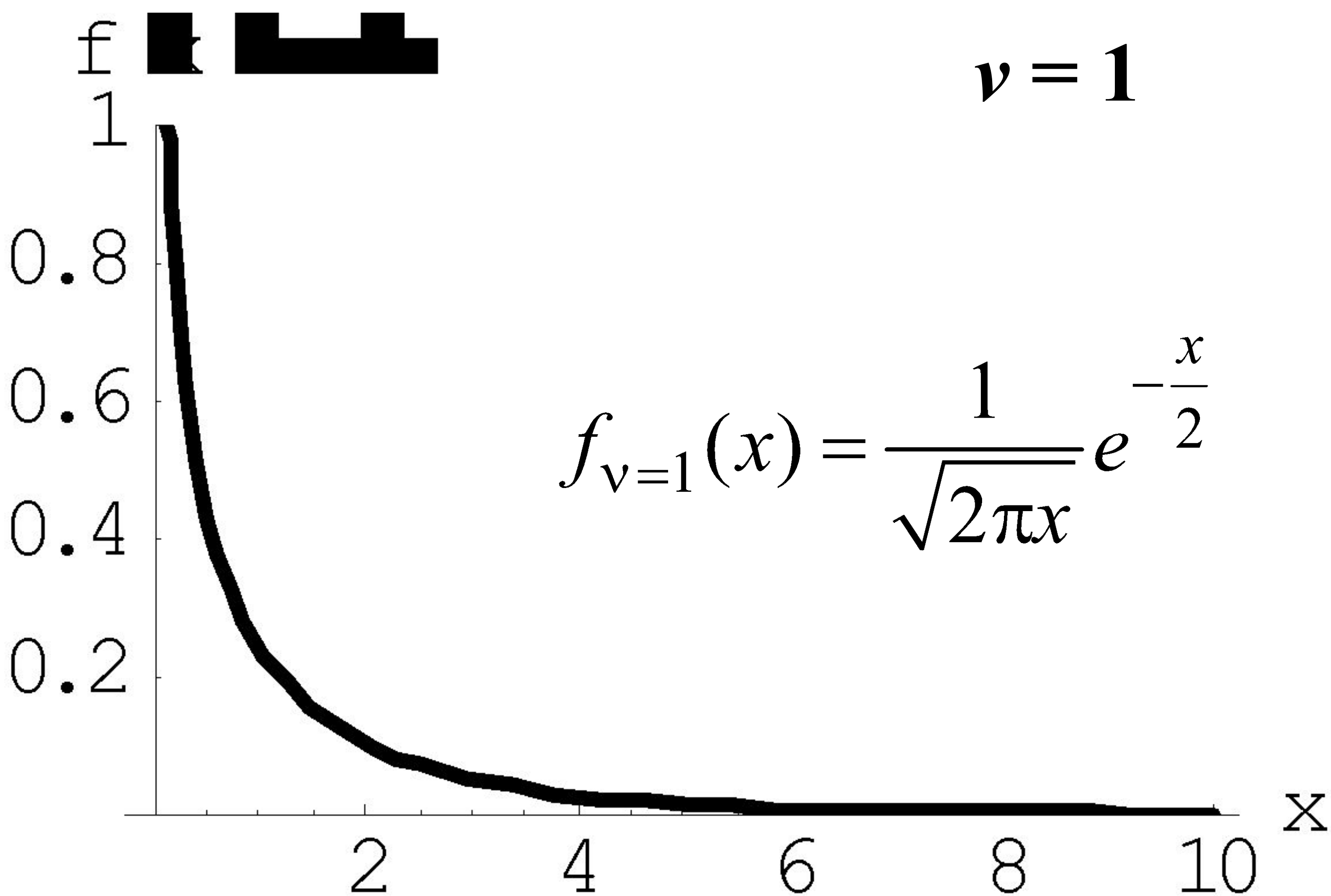
$$f_{Gn}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right)$$

Вид распределения зависит от целочисленного параметра **ν**, который называется **число степеней свободы** и принимает значения натурального ряда чисел.

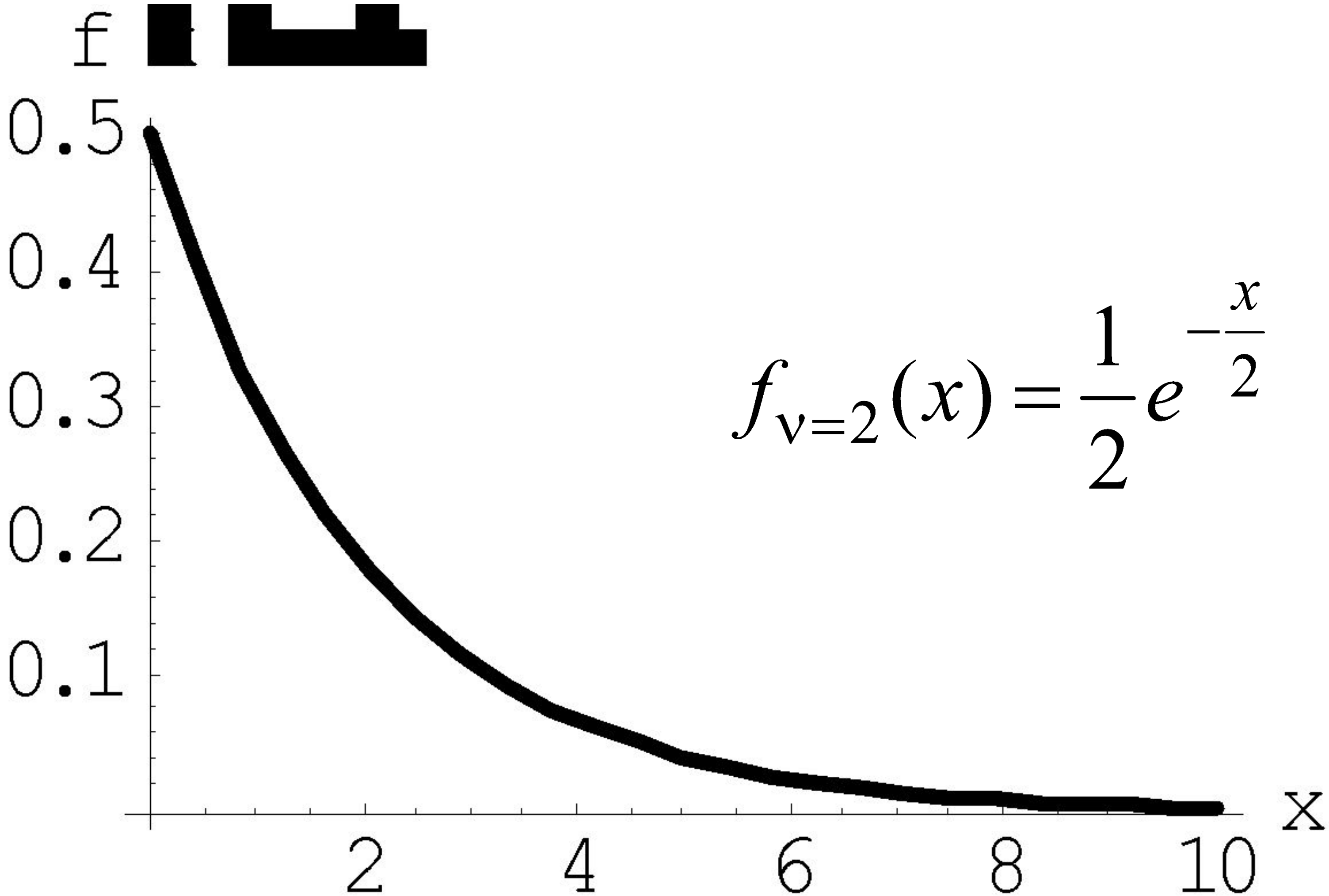
$$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(v/2)} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} 2^{-\frac{v}{2}} \qquad x \geq 0$$

