

**Специальные  
случайные  
распределения,  
используемые в  
математической  
статистике**

# Гамма-функция

Интегральное представление:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Основное свойство :  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

где  $x$  – любое действительное число.

Частные свойства.

$\Gamma(n+1) = n!$  , где  $n$  - натуральное число.

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \approx 1,77245 \dots$$

$$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi} / 2 \approx 0,88623 \dots$$

## Асимптотика

$$\Gamma(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^x \sqrt{2\pi/x}$$

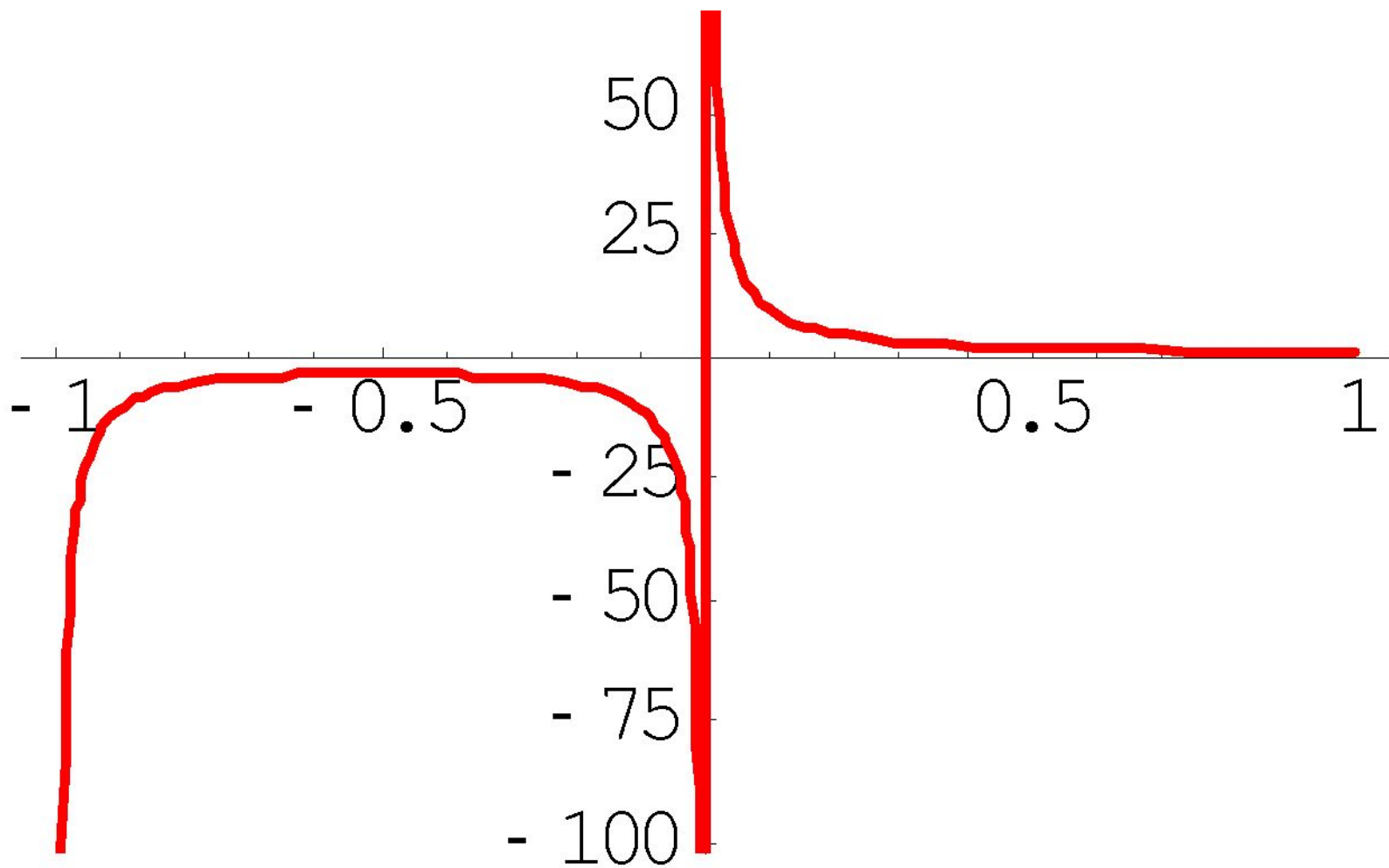


График функции  $\Gamma(x)$ .

Интервал:  $[-1; 1]$ .

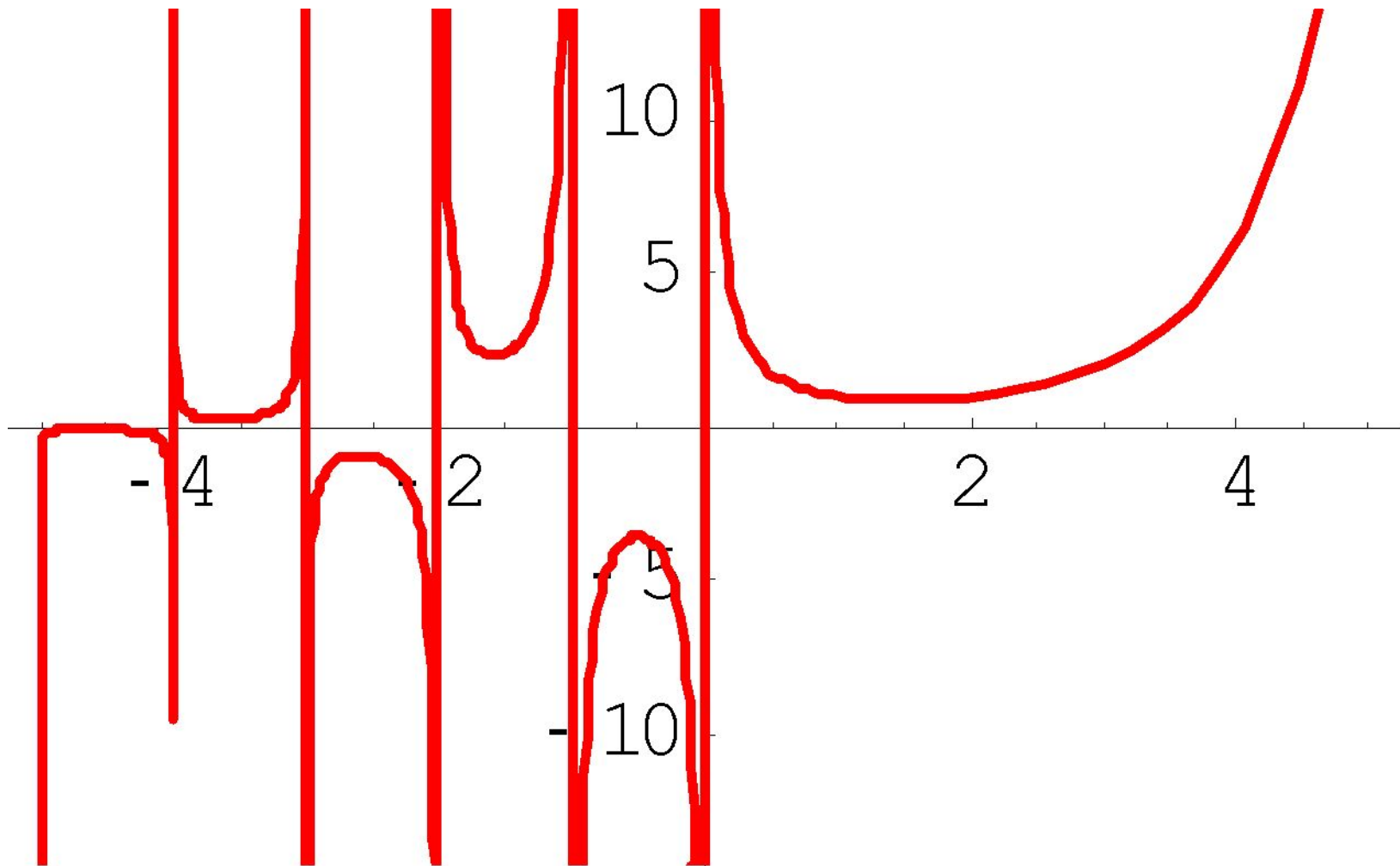


График функции  $\Gamma(x)$ .

Интервал:  $[-5; 5]$ .

