

# Теоретическая механика

**Часть 1**

**Кинематика**

# **Глава 3. Движение твёрдой среды**

## § 5. Вращательное движение твердой среды

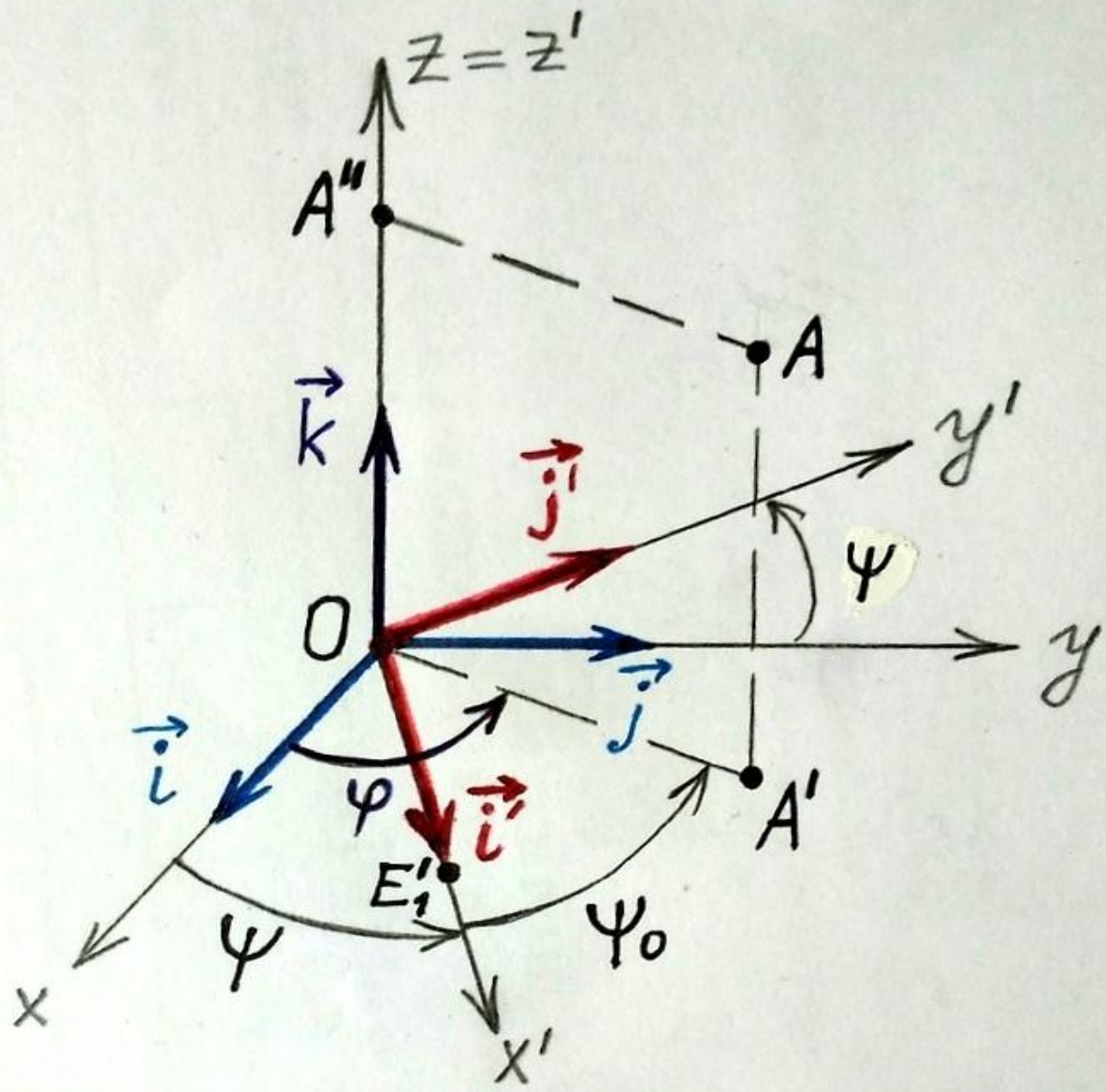
Рассмотрим «неподвижную» декартову систему отсчета  $\hat{S}$ . Пусть твердая среда  $\Sigma$  движется относительно ДСО  $\hat{S}$ .

**Определение.** Если существует прямая  $l \subset \Sigma$ , все точки которой неподвижны относительно системы  $\hat{S}$ , то движение твердой среды  $\Sigma$  относительно ДСО  $\hat{S}$  называется *вращательным* или *вращением вокруг неподвижной прямой  $l$* .

