Теоретическая механика

Часть 1
Кинематика

Глава 3. Движение твердой среды

§ 5. Вращательное движение твердой среды

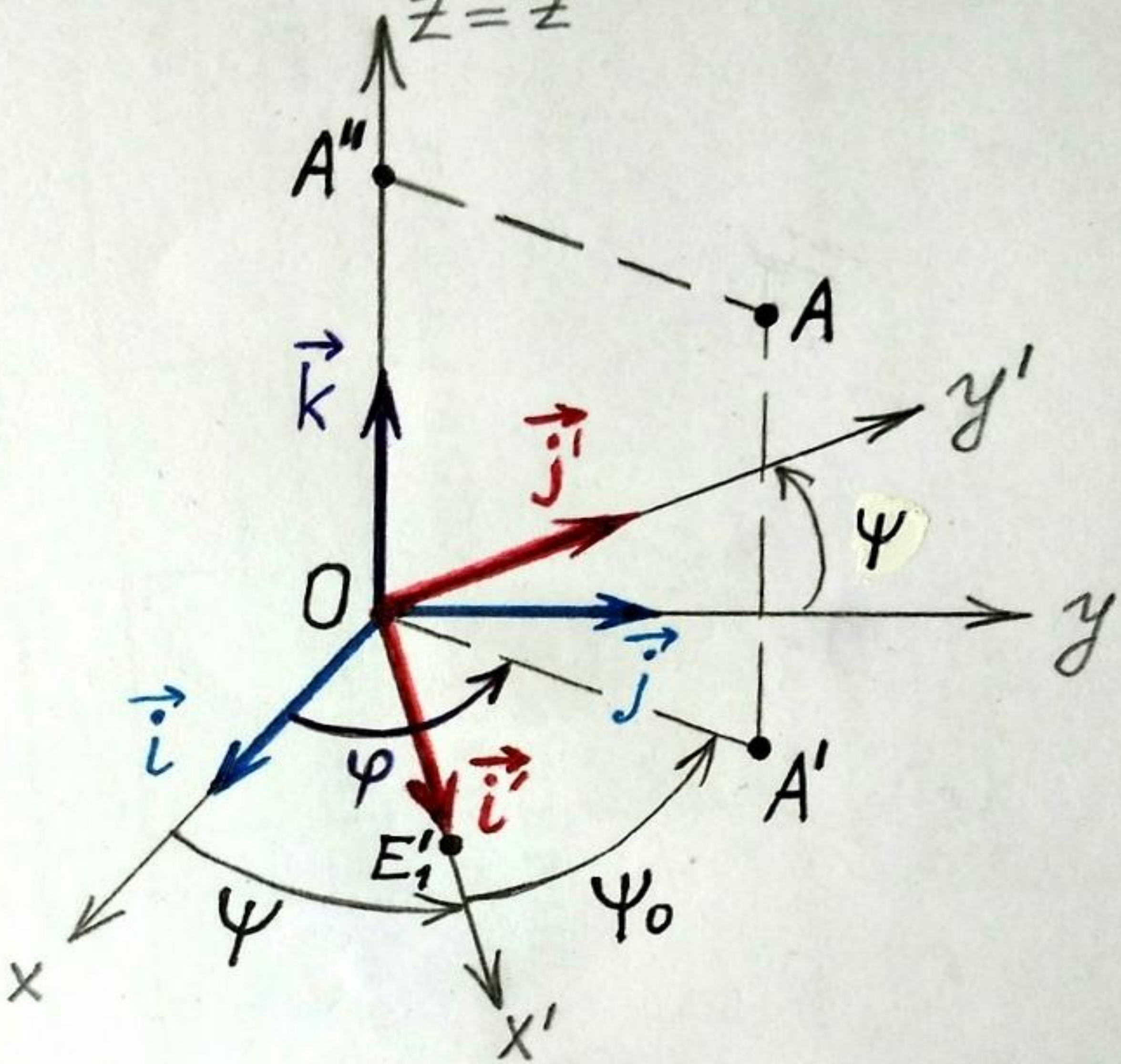
Рассмотрим «неподвижную» декартову систему отсчета $\hat{S}$. Пусть твердая среда Σ движется относительно ДСО $\hat{S}$.

Определение. Если существует прямая $l \subset \Sigma$, все точки которой неподвижны относительно системы $\hat{S}$, то движение твердой среды Σ относительно ДСО $\hat{S}$ называется ***вращательным*** или ***вращением вокруг неподвижной прямой l***.