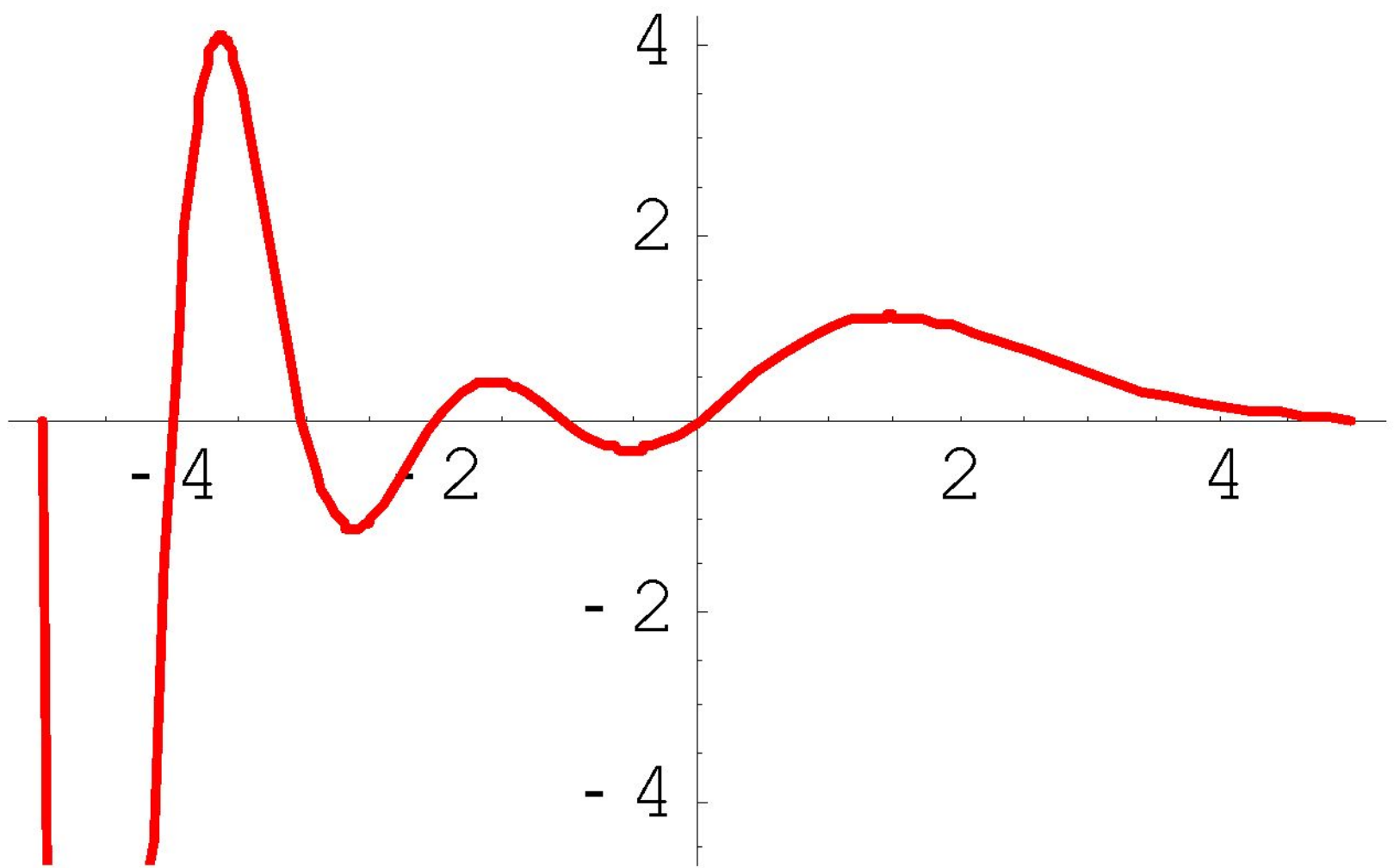
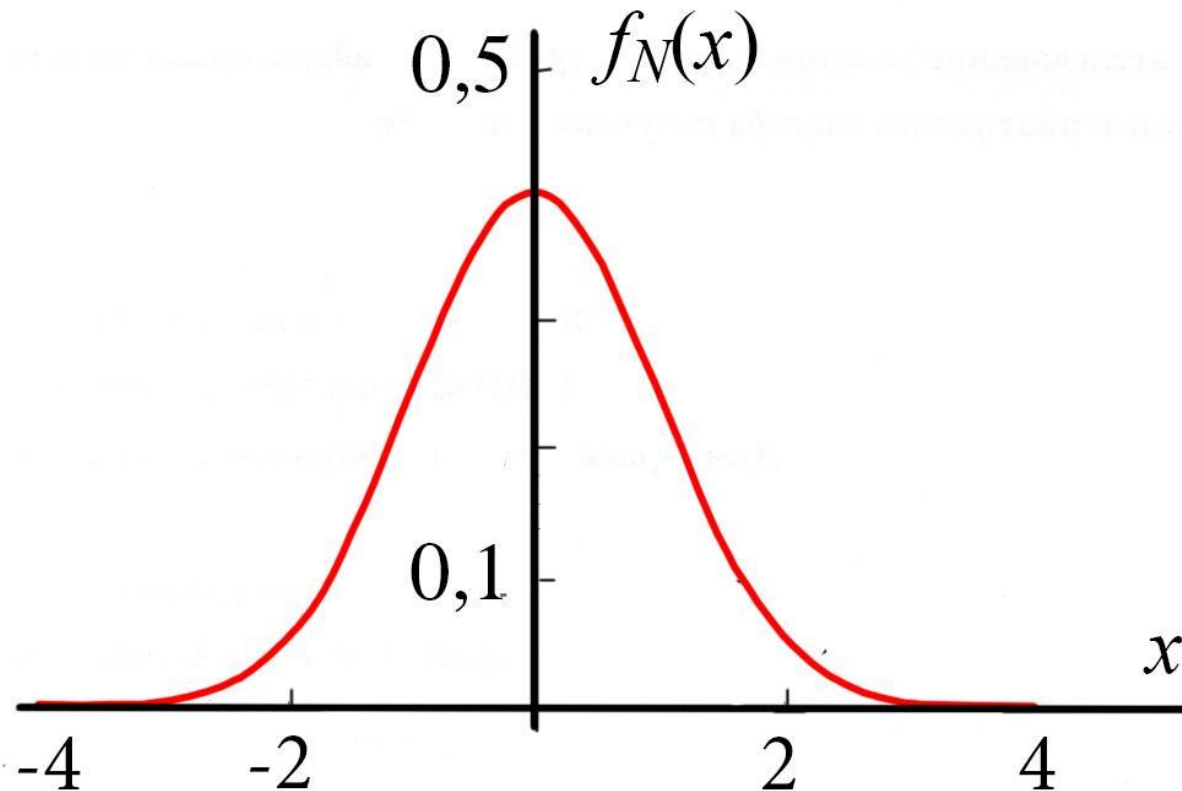


График функции  **$1 / \Gamma(x)$** .

# Нормированная функция Гаусса

$$f_{Gn}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$





# Случайная величина «хи-квадрат»

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i^2$$

где  $\xi_i$  – независимые случайные величины, каждая из которых имеет **нормальное нормированное** распределение вероятностей, имеющее плотность вида

$$f_{Gn}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

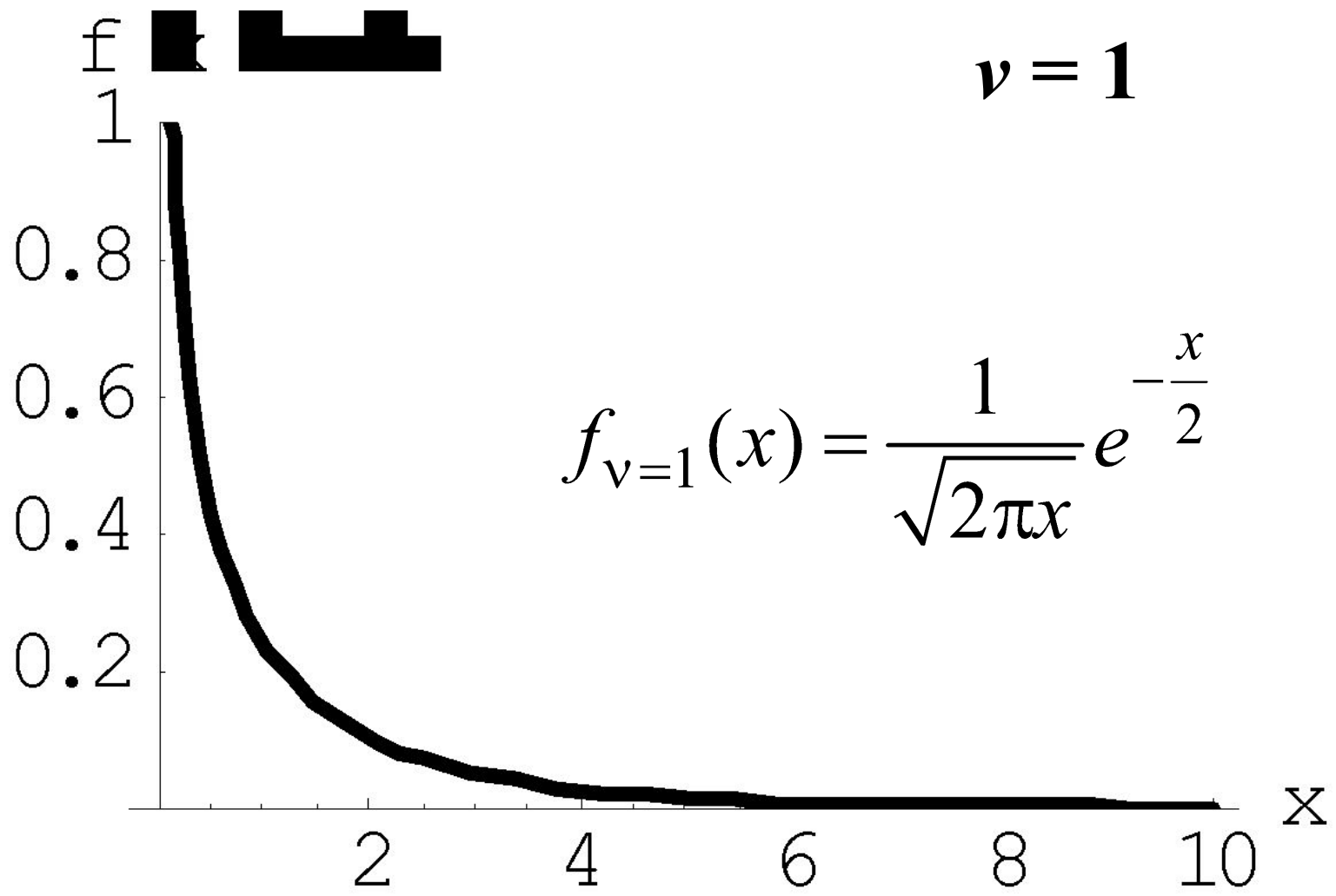
Вид распределения зависит от целочисленного параметра  **$\nu$** , который называется **число степеней свободы** и принимает значения натурального ряда чисел.

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} 2^{-\frac{\nu}{2}} \quad x \geq 0$$