Прямая  $l$  в этом случае называется *осью вращения* среды  $\Sigma$ .

**Упражнение.** Докажите, что, если в среде  $\Sigma$  имеются две различные точки, неподвижные относительно  $\hat{S}$ , то движение среды  $\Sigma$  является вращением вокруг неподвижной прямой, проходящей через эти две точки.

Рассмотрим другую ДСО  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ , неподвижную относительно ДСО  $\hat{S}$ , такую, что точки  $O$  и  $E_3$  лежат на неподвижной прямой  $l \subset \Sigma$ . «Подвижную» систему  $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$  (жестко связанную со средой  $\Sigma$ ) выберем так, чтобы  $O' = O$  и  $E'_3 = E_3$  (это возможно в силу того, что  $O, E_3 \in l \subset \Sigma$ ). Тогда оси  $Oz$  и  $Oz'$  будут совпадать друг с другом и с осью вращения  $l$ .



Заметим, что векторы  $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$ ,  
 $\vec{i}' = \overrightarrow{OE'_1}$ ,  $\vec{j}' = \overrightarrow{OE'_2}$  компланарны,  $\vec{k}' = \overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$ , а  
 положение системы  $S'$  определяется направленным углом  
 $\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}')_{напр} = \angle(\vec{j}, \vec{j}')_{напр}$ .

Пусть точка  $A \in \Sigma$ ,  $A'$  – проекция точки  $A$  на  
 «подвижную» плоскость  $Ox'y' \subset \Sigma$  системы  $S'$ ,  $A''$  –  
 проекция точки  $A$  на ось  $Oz \subset \Sigma$ ,  $\varphi$  – направленный  
 угол между векторами  $\vec{i}$  и  $\overrightarrow{OA'}$ ,  $\psi_0$  – направленный  
 угол между векторами  $\vec{i}' = \overrightarrow{OE'_1}$  и  $\overrightarrow{OA'}$  (см. рис.).  
 Заметим, что  $\psi_0 = const$ ,  $\rho := |OA'| = const$  и координата  
 $z$  точки  $A$  тоже постоянна (в силу того, что точки  
 $O, E'_1, A, A', A'' \in \Sigma$ ).

Тогда верно равенство  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA''}$ , которое, при переходе к соответствующим координатным векторам (в системе  $S$ ), приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''}. \quad (5.1)$$



Перейдем к цилиндрическим координатам  $\rho, \varphi, z$ :

$$e_\rho = \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

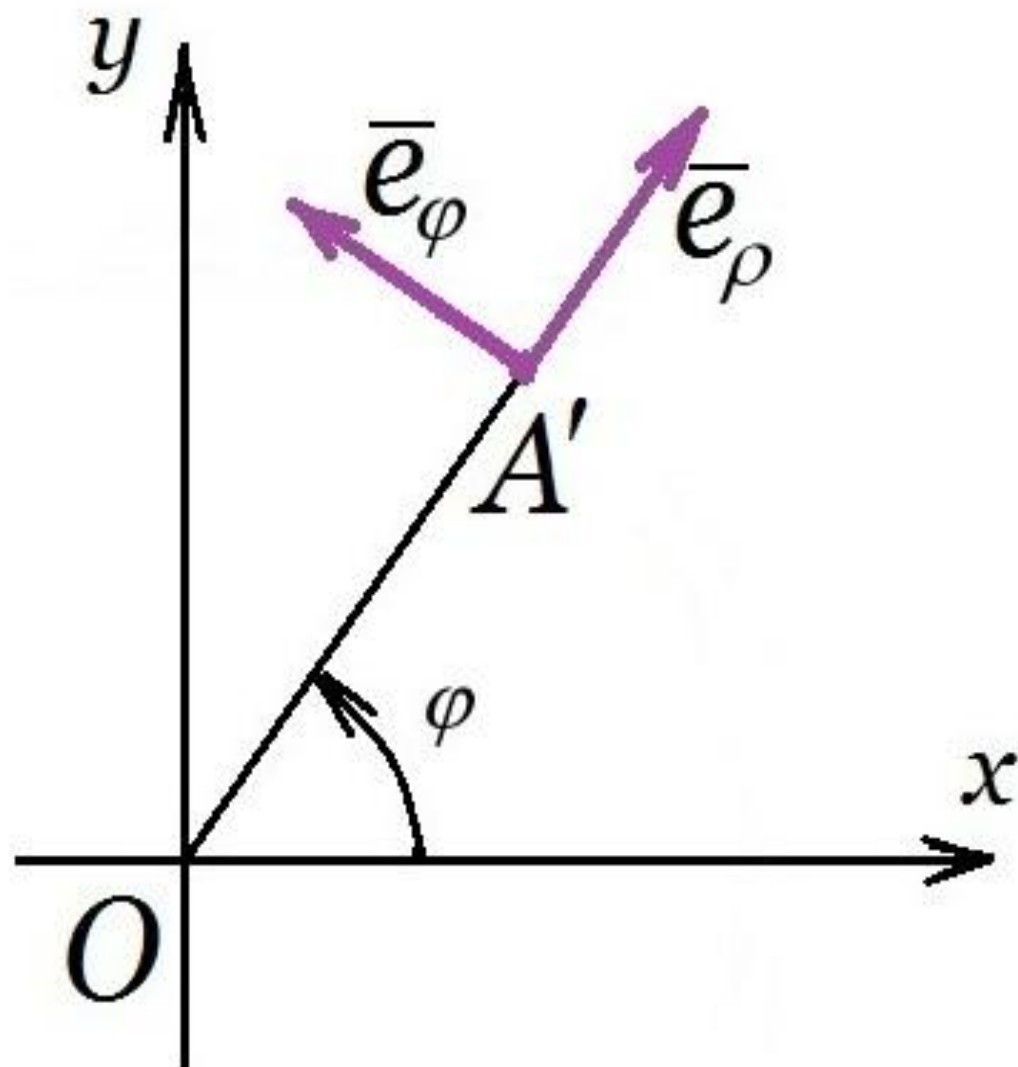
тогда  $r_{OA'} = \rho e_\rho$ ,  $r_{OA''} = z e_z$ . Следовательно, в силу (5.1),