Прямая l в этом случае называется ***осью вращения*** среды Σ.

Упражнение. Докажите, что, если в среде Σ имеются две различные точки, неподвижные относительно $\hat{S}$, то движение среды Σ является вращением вокруг неподвижной прямой, проходящей через эти две точки.

Рассмотрим другую ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, неподвижную относительно ДСО $\hat{S}$, такую, что точки O и E_3 лежат на неподвижной прямой $l \subset \Sigma$. «Подвижную» систему $S' = (O', E_1', E_2', E_3')$ (жестко связанную со средой Σ) выберем так, чтобы $O' = O$ и $E_3' = E_3$ (это возможно в силу того, что $O, E_3 \in l \subset \Sigma$). Тогда оси Oz и Oz' будут совпадать друг с другом и с осью вращения l.



Z = Z'
A''
A
y'
j'
Ψ
O
y
j
i
φ
i'
A'
E'1
Ψ
Ψ0
x
x'
k

Заметим, что векторы $\vec{i}=\overrightarrow{OE_1}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OE_2}$, $\vec{i}\,'=\overrightarrow{OE_1'}$, $\vec{j}\,'=\overrightarrow{OE_2'}$ компланарны, $\vec{k}\,'=\overrightarrow{OE_3}=\vec{k}$, а положение системы S' определяется направленным углом $\psi=\angle(\vec{i},\vec{i}\,')_{напр}=\angle(\vec{j},\vec{j}\,')_{напр}$.

Пусть точка $A\in\Sigma$, A' – проекция точки A на «подвижную» плоскость $Ox'y'\subset\Sigma$ системы S', A'' – проекция точки A на ось $Oz\subset\Sigma$, φ – направленный угол между векторами $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OA'}$, ψ_0 – направленный угол между векторами $\vec{i}\,'=\overrightarrow{OE_1'}$ и $\overrightarrow{OA'}$ (см. рис.). Заметим, что $\psi_0=const$, $\rho:=|OA'|=const$ и координата z точки A тоже постоянна (в силу того, что точки $O, E_1', A, A', A''\in\Sigma$).

Тогда верно равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA''}$, которое, при переходе к соответствующим координатным векторам (в системе S), приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''}. \tag{5.1}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z:

$$e_\rho = \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

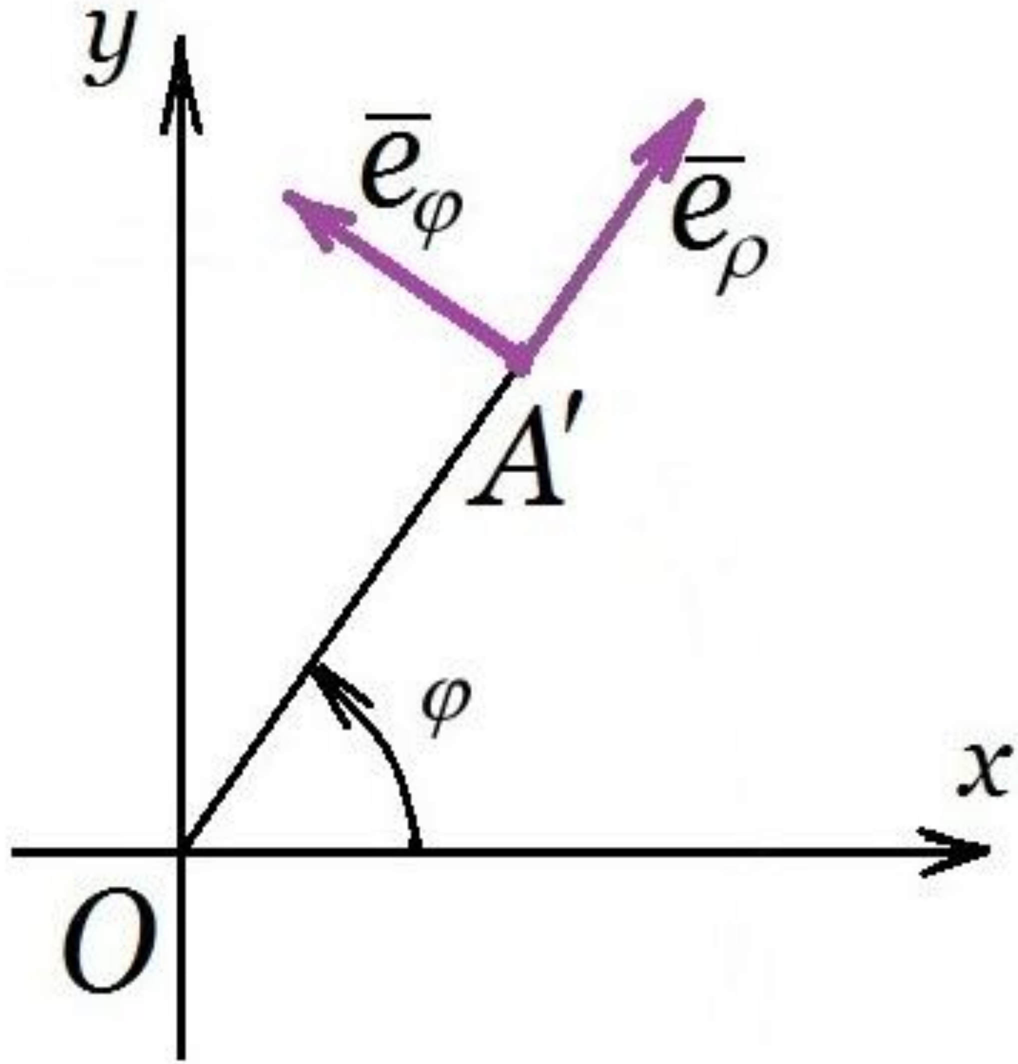
тогда $r_{OA'} = \rho e_\rho$, $r_{OA''} = z e_z$. Следовательно, в силу (5.1),