Математическое ожидание и дисперсия

$$\mathbf{M}(\chi^2) = v \qquad \mathbf{D}(\chi^2) = 2v$$

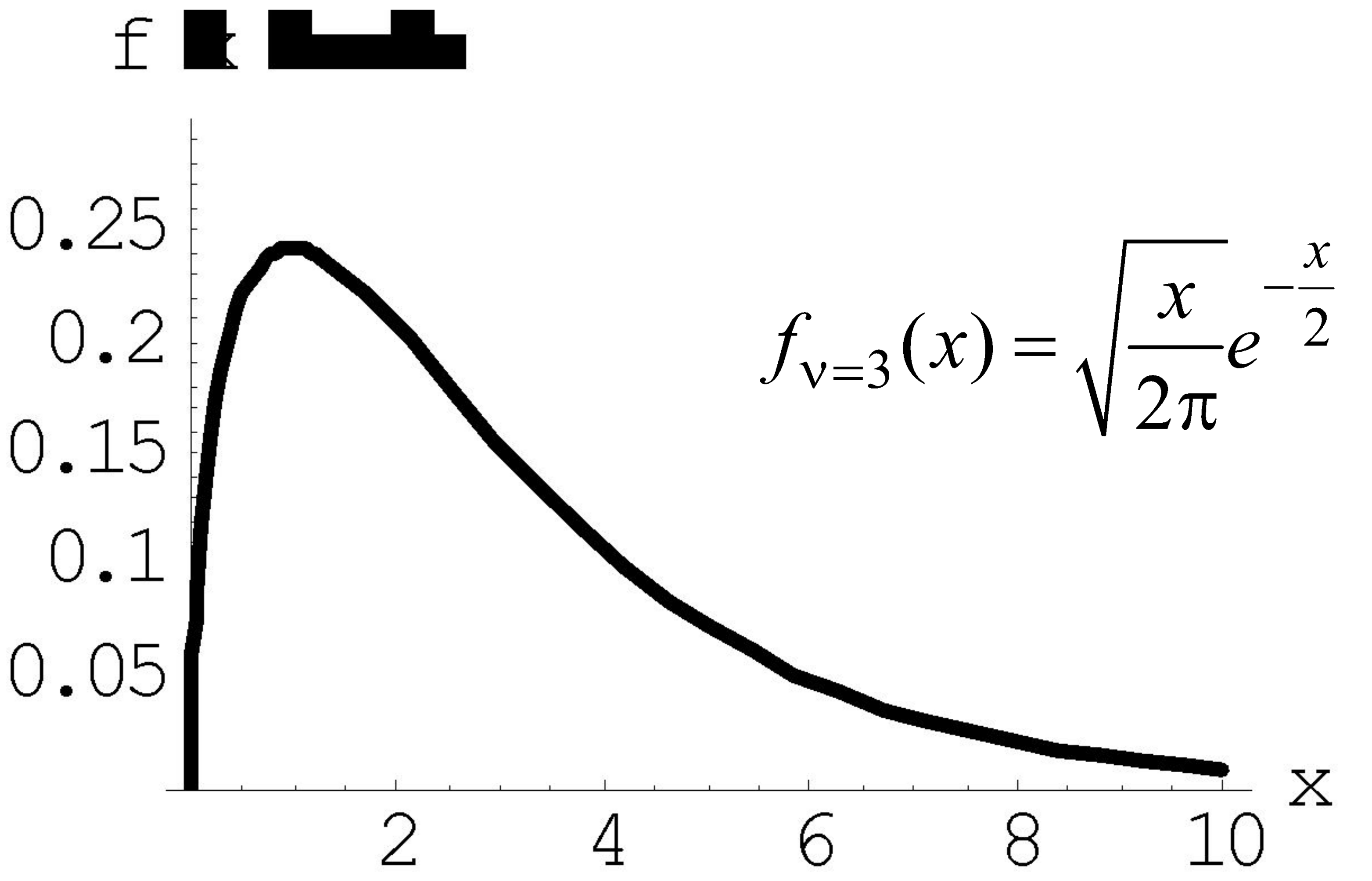

f [redacted]
ν = 1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
2
4
6
8
10
x
$f_{\nu=1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$

$\nu = 2$



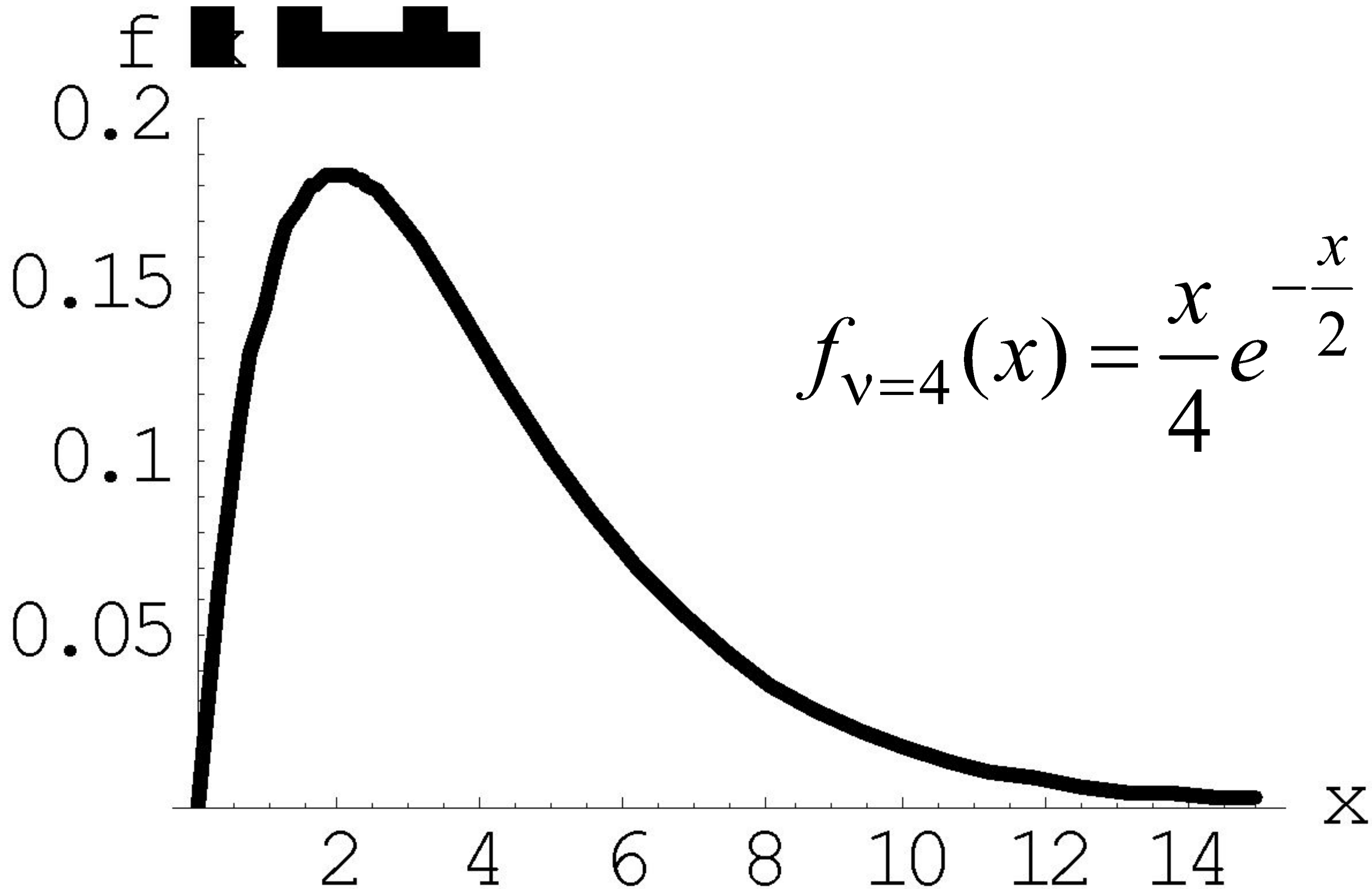
$$f_{\nu=2}(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

$\nu = 3$



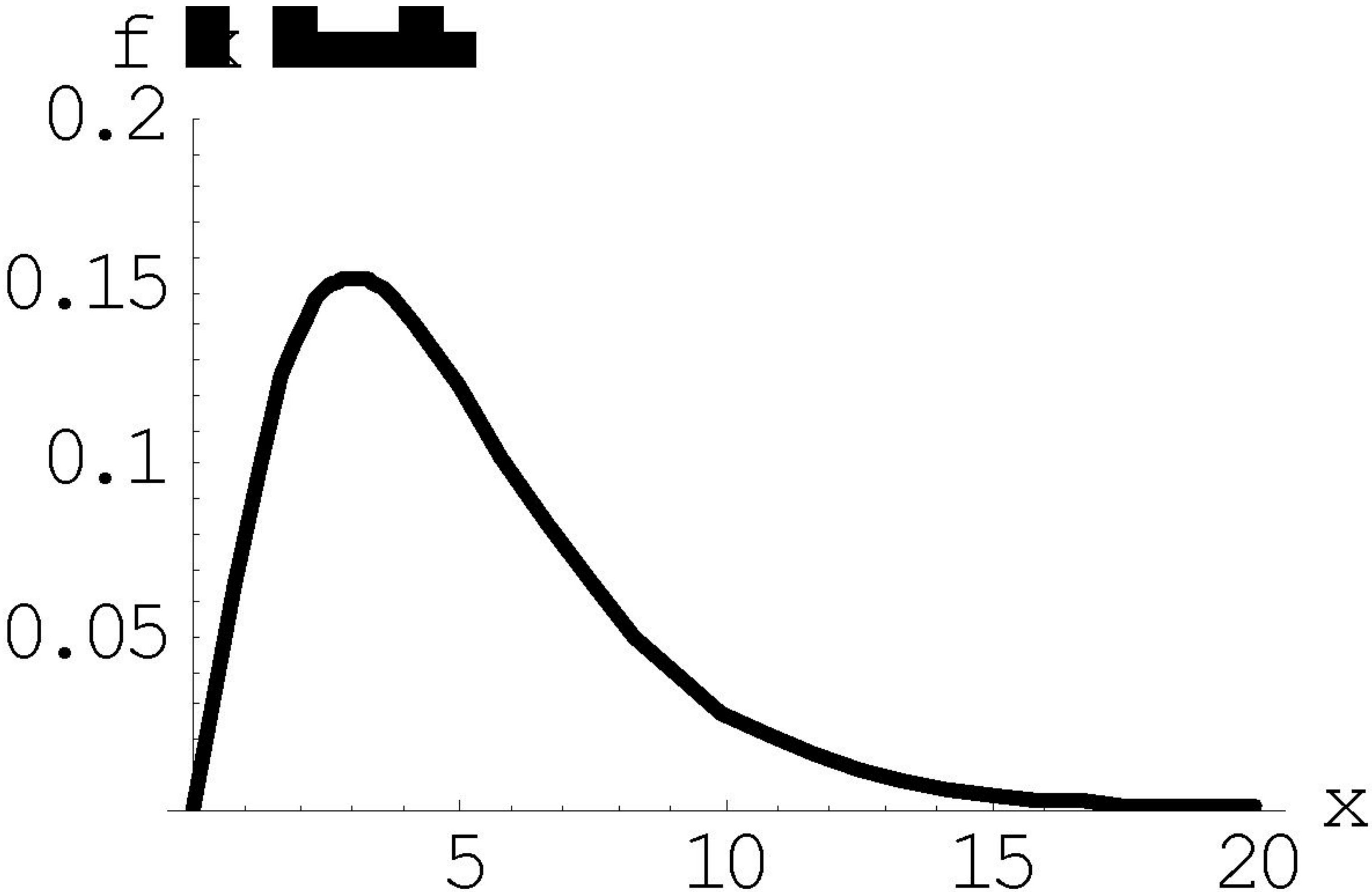
$$f_{\nu=3}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