$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + z e_z. \quad (5.2)$$

Так как  $\rho, z, e_z$  не зависят от времени, скорость точки  $A$

$$v = \dot{r} = \rho \dot{\varphi} e_\varphi = \rho \omega e_\varphi, \quad (5.3)$$

где  $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ .



Отметим, что угловая скорость  $\omega = \dot{\varphi}$  одинакова для всех точек среды  $\Sigma$ , поскольку полярные углы ее точек отличаются друг от друга на константы:  
 $\varphi = \psi + \psi_0 \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = \dot{\psi}$ , а угол  $\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}')_{напр}$  не зависит от точки среды.

Определим *вектор угловой скорости*  $\Omega$  среды  $\Sigma$  относительно  $S$  равенством

$$\Omega = \omega e_z.$$

Тогда, в силу (5.2) и (5.3), скорость точки  $A$

$$v = \dot{r} = \rho \dot{\varphi} e_\varphi = \rho \omega e_\varphi = \rho \omega (e_z \times e_\rho) = (\omega e_z) \times (\rho e_\rho + z e_z) = \Omega \times r.$$

Итак, для любой точки  $A \in \Sigma$  верно равенство

$$v = \Omega \times r.$$

В рассматриваемой ситуации вектор  $\vec{\Omega}$  параллелен оси вращения  $l$ , однако его величина и направление, задаваемые функцией  $\omega$ , могут изменяться.

Отметим, что с конца этого вектора вращение кажется происходящим против часовой стрелки (т.е. оно совпадает с  $\vec{e}_z$  при  $\dot{\phi} \geq 0$  и с  $(-\vec{e}_z)$  в противном случае). Ниже будет доказана теорема Эйлера, устанавливающая существование вектора мгновенной угловой скорости в случае произвольного движения твердой среды.

## § 6. Две леммы о матрицах

**Лемма 6.1.** Если матрица  $B = B(t)$  ортогональна при  $\forall t$ , то матрица  $\dot{B}B^T = \dot{B}B^{-1}$  является кососимметрической при  $\forall t$ , то есть в каждый момент времени  $t$

$$(\dot{B}B^T)^T = -\dot{B}B^T. \quad (6.1)$$

*Доказательство.* Продифференцировав по времени  $t$  тождество

$$I = BB^T,$$

получим:

$$0 = \dot{B}B^T + B\dot{B}^T = \dot{B}B^T + (\dot{B}B^T)^T.$$

Отсюда следует (6.1). Лемма доказана.

**Лемма 6.2.** Если  $M$  – кососимметрическая матрица размера  $3 \times 3$ , то существует и единственен такой вектор  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , что равенство

$$Mq = \Omega \times q \quad (6.2)$$

выполняется для любого вектора  $q \in \mathbb{R}^3$ .