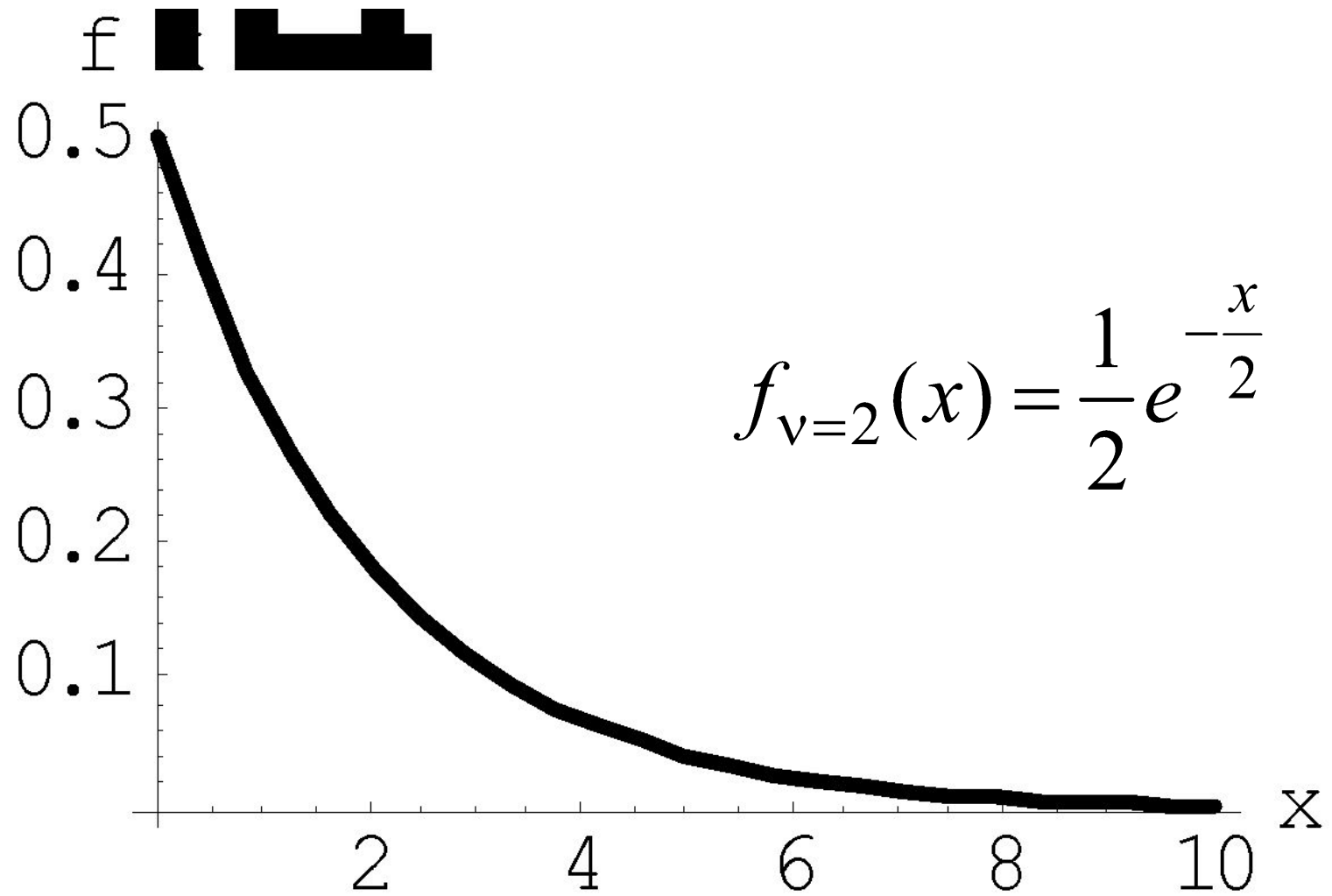
Математическое ожидание и дисперсия

$$M(\chi^2) = \nu$$

$$D(\chi^2) = 2\nu$$

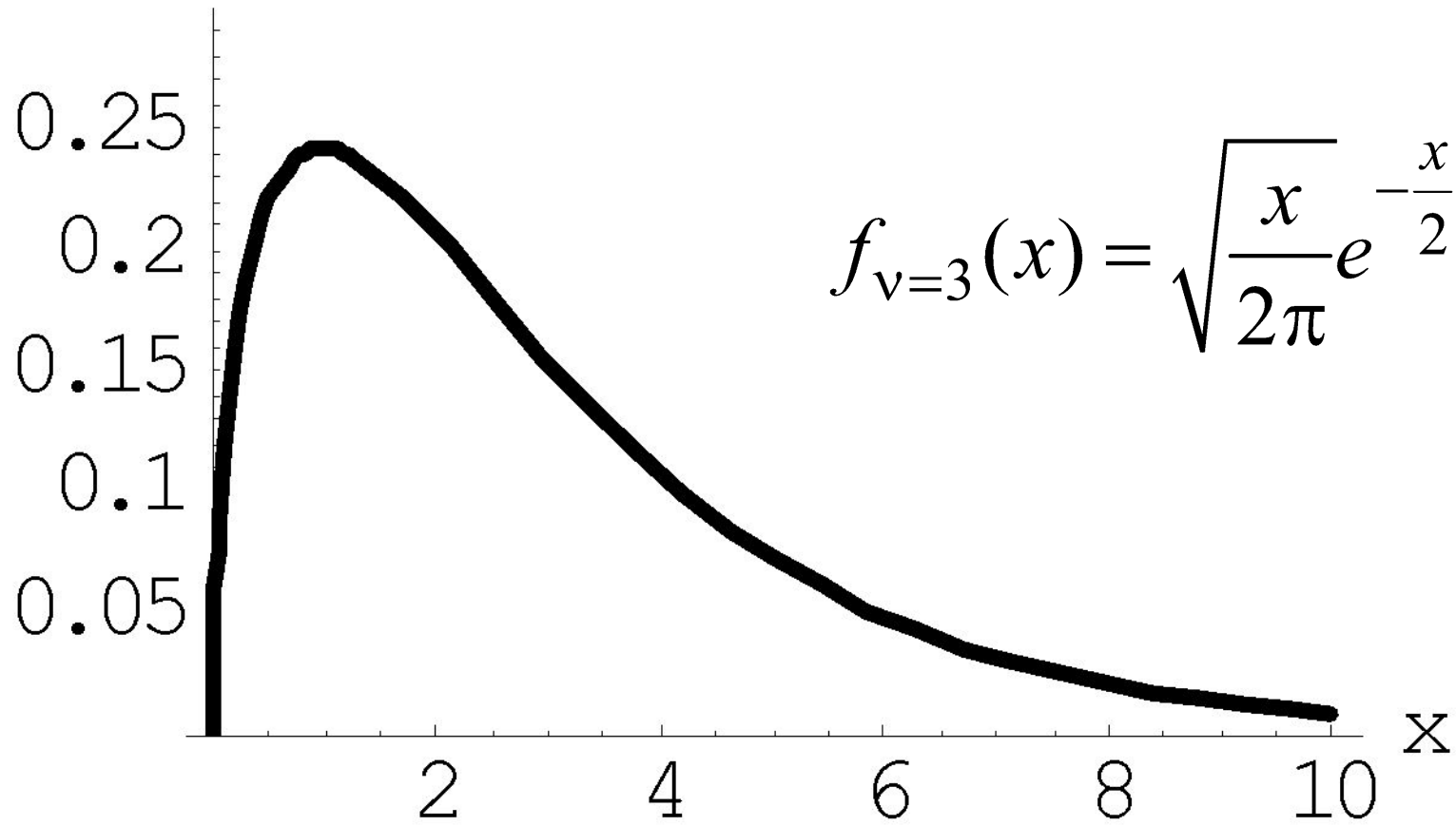


$\nu = 2$

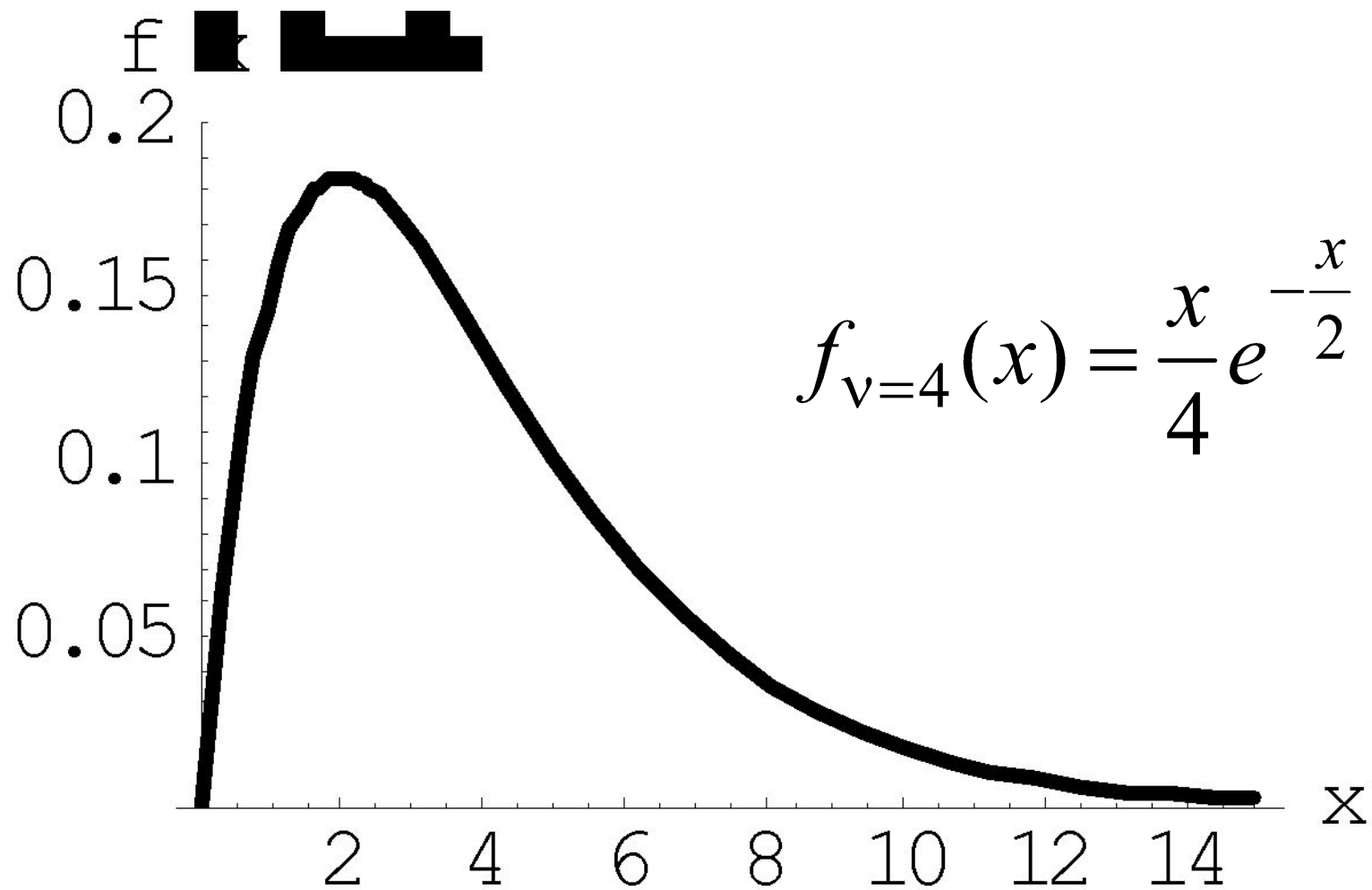


$\nu = 3$

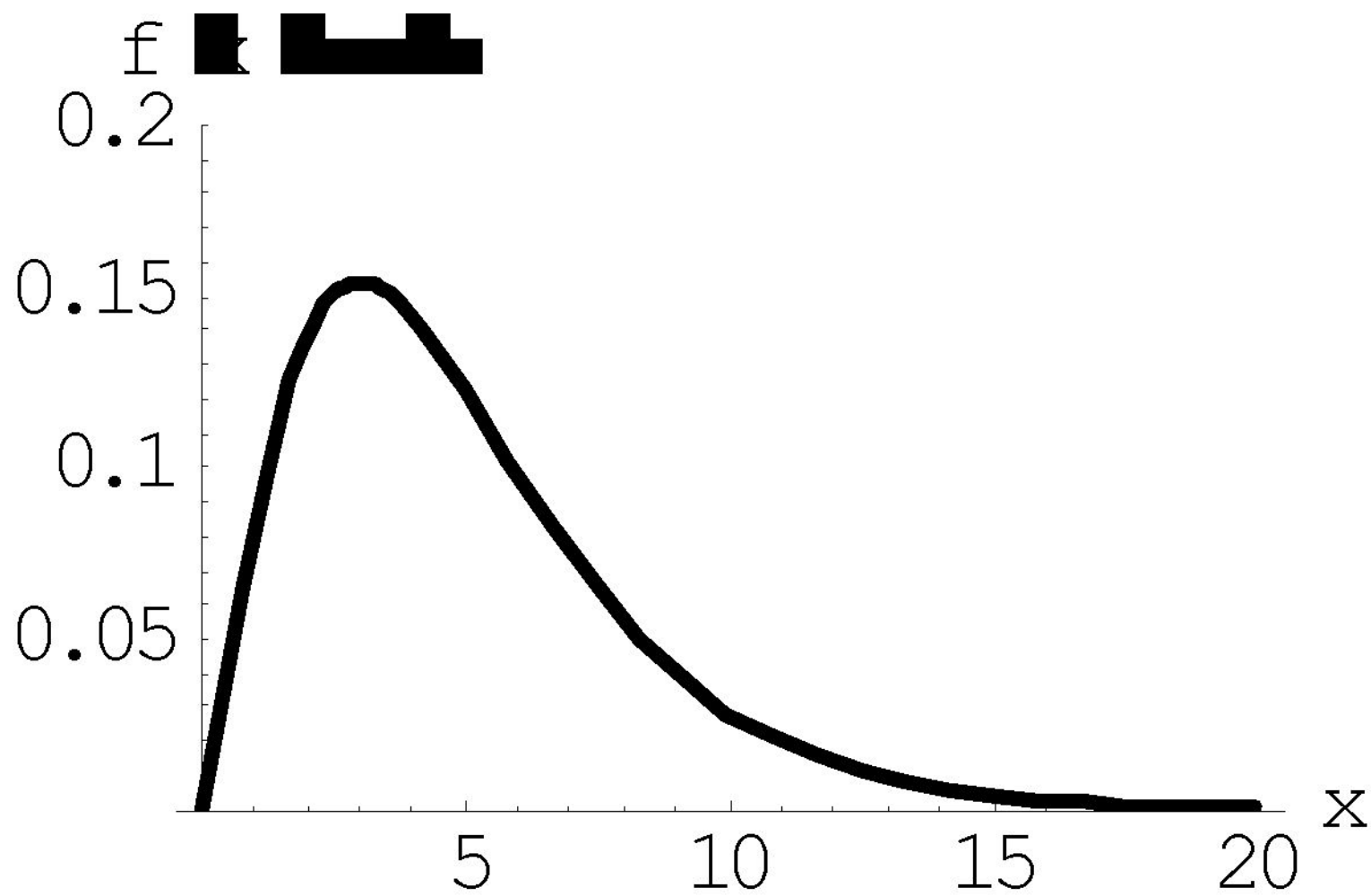
f



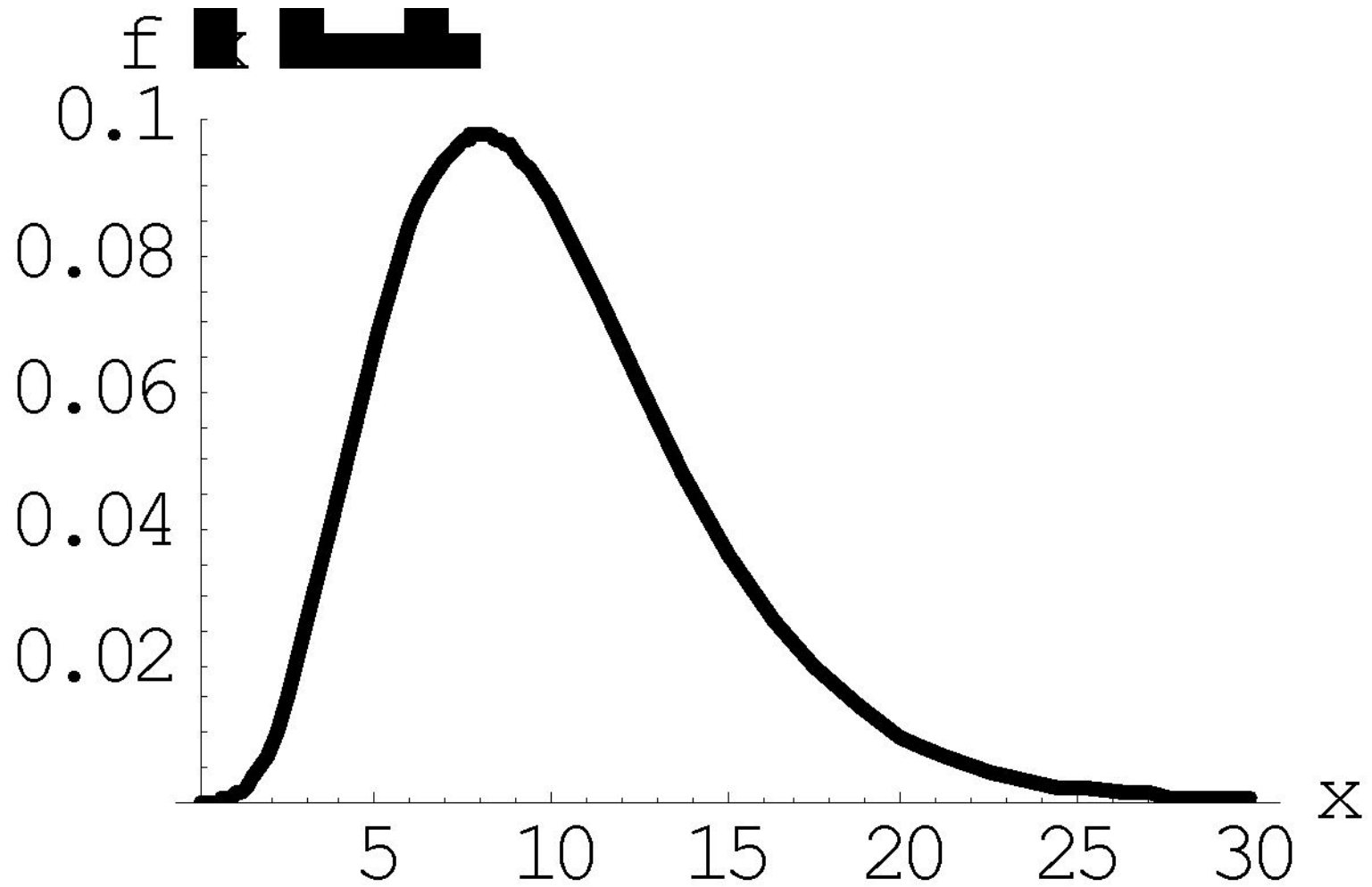
$\nu = 4$



$\nu = 5$