$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + z e_z. \tag{5.2}$$

Так как ρ, z, e_z не зависят от времени, скорость точки A

$$v = \dot{r} = \rho\dot{\varphi} e_\varphi = \rho\omega e_\varphi, \tag{5.3}$$

где $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.



y
$\bar{e}_\varphi$
$\bar{e}_\rho$
A'
φ
x
O

Отметим, что угловая скорость $\omega = \dot{\varphi}$ одинакова для всех точек среды Σ, поскольку полярные углы ее точек отличаются друг от друга на константы: $\varphi = \psi + \psi_0 \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = \dot{\psi}$, а угол $\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}\,')_{напр}$ не зависит от точки среды.

Определим ***вектор угловой скорости*** Ω среды Σ относительно S равенством

$$\Omega = \omega e_z.$$

Тогда, в силу (5.2) и (5.3), скорость точки A

$$v = \dot{r} = \rho\dot{\varphi}e_\varphi = \rho\omega e_\varphi = \rho\omega(e_z \times e_\rho) = (\omega e_z)\times(\rho e_\rho + z e_z) = \Omega \times r.$$

Итак, для любой точки $A \in \Sigma$ верно равенство

$$v = \Omega \times r.$$

В рассматриваемой ситуации вектор $\vec{\Omega}$ параллелен оси вращения l, однако его величина и направление, задаваемые функцией ω, могут изменяться.

Отметим, что с конца этого вектора вращение кажется происходящим против часовой стрелки (т.е. оно совпадает с $\vec{e}_z$ при $\dot{\varphi} \geq 0$ и с $(-\vec{e}_z)$ в противном случае). Ниже будет доказана теорема Эйлера, устанавливающая существование вектора мгновенной угловой скорости в случае произвольного движения твердой среды.

§ 6. Две леммы о матрицах

Лемма 6.1. Если матрица $B = B(t)$ ортогональна при $\forall t$, то матрица $\dot{B}B^T = \dot{B}B^{-1}$ является кососимметрической при $\forall t$, то есть в каждый момент времени t

$$(\dot{B}B^T)^T = -\dot{B}B^T. \tag{6.1}$$

Доказательство. Продифференцировав по времени t тождество

$$I = BB^T,$$

получим:

$$0 = \dot{B}B^T + B\dot{B}^T = \dot{B}B^T + (\dot{B}B^T)^T.$$

Отсюда следует (6.1). Лемма доказана.

Лемма 6.2. Если M – кососимметрическая матрица размера 3×3, то существует и единственен такой вектор $\Omega\in\mathbb{R}^3$, что равенство

$$Mq=\Omega\times q \tag{6.2}$$

выполняется для любого вектора $q\in\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Кососимметрическую матрицу M можно записать в виде:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого вектора $q = (q_1, q_2, q_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$$Mq = \begin{pmatrix} aq_2 + bq_3 \\ -aq_1 + cq_3 \\ -bq_1 - cq_2 \end{pmatrix}.$$

По определению векторного произведения, для векторов $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ и $q = (q_1, q_2, q_3)^T$ имеем :

$$\Omega \times q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2 \\ \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3 \\ \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1 \end{pmatrix}$$

(с учетом того, что

$i = (1, 0, 0)^T$, $j = (0, 1, 0)^T$, $k = (0, 0, 1)^T$).