$\nu = 4$

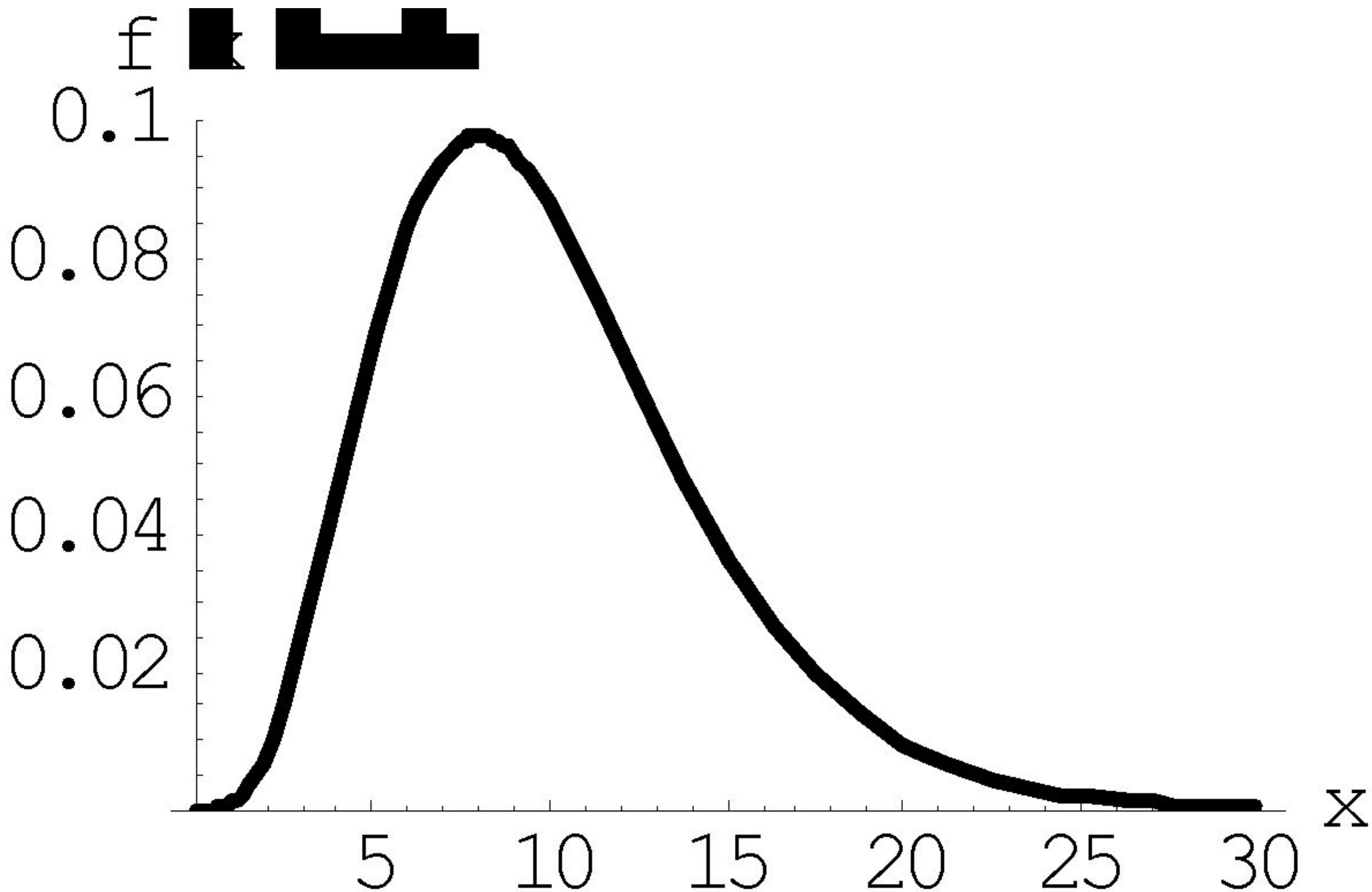


$$f_{\nu=4}(x) = \frac{x}{4} e^{-\frac{x}{2}}$$

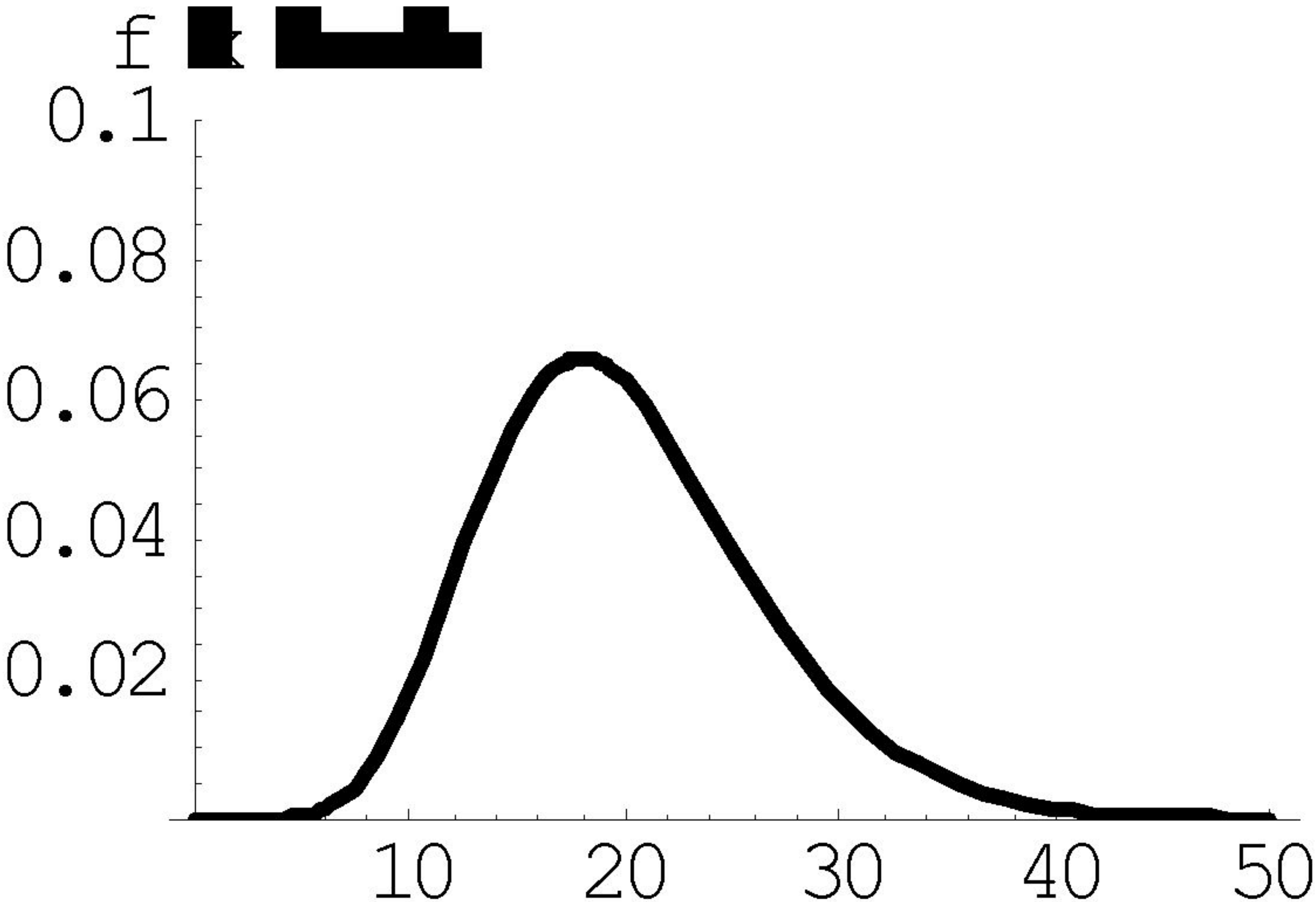
$\nu = 5$



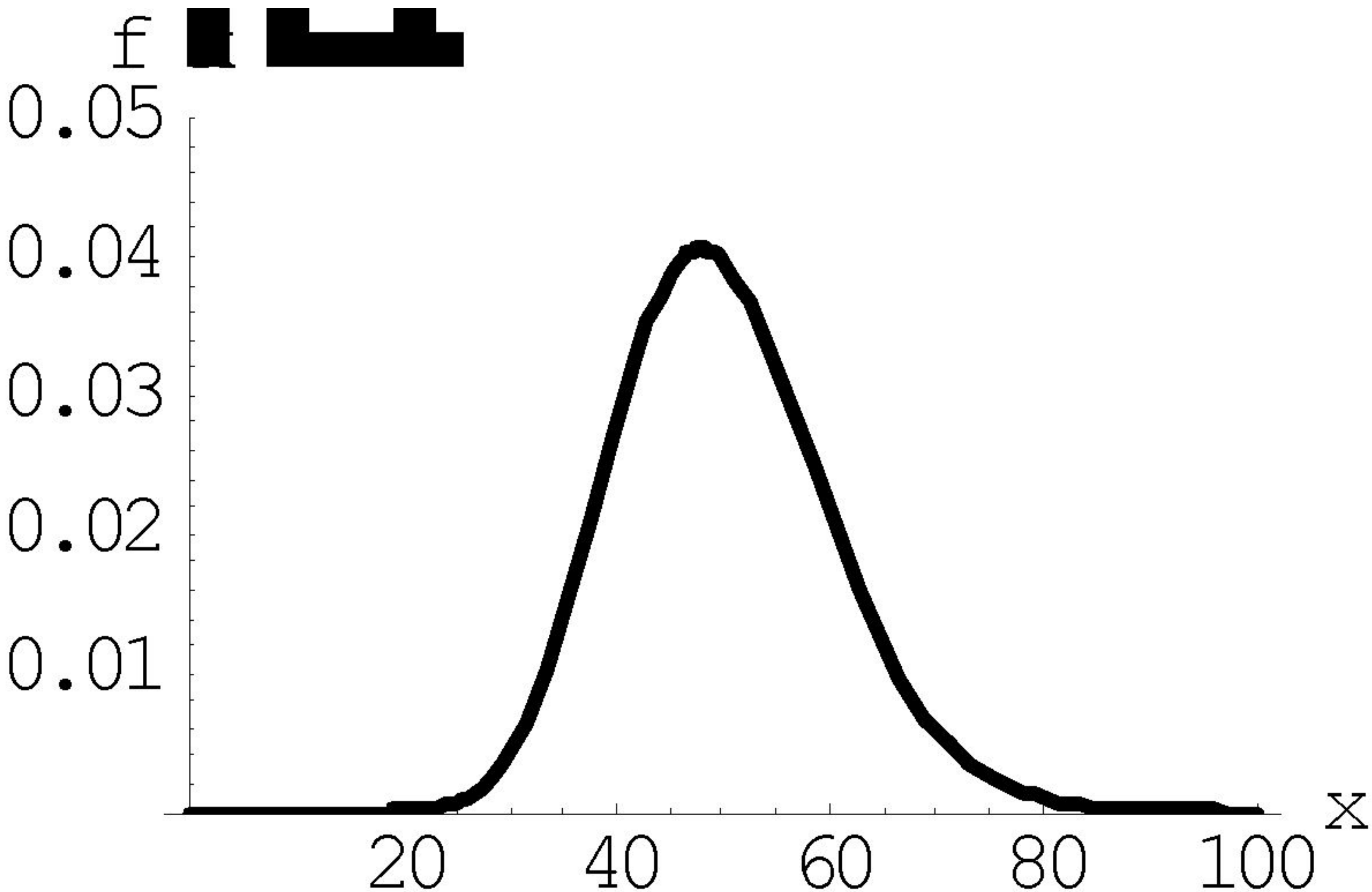
$\boldsymbol{v = 10}$