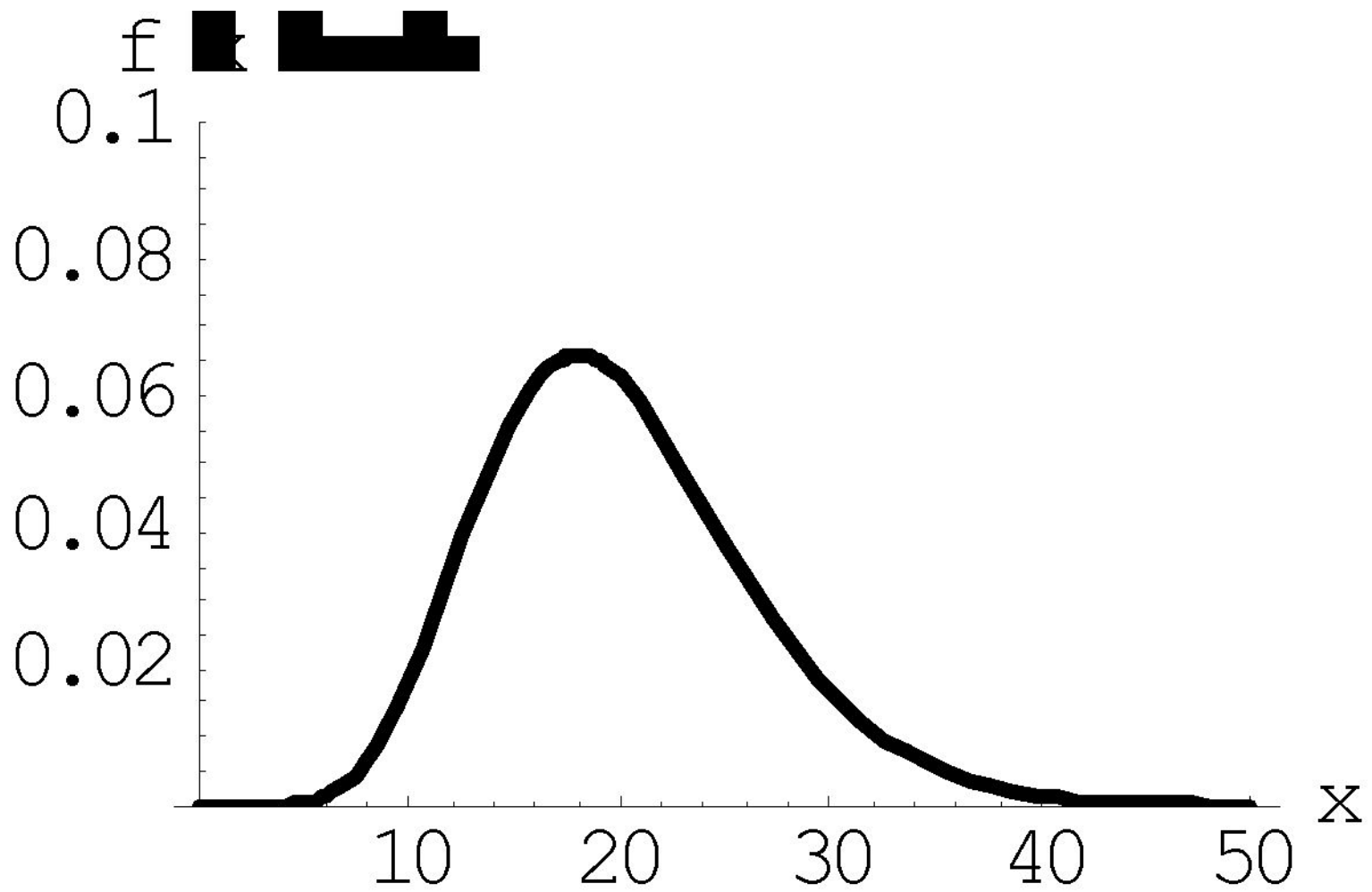


$\nu = 10$

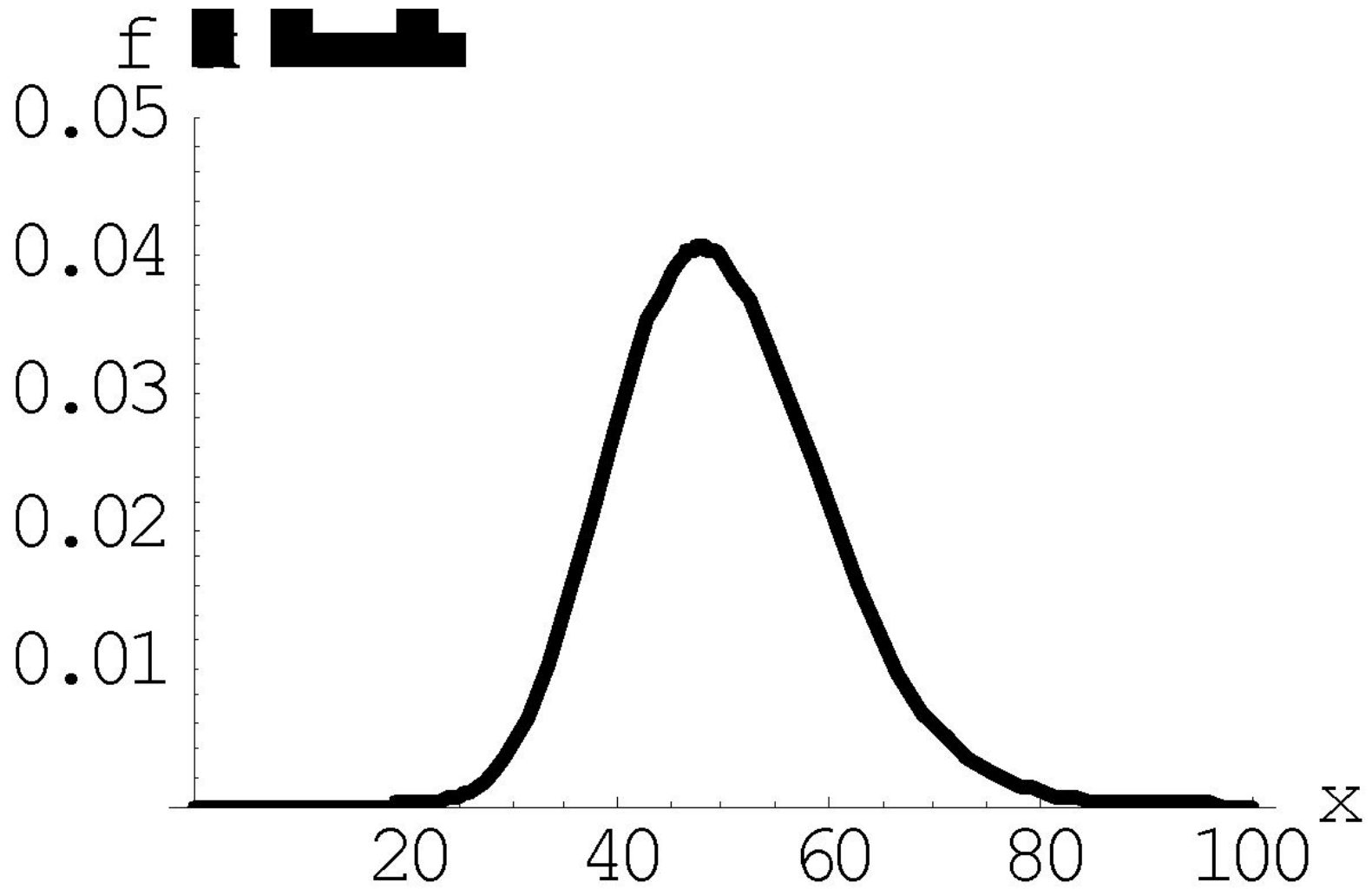




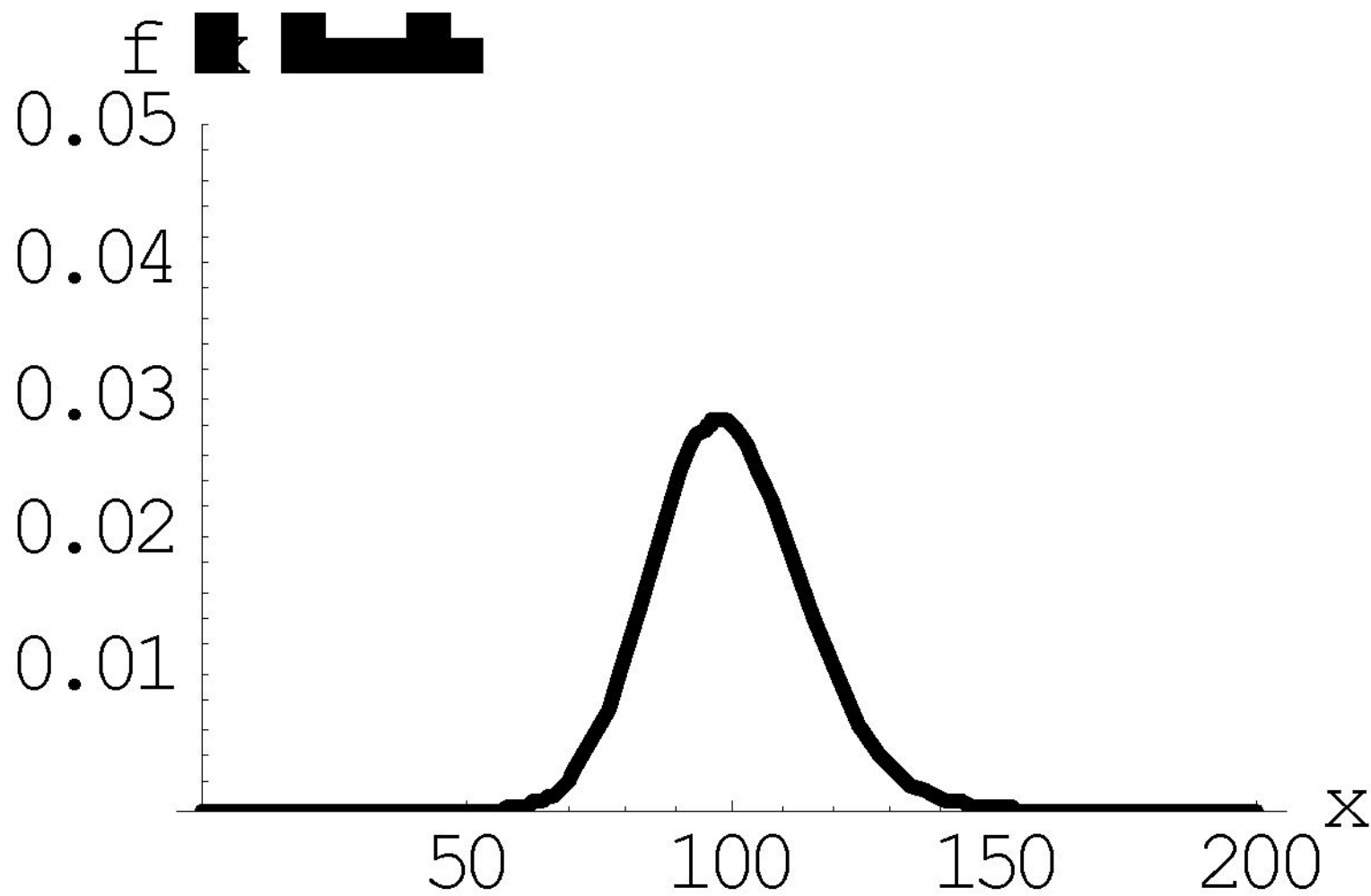
$\nu = 20$



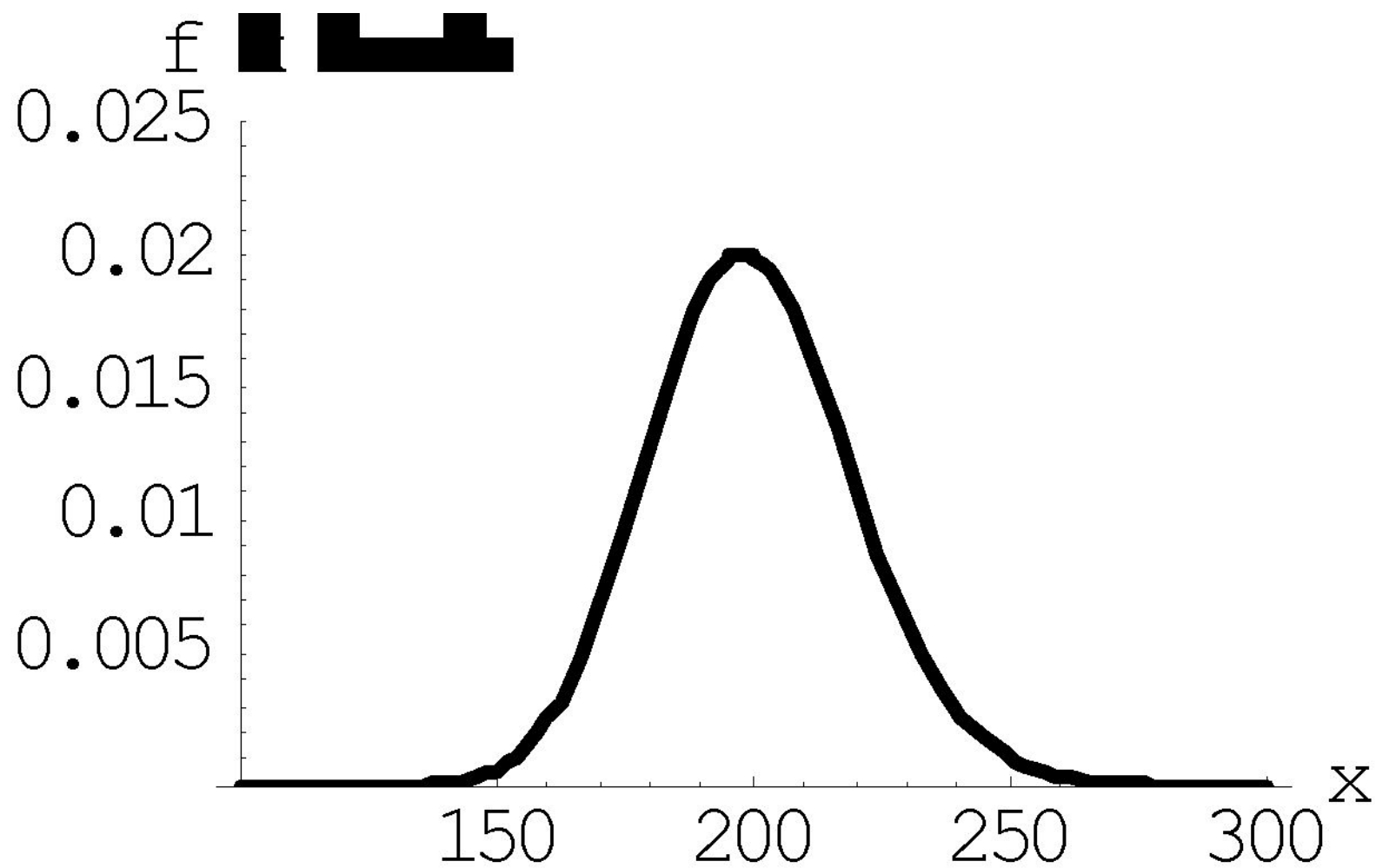
$\nu = 50$



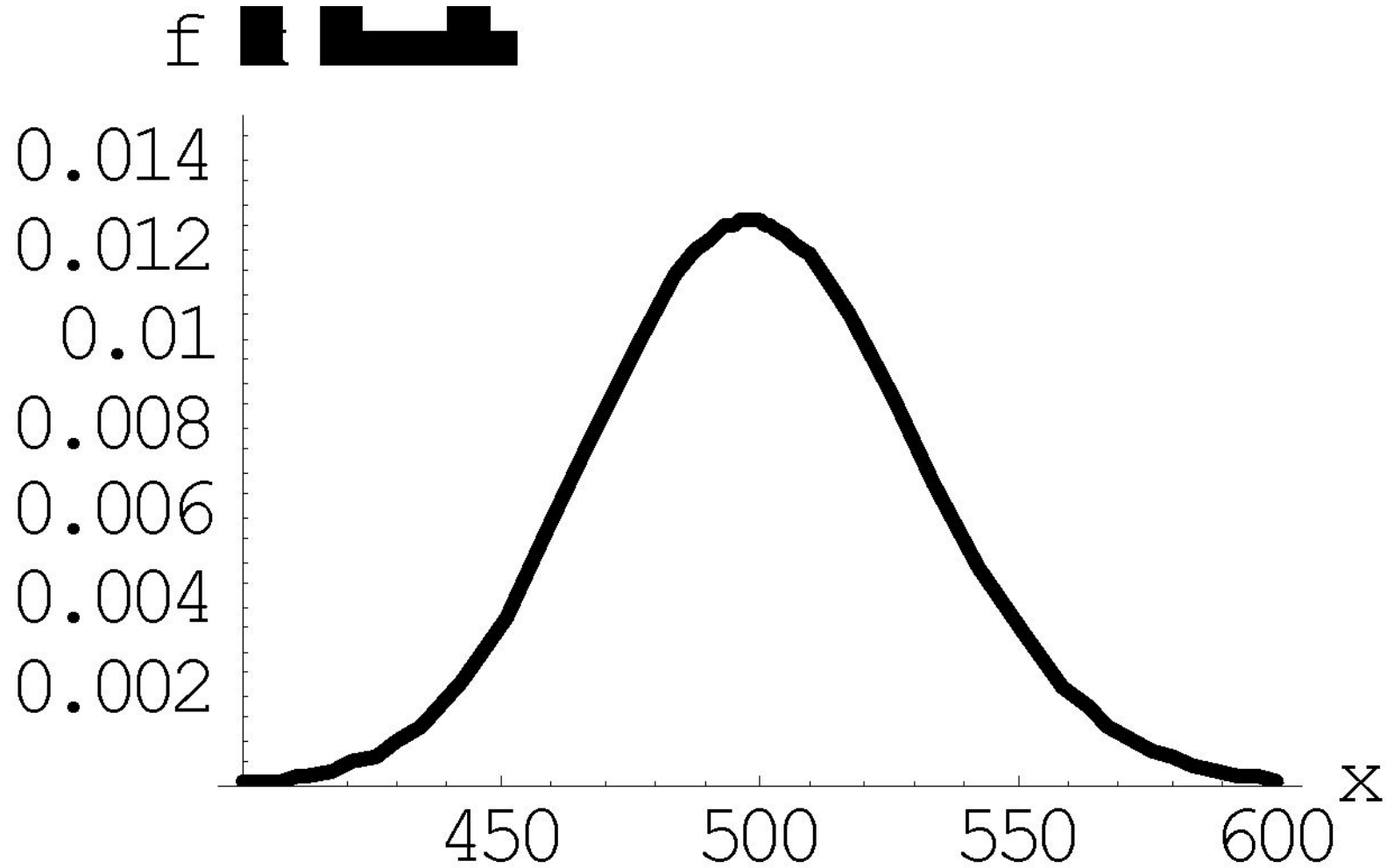
$\nu = 100$



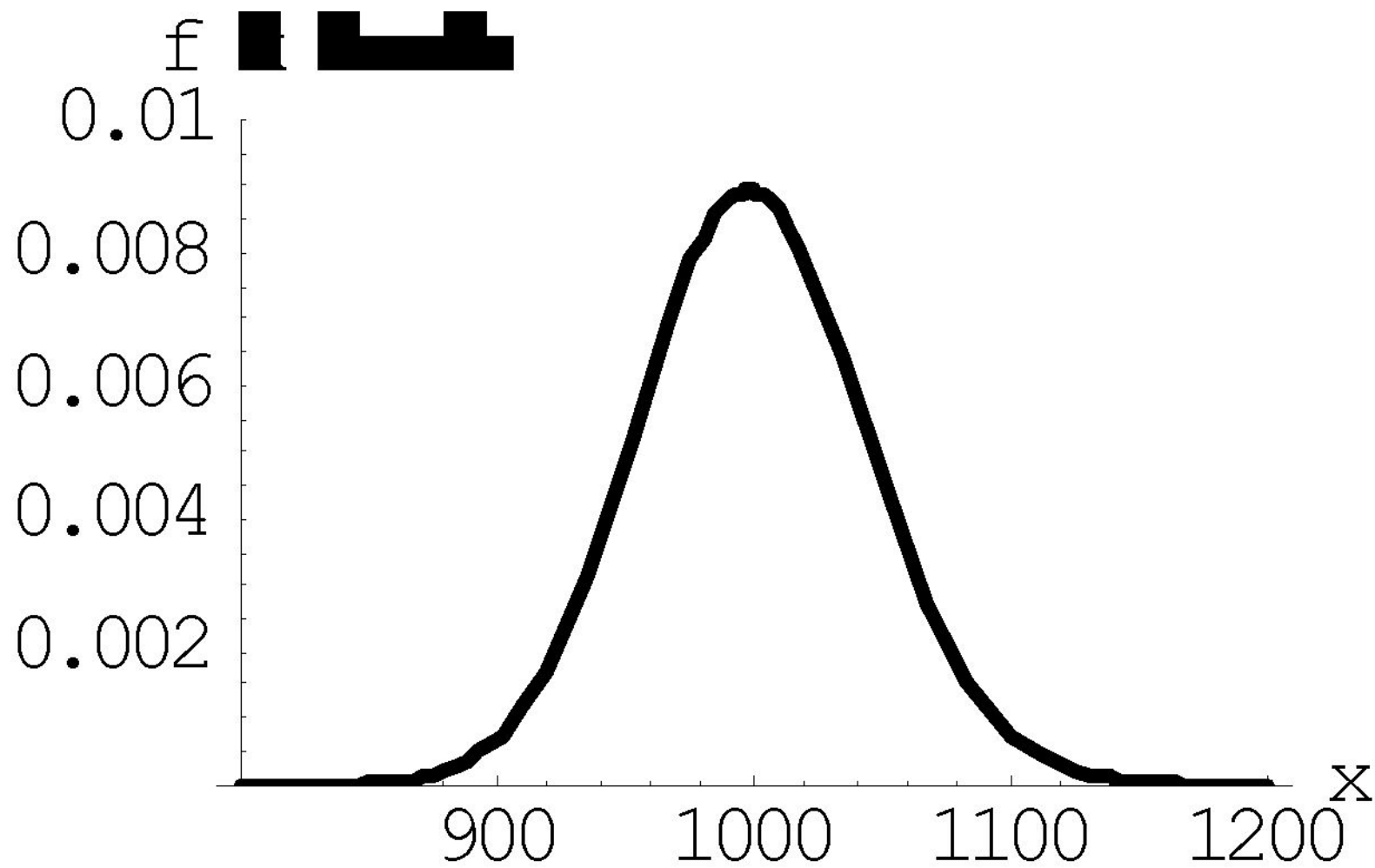
$\nu = 200$



$\nu = 500$



$\nu = 1000$