Для нахождения вектора Ω приравниваем правые части последних двух равенств:

$$\begin{pmatrix} aq_2 + bq_3 \\ -aq_1 + cq_3 \\ -bq_1 - cq_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2 \\ \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3 \\ \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1 \end{pmatrix}. \qquad (6.3)$$

Далее рассматриваем последовательно три случая : 1) $q = i = (1, 0, 0)^T$, 2) $q = j = (0, 1, 0)^T$, 3) $q = k = (0, 0, 1)^T$. Подставляя эти значения вектора q в равенство (6.3), получаем следующие однозначно определенные значения координат вектора Ω:

Подставляя эти значения вектора q в равенство (6.3), получаем следующие однозначно определенные значения координат вектора Ω:

$$\omega_3 = -a,\ \omega_2 = b,\ \omega_1 = -c\,.$$

Итак, $\Omega = (-c,\ b,\ -a)^T$ и $Mq = \Omega \times q$ для любого $q \in \mathbb{R}^3$, причем вектор Ω определен однозначно.

Лемма доказана.

§ 7. Теорема Эйлера о скоростях точек твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и «подвижную» $S'=(O',E_1',E_2',E_3')$, жестко связанную со средой Σ (то есть твердая среда Σ неподвижна относительно ДСО S').

И пусть D – матрица перехода от S к S'.

Рассмотрим две точки $A, B \in \Sigma$. Арифметический вектор $r_{AB} = r_{OB} - r_{OA}$ – это координатное представление геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ в системе S, векторы $v_A = \dot{r}_{OA}$ и $v_B = \dot{r}_{OB}$ – скорости точек A и B в системе S, вектор $v_{AB} = \dot{r}_{AB} = \dot{r}_{OB} - \dot{r}_{OA} = v_B - v_A$ – скорость направленного отрезка $\overline{AB}$ в S. Заметим также, что $D^T r_{AB} = r'_{AB} = const$ (r'_{AB} – координатное представление вектора $\overrightarrow{AB}$ в системе S').

Теорема (Эйлера). В каждый момент времени t существует и единственен такой вектор $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3$, что для любых точек $A, B \in \Sigma$ имеет место равенство

$$v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}.$$

При этом $(\forall t)\,(\forall q \in \mathbb{R}^3)\,[\,\dot{D}D^T q = \Omega \times q\,]$.

Замечание. Равенство $v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}$ равносильно равенству $v_{AB} = \Omega \times r_{AB}$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$(\forall t)(\exists \text{ единственный } \Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3)(\forall q \in \mathbb{R}^3)[\,\dot{D}D^T q = \Omega \times q\,].$$

В силу леммы 6.1, при $\forall t$ матрица $M = \dot{D}D^T$ является кососимметрической. Тогда, в силу леммы 6.2, при $\forall t$ для матрицы $M = \dot{D}D^T$ $(\exists$ единственный $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3)$

$$(\forall q \in \mathbb{R}^3)[\,\dot{D}D^T q = Mq = \Omega \times q\,].$$

Второе предложение доказано. Докажем первое предложение.

Фиксируем произвольный момент времени t и возьмем две произвольные точки $A, B \in \Sigma$. Пусть $q = r_{AB}$. Тогда из доказанного выше, учитывая, что $DD^T = I$ и $D^T r_{AB} = r'_{AB} = const$, получаем:

$$v_{AB} = \dot{r}_{AB} = \frac{d}{dt}(DD^T r_{AB}) = \dot{D}(D^T r_{AB}) = (\dot{D}D^T) r_{AB} = \Omega \times r_{AB},$$

или, что равносильно, $v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}$. При этом вектор $\Omega(t)$ не зависит от точек $A, B \in \Sigma$.

Осталось заметить, что, в силу леммы 6.2, вектор $\Omega(t)$ однозначно определяется матрицей $M = \dot{D}D^T$.

Теорема доказана.

Вектор $\Omega = \Omega(t)$, существование и единственность которого утверждается в данной теореме, называется ***вектором мгновенной угловой скорости твердой среды*** Σ ***по отношению к системе отсчета*** S.