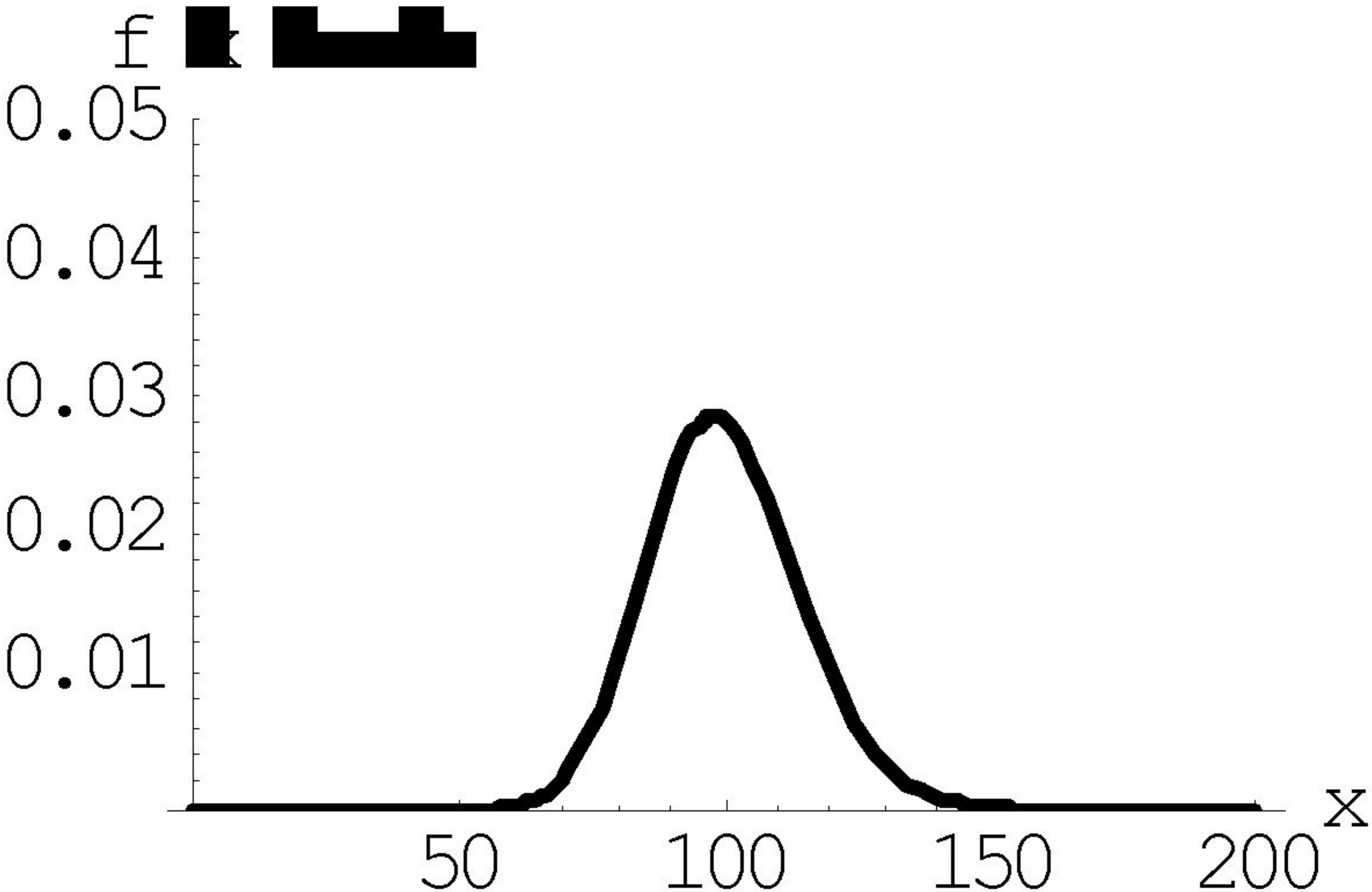
$\nu = 20$



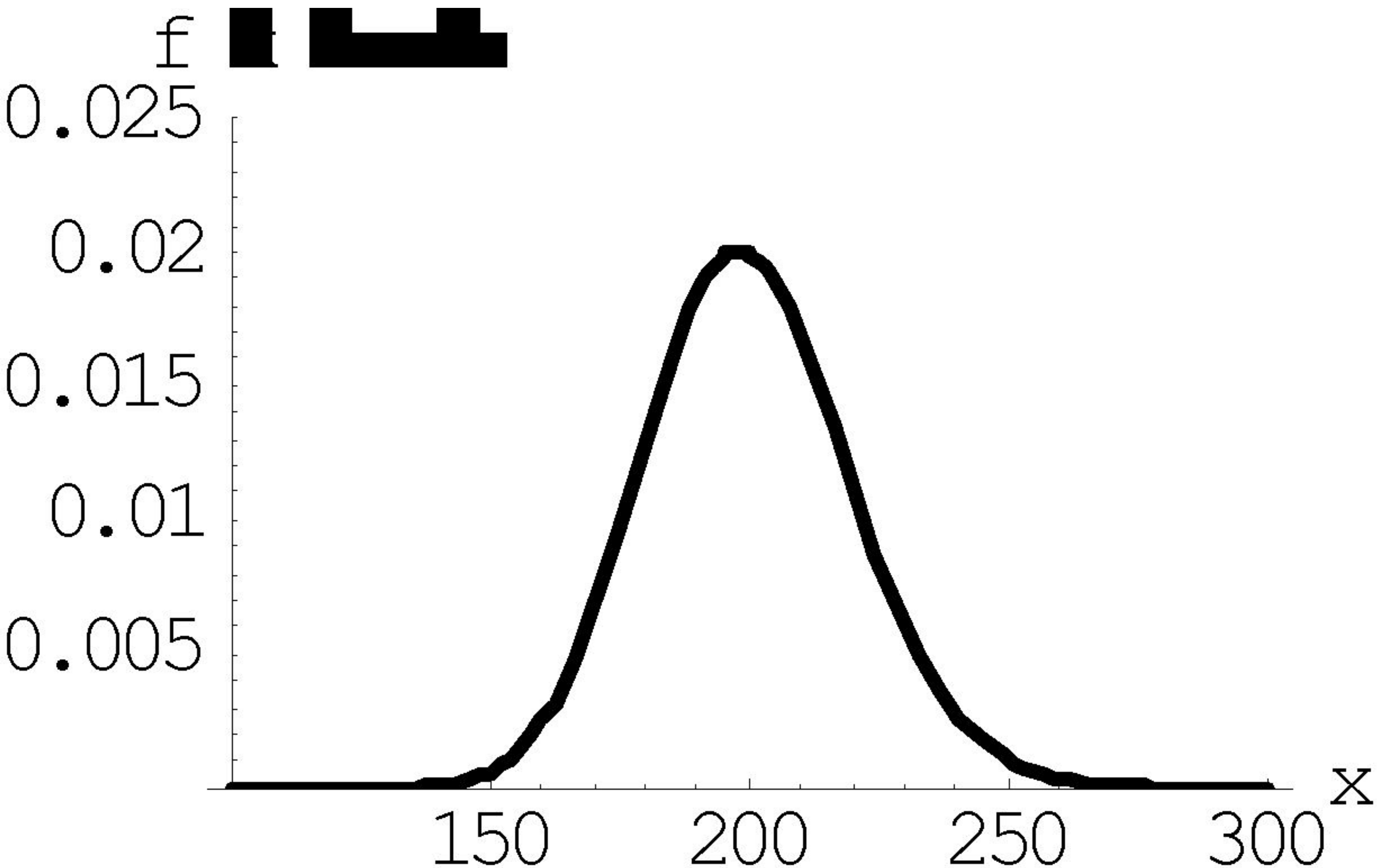
$\nu = 50$



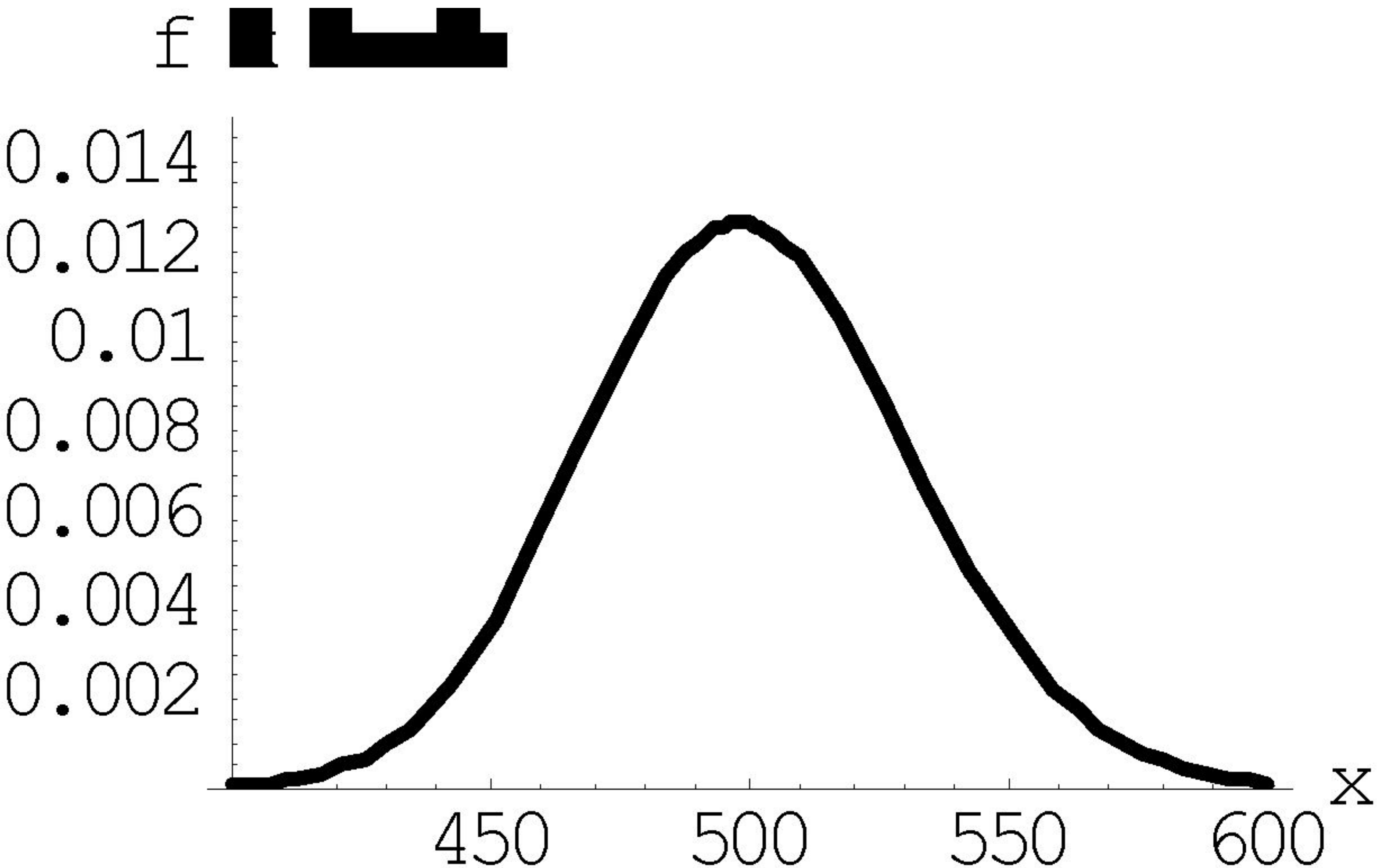
$\nu = 100$



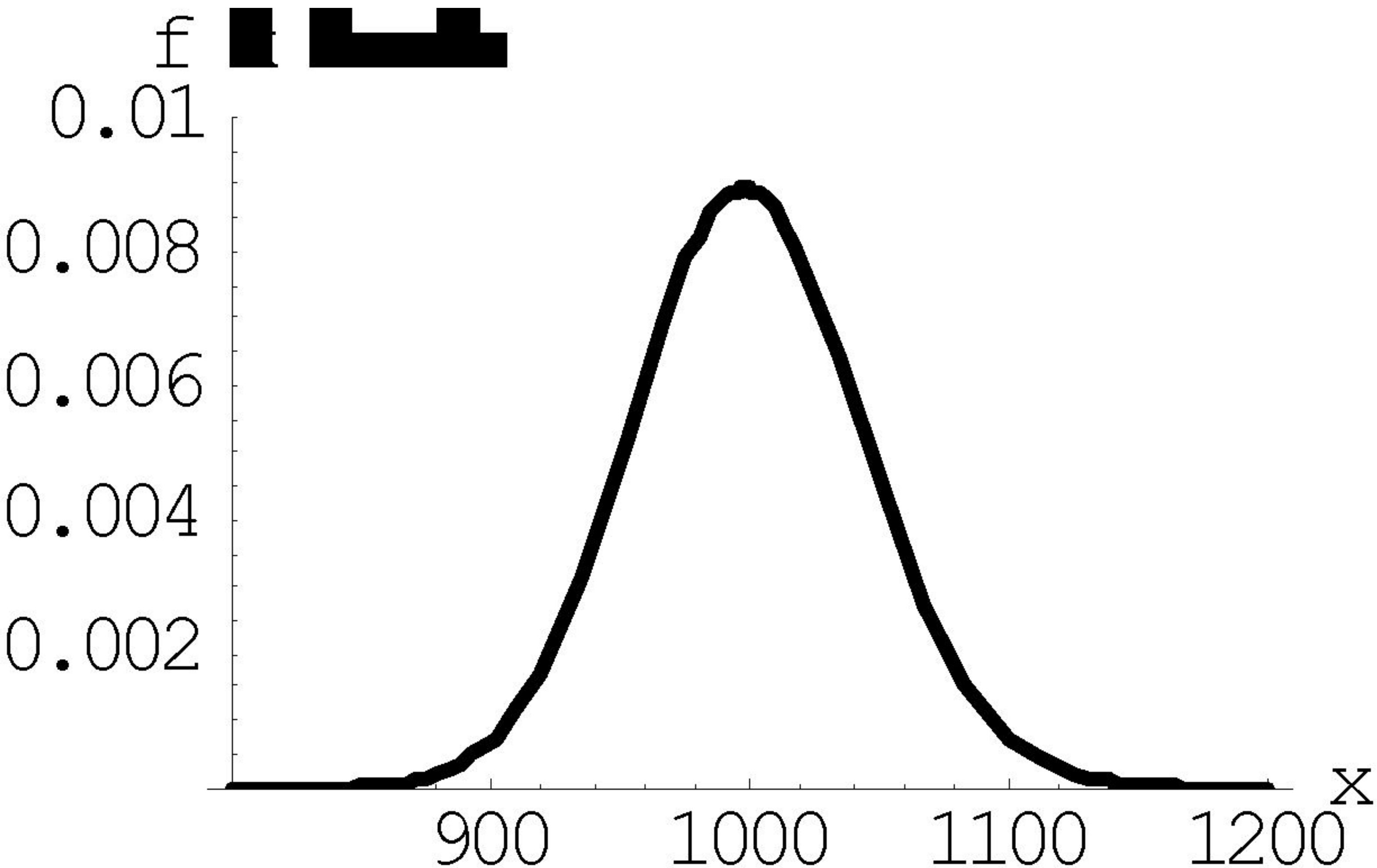
$v = 200$



$v = 500$



v = 1000



Случайная величина
$$\frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}$$

при $\nu \to \infty$ превращается в **гауссову нормированную** случайную величину.