Случайная величина

$$\frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}$$

при  $\nu \rightarrow \infty$  превращается в **гауссову нормированную** случайную величину.

# Случайная величина Стьюдента

$$T_v = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \xi_i^2}}$$

где все  $(v + 1)$  случайные величины  $\xi_i$  независимы и имеют нормальное нормированное распределение вероятностей.

Параметр  $v$  называется **числом степеней свободы** и принимает значения **натурального ряда чисел**.



## Плотность случайной величины Стьюдента

$$f_{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

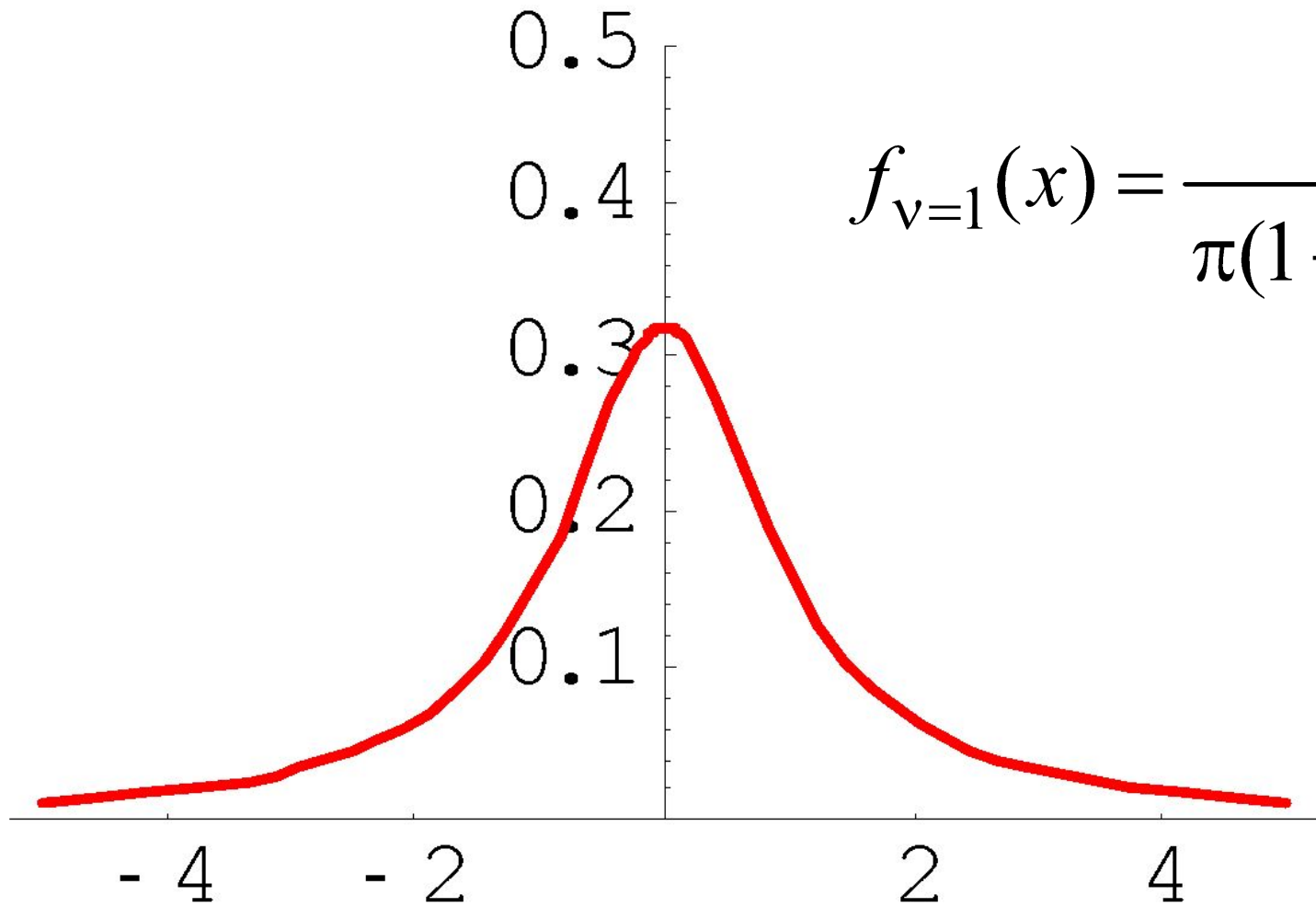
Вид распределения зависит от **числа степеней свободы**