Случайная величина Стьюдента

$$T_{\nu} = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\xi_i^2}}$$

где все $(\nu + 1)$ случайные величины ξ_i независимы и имеют **нормальное нормированное** распределение вероятностей.

Параметр ν называется **числом степеней свободы** и принимает значения **натурального ряда чисел**.

Плотность случайной величины Стьюдента

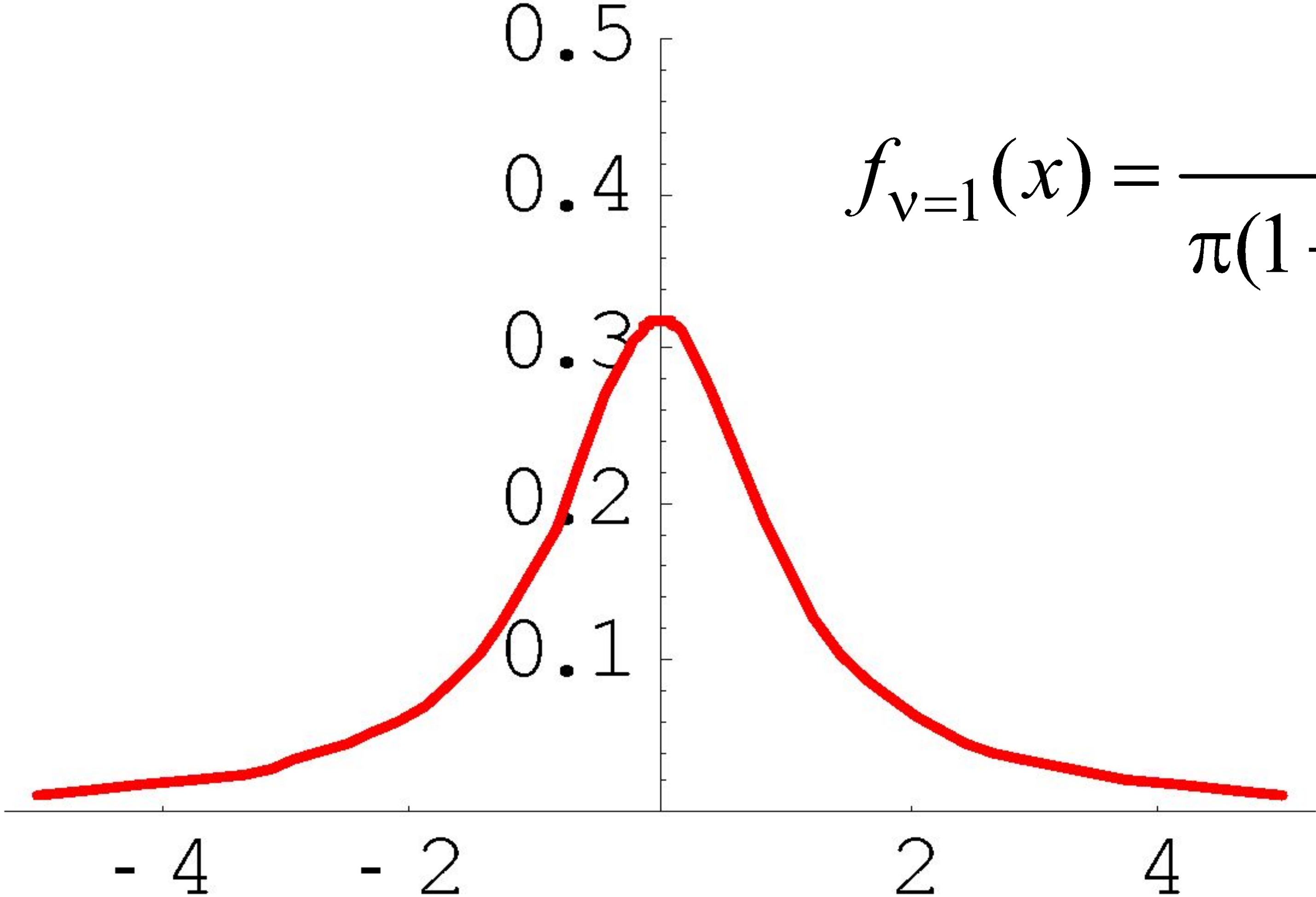
$$f_v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

Вид распределения зависит от **числа степеней свободы**

Математическое ожидание и дисперсия

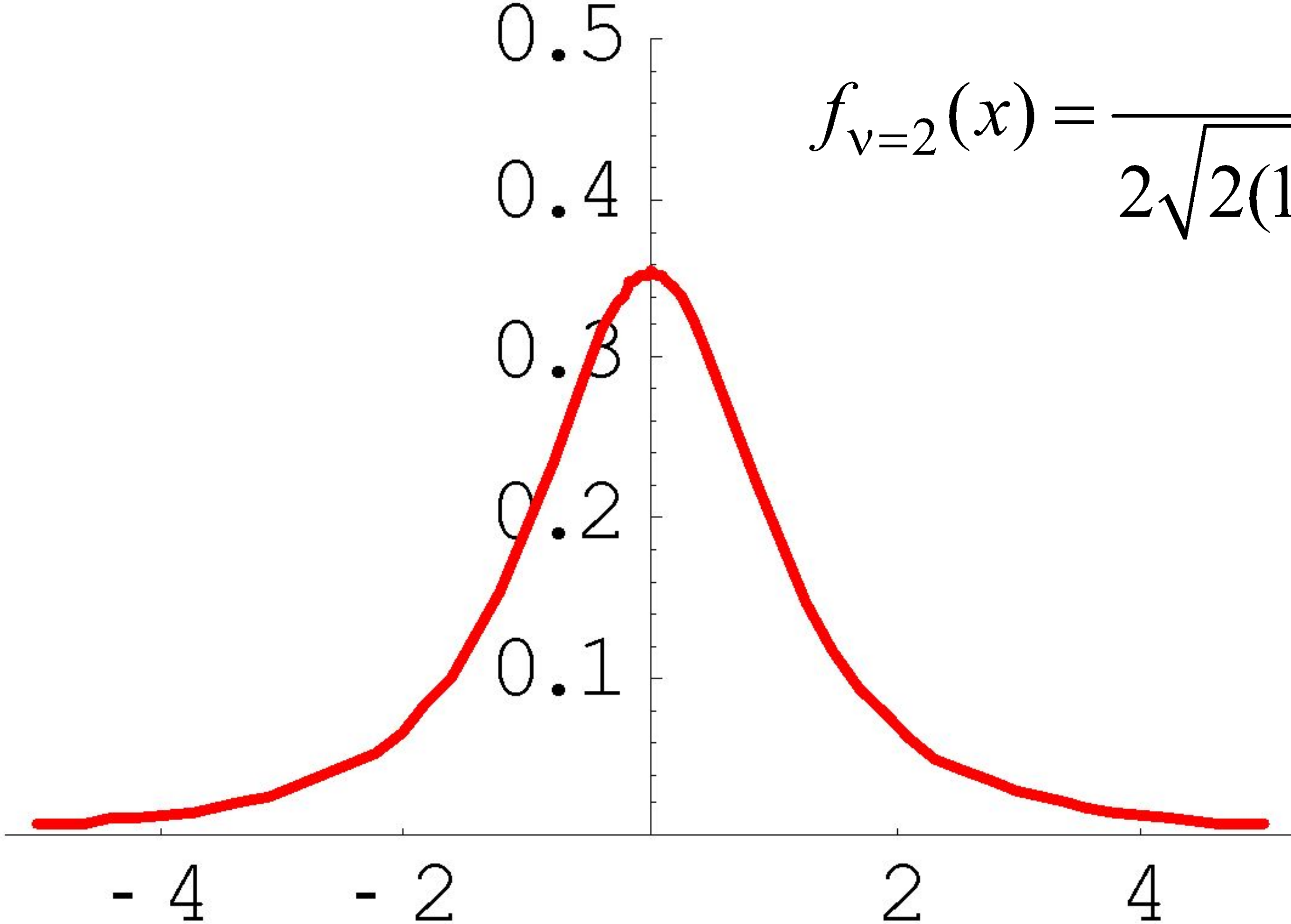
$$M(T_\nu) = 0 \qquad D(T_\nu) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