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(T_{\nu}) = 0$$

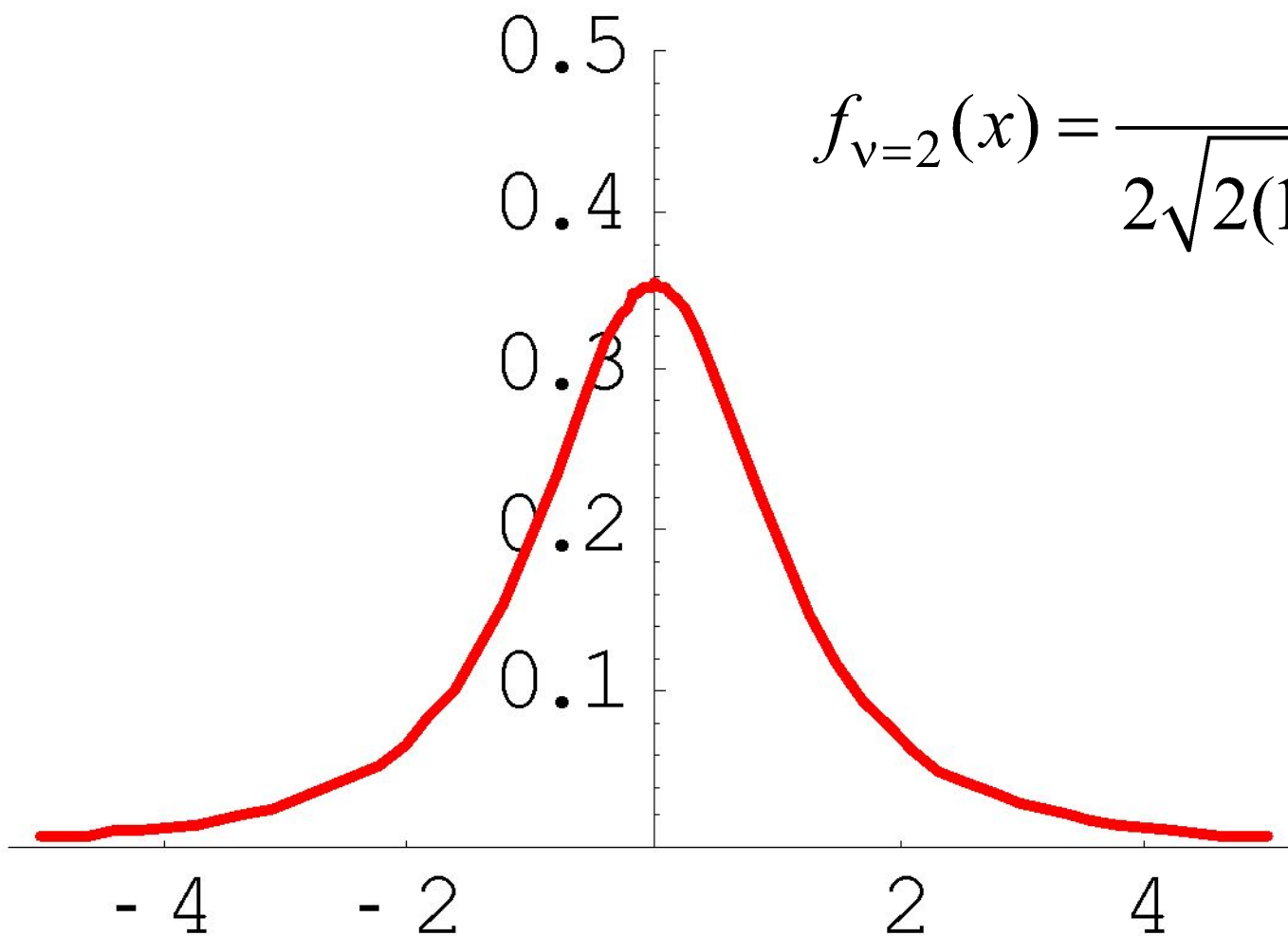
$$D(T_{\nu}) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

**$\nu = 1$**



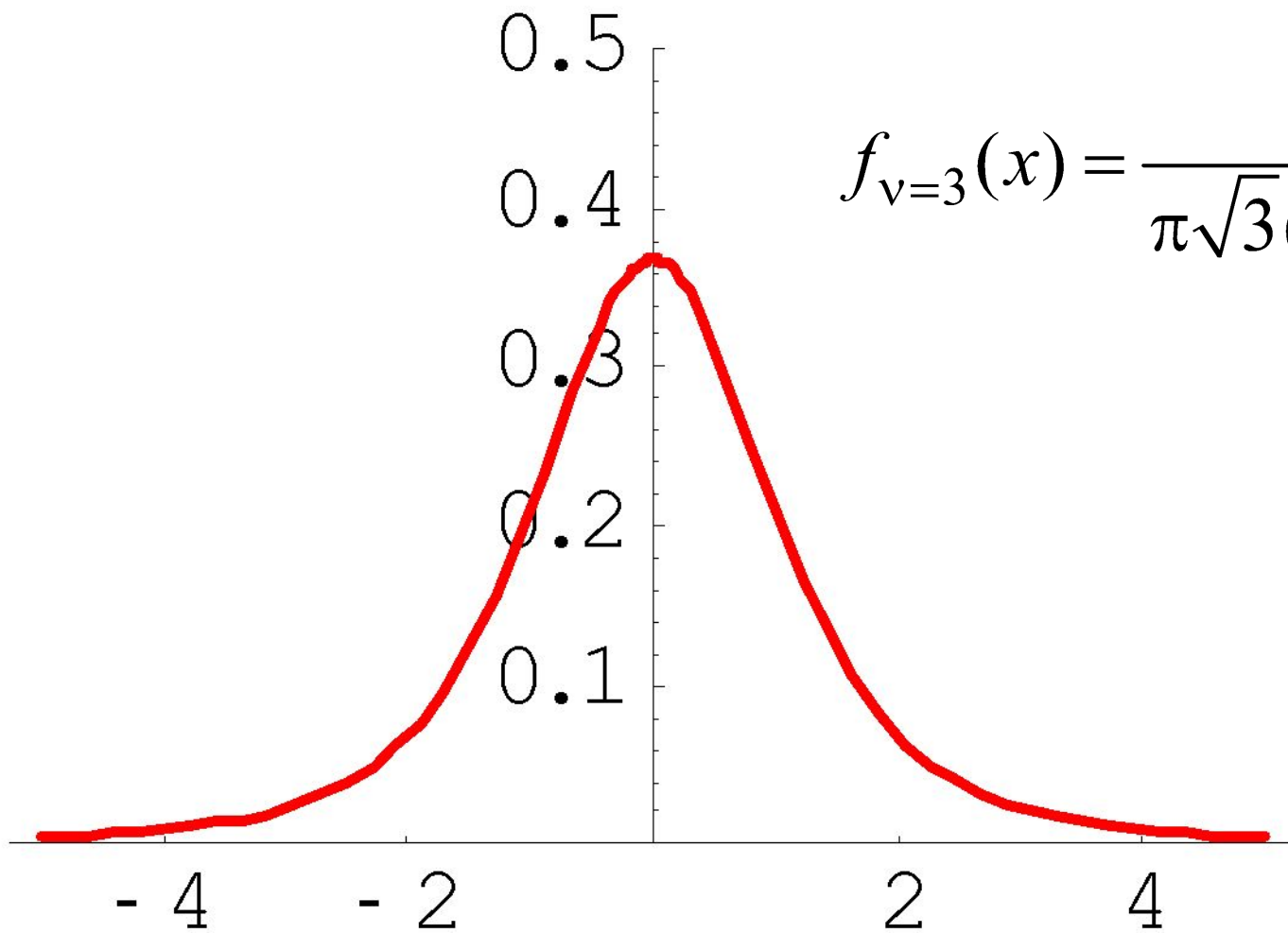
$$f_{\nu=1}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

**$\nu = 2$**



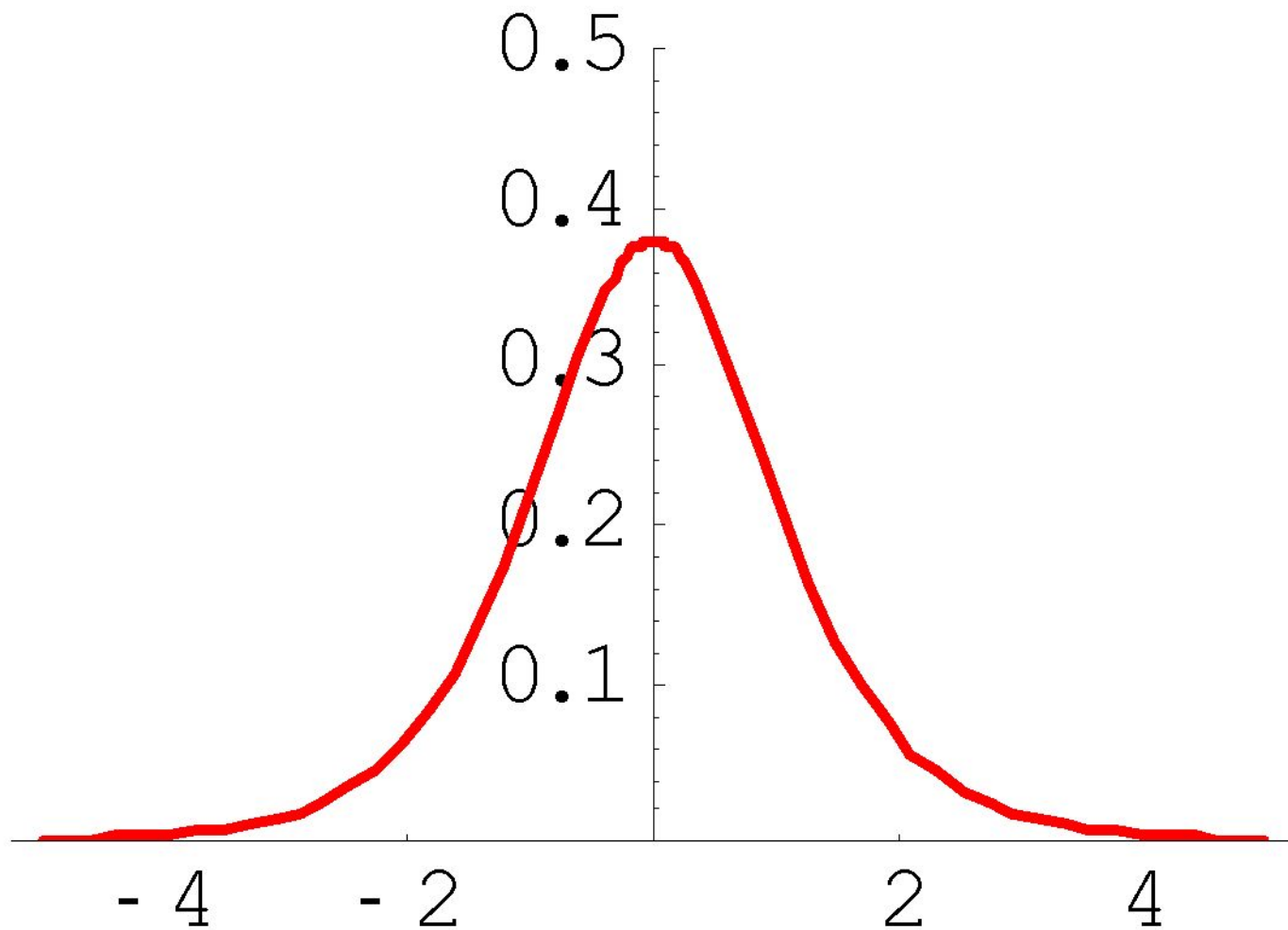
$$f_{\nu=2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+x^2/2)^3}$$