***ν* = 1**



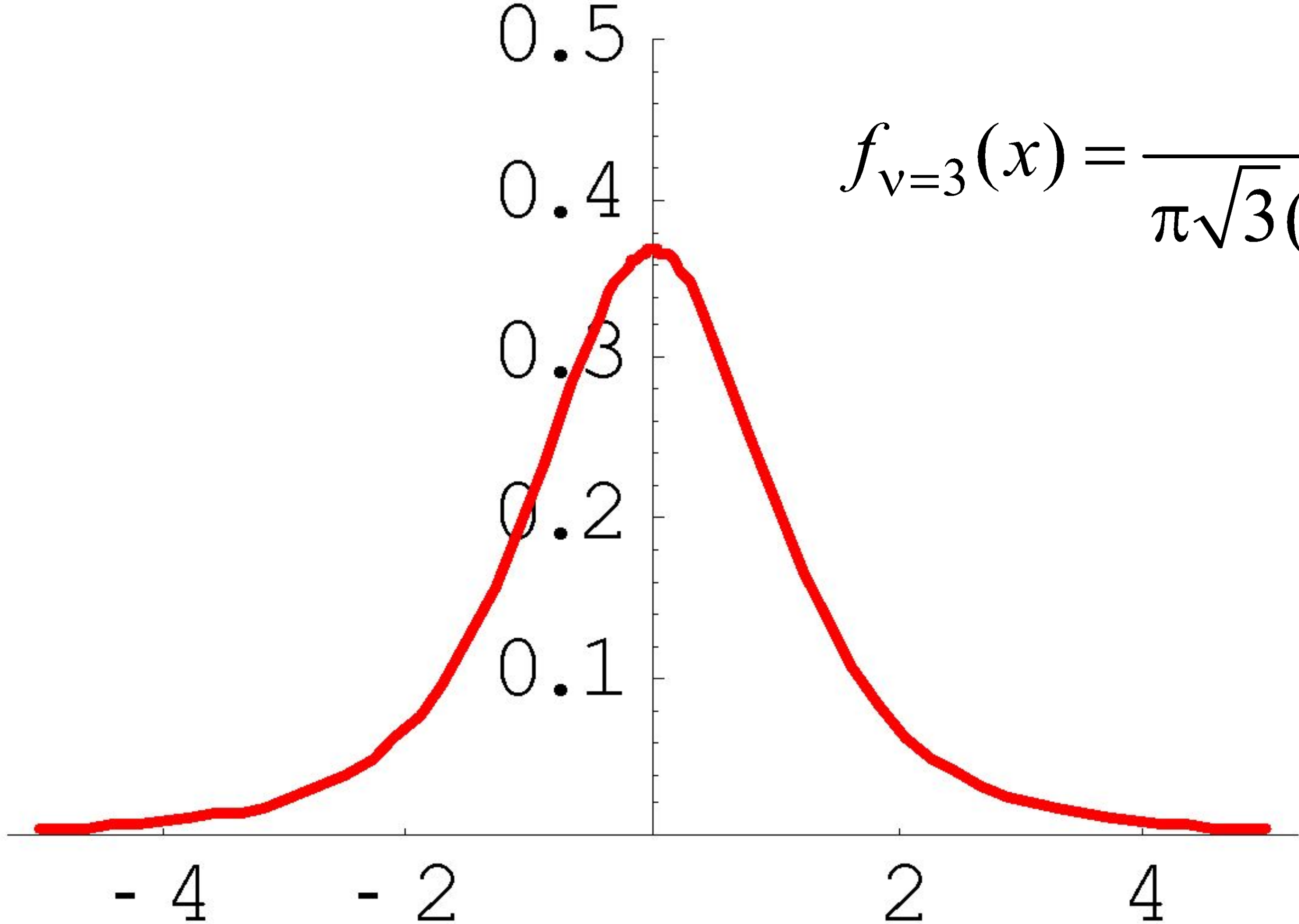
$$f_{\nu=1}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$\nu = 2$



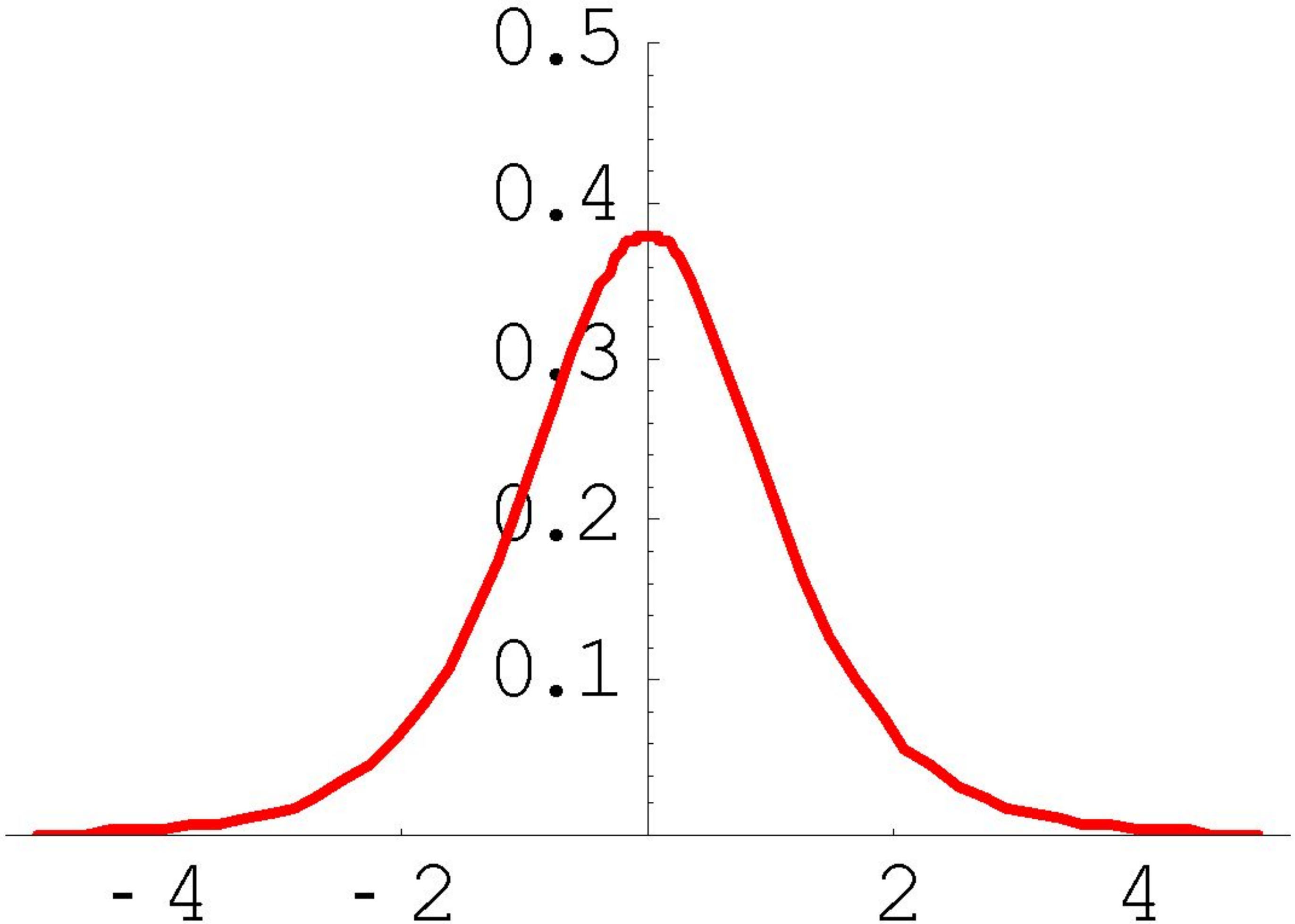
$$f_{\nu=2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2(1+x^2/2)^3}}$$

$v = 3$

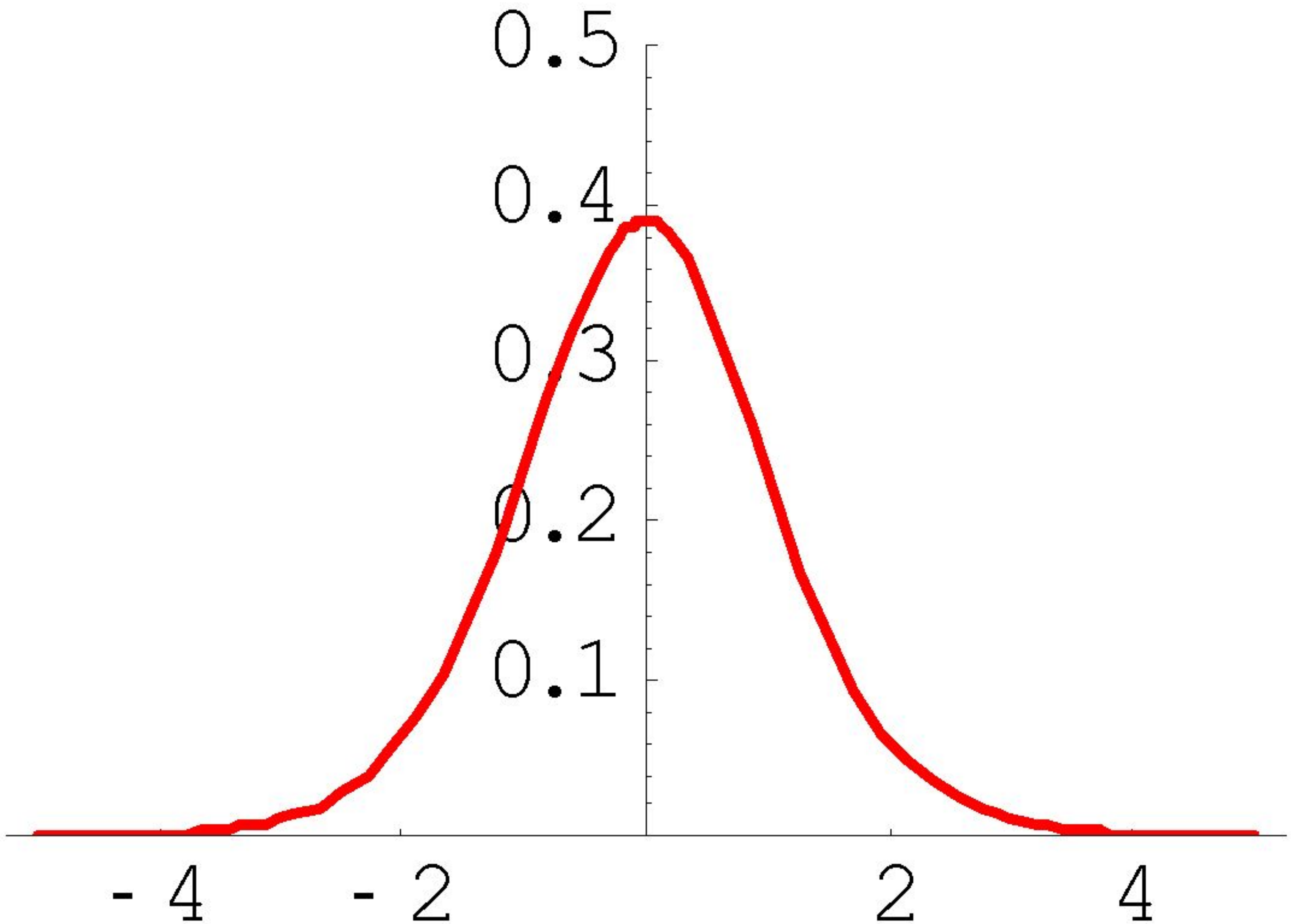


$$f_{\nu=3}(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}(1 + x^2/3)^2}$$

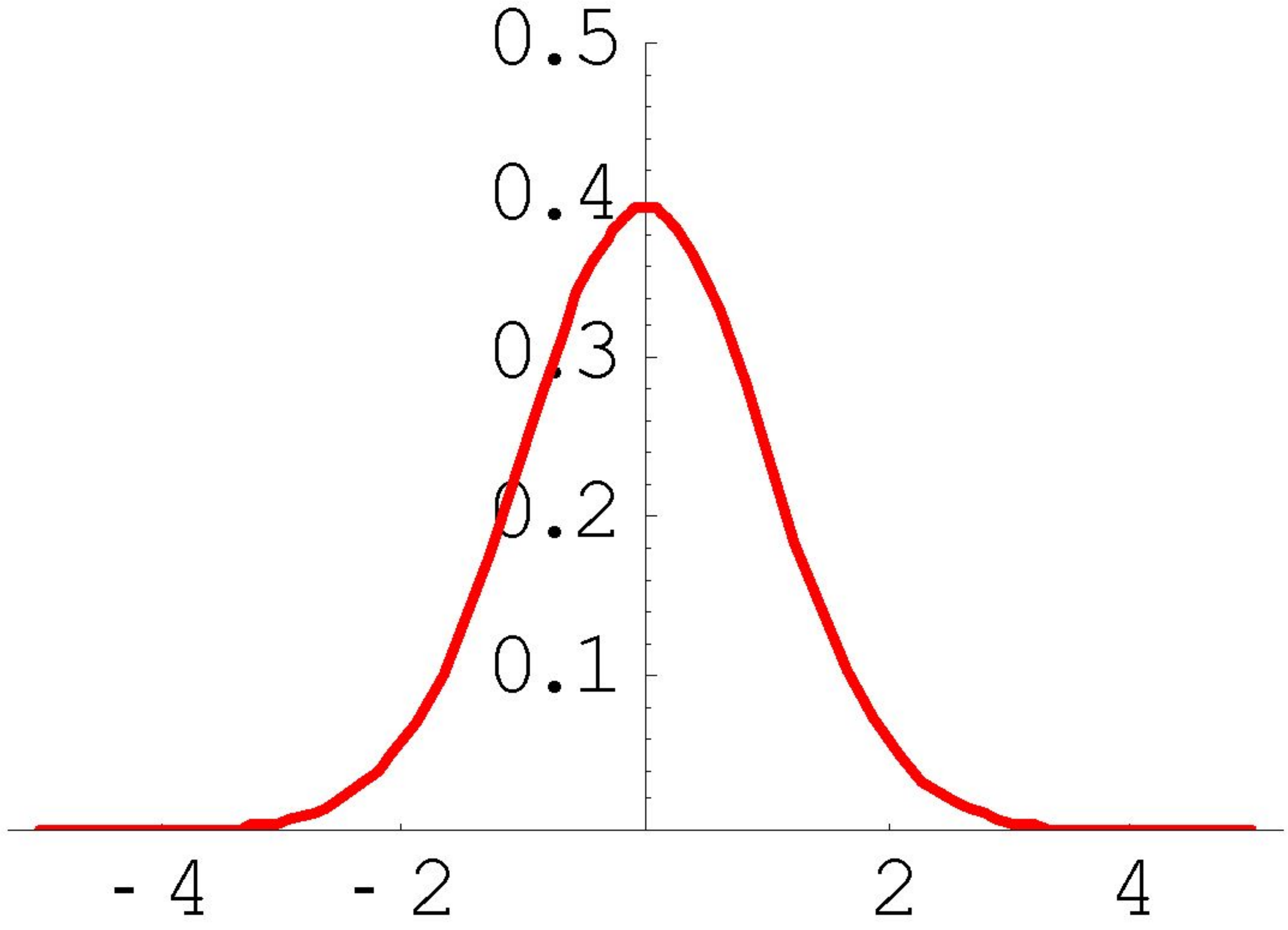
$v = 5$



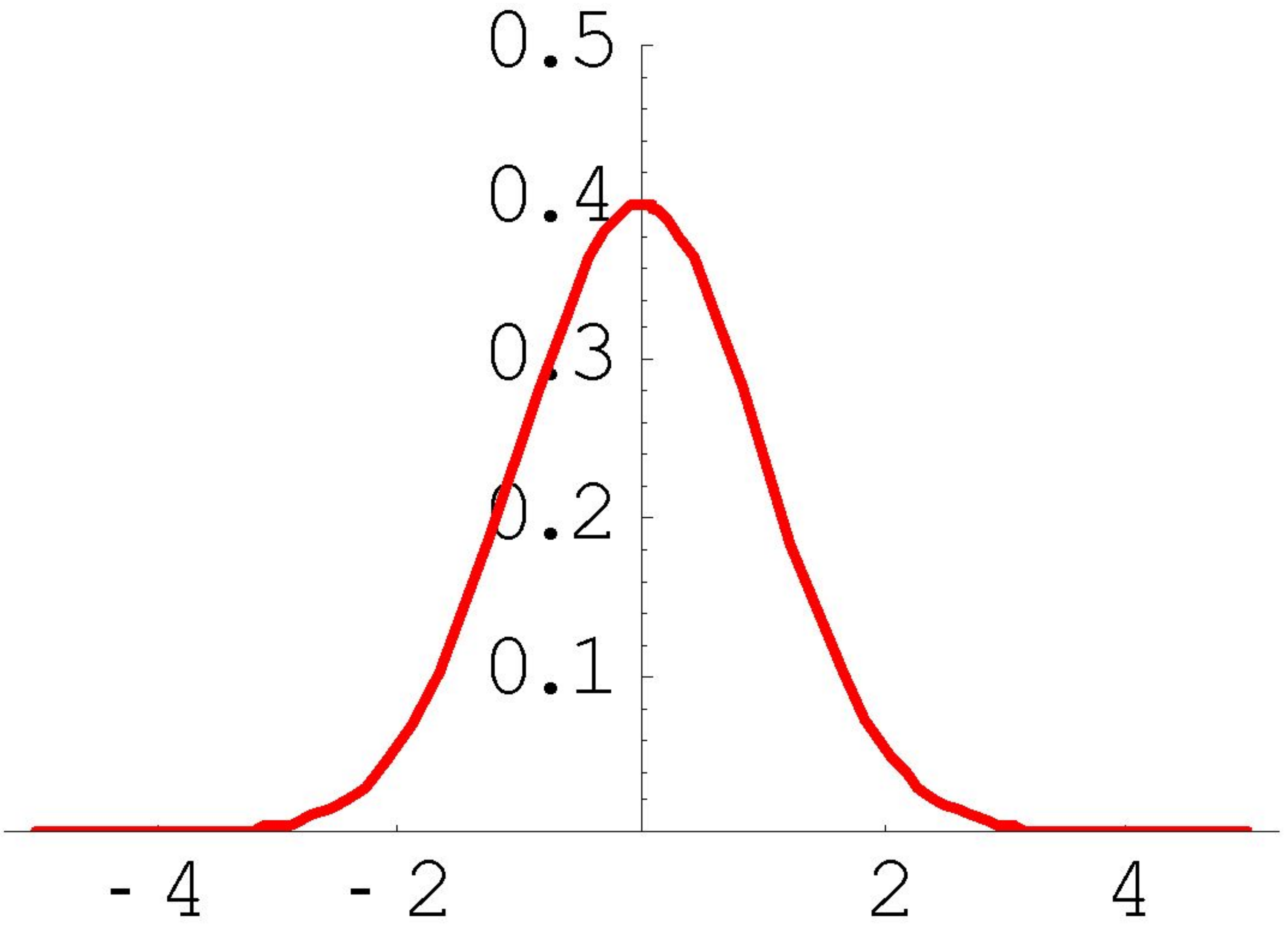
$v = 10$



$\nu = 40$



Нормированная функция Гаусса



Случайная величина **Стьюдента** при $\nu \longrightarrow \infty$ превращается в **гауссову нормированную** случайную величину.