$\nu = 3$

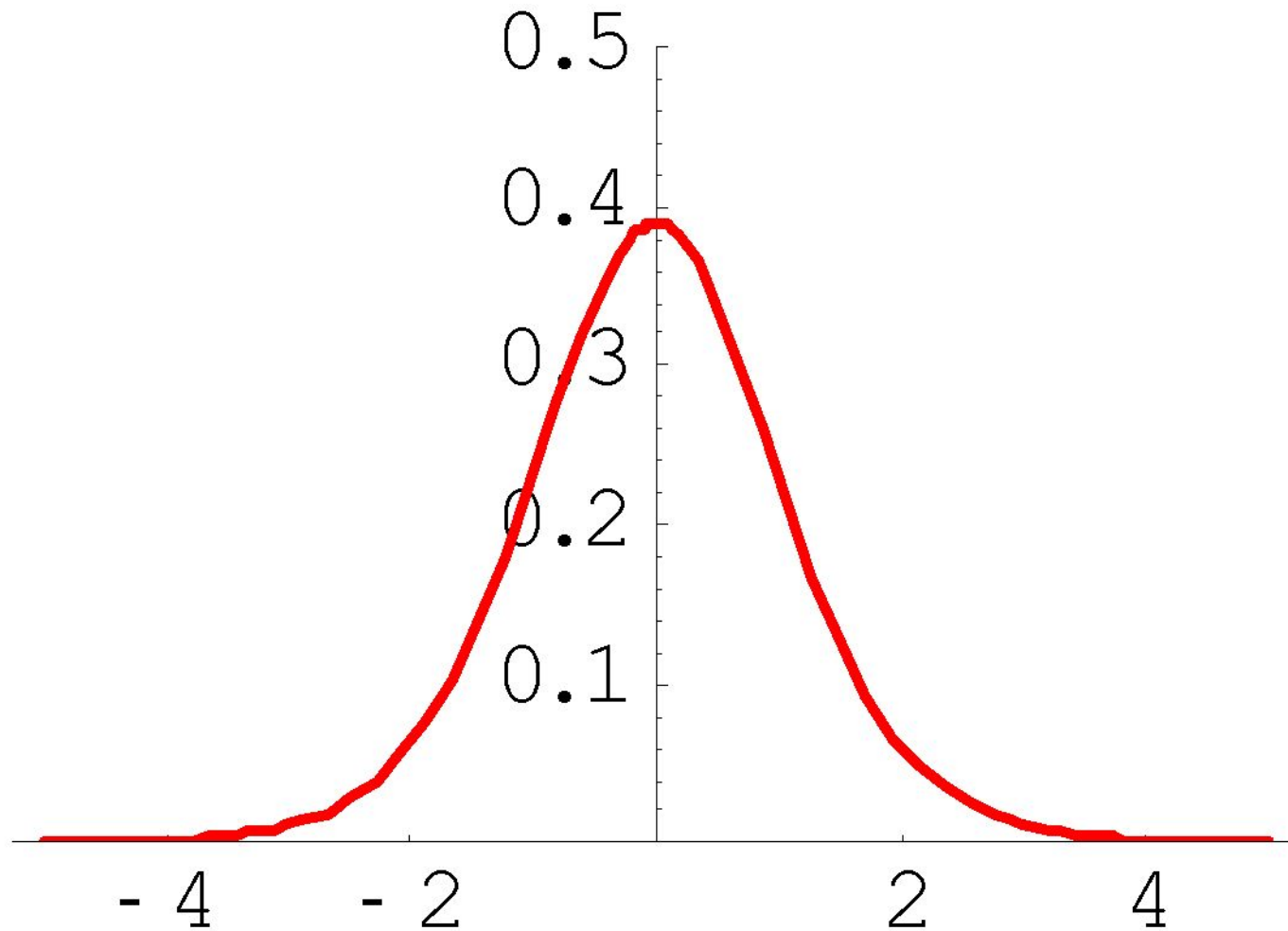


$$f_{\nu=3}(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}(1+x^2/3)^2}$$

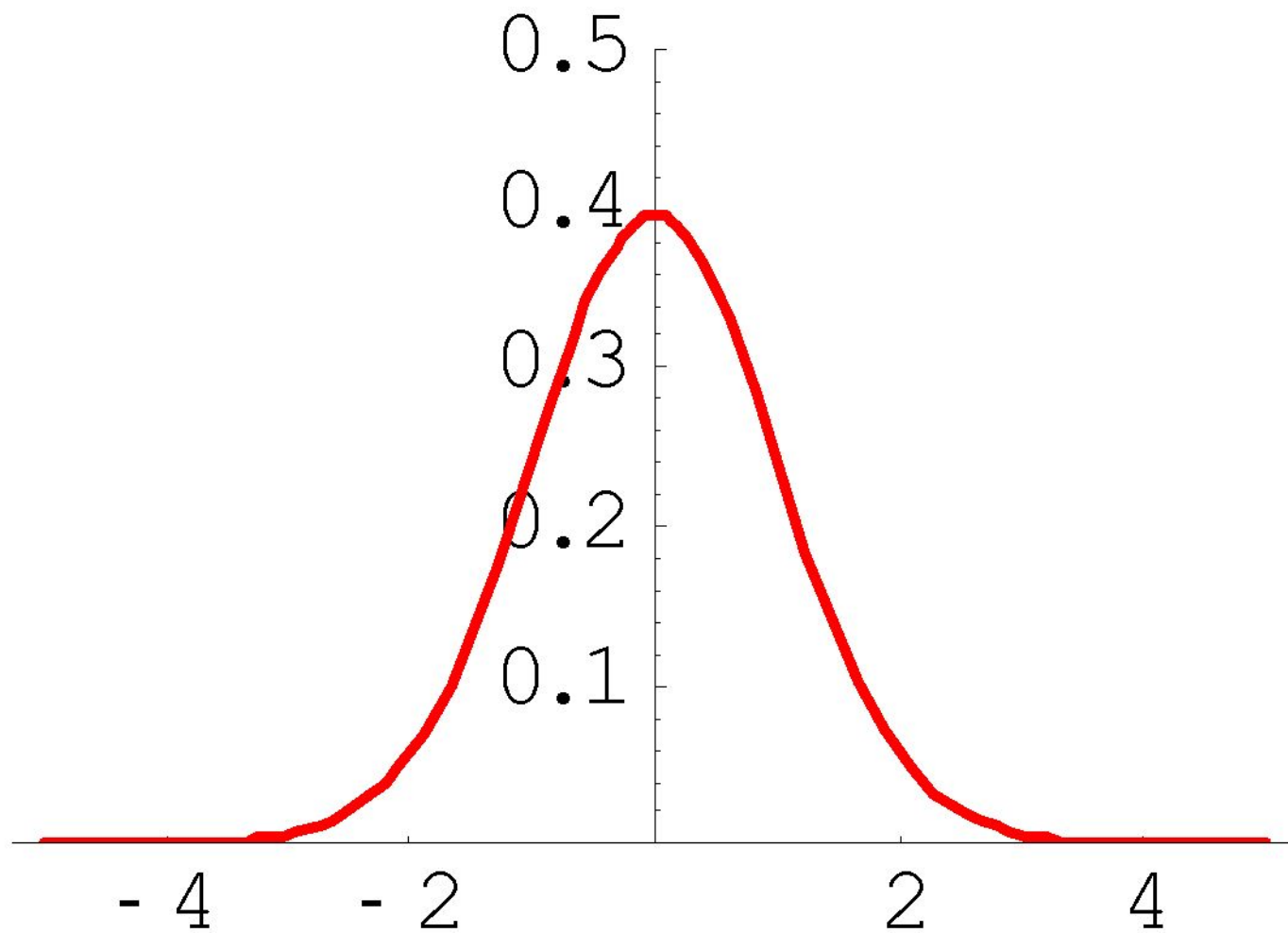
$\nu = 5$



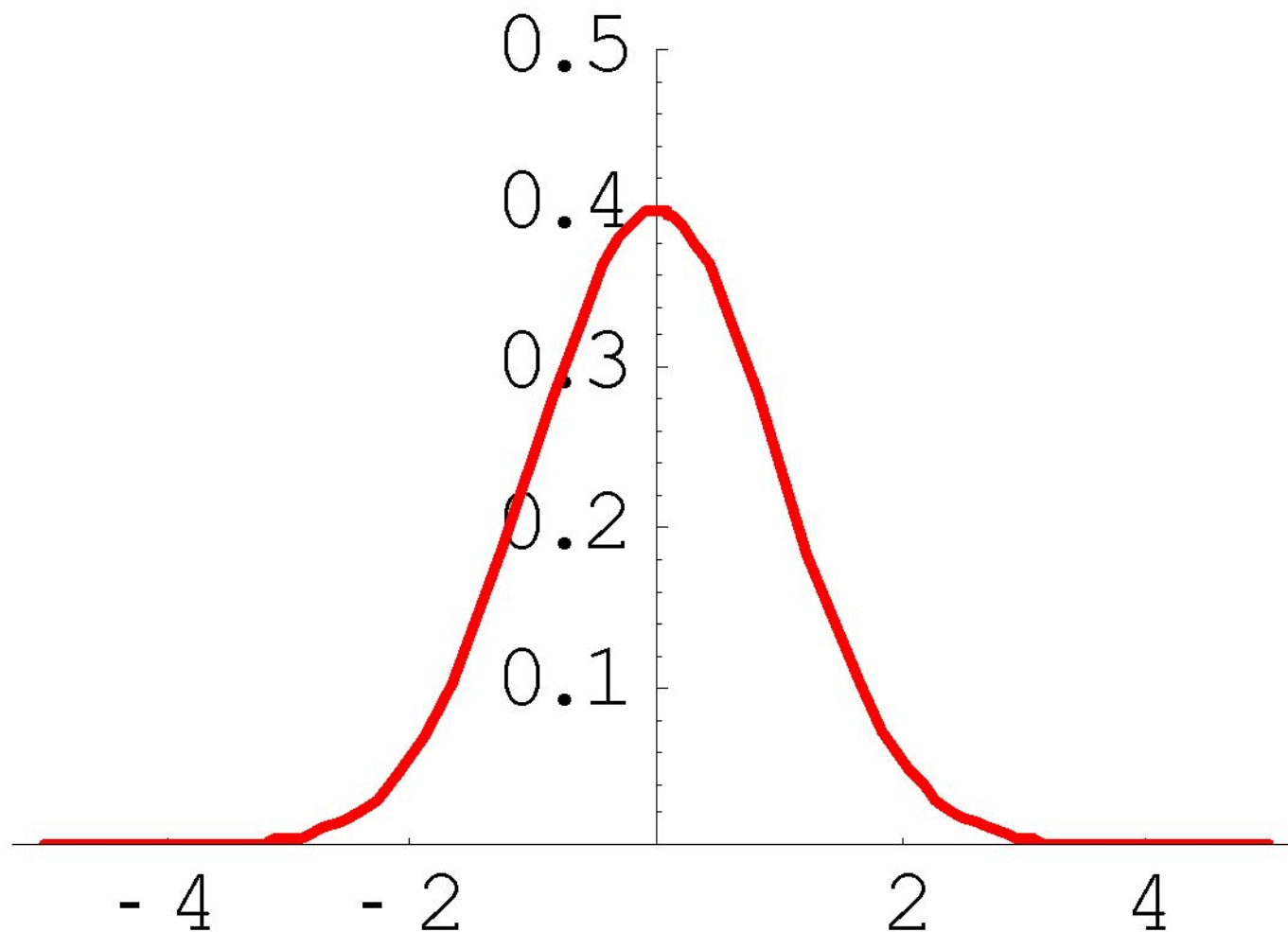
**$\nu = 10$**



**$\nu = 40$**



# Нормированная функция Гаусса





Случайная величина **Стьюдента**

при  $\nu \rightarrow \infty$  превращается в **гауссову**  
**нормированную** случайную величину.