*Доказательство.* Кососимметрическую матрицу  $M$  можно записать в виде:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого вектора  $q = (q_1, q_2, q_3)^T \in \mathbb{R}^3$

$$Mq = \begin{pmatrix} aq_2 + bq_3 \\ -aq_1 + cq_3 \\ -bq_1 - cq_2 \end{pmatrix}.$$

По определению векторного произведения, для векторов  $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  и  $q = (q_1, q_2, q_3)^T$  имеем :

$$\Omega \times q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2 \\ \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3 \\ \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1 \end{pmatrix}$$

(с учетом того, что

$$i = (1, 0, 0)^T, \quad j = (0, 1, 0)^T, \quad k = (0, 0, 1)^T).$$



Для нахождения вектора  $\Omega$  приравниваем правые части последних двух равенств:

$$\begin{pmatrix} aq_2 + bq_3 \\ -aq_1 + cq_3 \\ -bq_1 - cq_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2q_3 - \omega_3q_2 \\ \omega_3q_1 - \omega_1q_3 \\ \omega_1q_2 - \omega_2q_1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Далее рассматриваем последовательно три случая :

1)  $q = i = (1, 0, 0)^T$ , 2)  $q = j = (0, 1, 0)^T$ , 3)  $q = k = (0, 0, 1)^T$ .

Подставляя эти значения вектора  $q$  в равенство (6.3), получаем следующие однозначно определенные значения координат вектора  $\Omega$ :

Подставляя эти значения вектора  $q$  в равенство (6.3), получаем следующие однозначно определенные значения координат вектора  $\Omega$ :

$$\omega_3 = -a, \quad \omega_2 = b, \quad \omega_1 = -c.$$

Итак,  $\Omega = (-c, b, -a)^T$  и  $Mq = \Omega \times q$  для любого  $q \in \mathbb{R}^3$ , причем вектор  $\Omega$  определен однозначно.

Лемма доказана.

## § 7. Теорема Эйлера о скоростях точек твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную»  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  и «подвижную»  $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$ , жестко связанную со средой  $\Sigma$  (то есть твердая среда  $\Sigma$  неподвижна относительно ДСО  $S'$ ).

И пусть  $D$  – матрица перехода от  $S$  к  $S'$ .

Рассмотрим две точки  $A, B \in \Sigma$ . Арифметический вектор  $r_{AB} = r_{OB} - r_{OA}$  — это координатное представление геометрического вектора  $\overrightarrow{AB}$  в системе  $S$ , векторы  $v_A = \dot{r}_{OA}$  и  $v_B = \dot{r}_{OB}$  — скорости точек  $A$  и  $B$  в системе  $S$ , вектор  $v_{AB} = \dot{r}_{AB} = \dot{r}_{OB} - \dot{r}_{OA} = v_B - v_A$  — скорость направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  в  $S$ . Заметим также, что  $D^T r_{AB} = r'_{AB} = const$  ( $r'_{AB}$  — координатное представление вектора  $\overrightarrow{AB}$  в системе  $S'$ ).

**Теорема (Эйлера).** В каждый момент времени  $t$  существует и единственен такой вектор  $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3$ , что для любых точек  $A, B \in \Sigma$  имеет место равенство

$$v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}.$$

При этом  $(\forall t) (\forall q \in \mathbb{R}^3) [\dot{D}D^T q = \Omega \times q]$ .

**Замечание.** Равенство  $v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}$  равносильно равенству  $v_{AB} = \Omega \times r_{AB}$ .

*Доказательство.* Докажем сначала, что

$$(\forall t)(\exists \text{ единственный } \Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3)(\forall q \in \mathbb{R}^3)[\dot{D}D^T q = \Omega \times q].$$

В силу леммы 6.1, при  $\forall t$  матрица  $M = \dot{D}D^T$  является кососимметрической. Тогда, в силу леммы 6.2, при  $\forall t$  для матрицы  $M = \dot{D}D^T$  ( $\exists$  единственный  $\Omega = \Omega(t) \in \mathbb{R}^3$ )

$$(\forall q \in \mathbb{R}^3)[\dot{D}D^T q = Mq = \Omega \times q].$$

Второе предложение доказано. Докажем первое предложение.

Фиксируем произвольный момент времени  $t$  и возьмем две произвольные точки  $A, B \in \Sigma$ . Пусть  $q = r_{AB}$ . Тогда из доказанного выше, учитывая, что  $DD^T = I$  и  $D^T r_{AB} = r'_{AB} = \text{const}$ , получаем:

$$v_{AB} = \dot{r}_{AB} = \frac{d}{dt}(DD^T r_{AB}) = \dot{D}(D^T r_{AB}) = (\dot{D}D^T)r_{AB} = \Omega \times r_{AB},$$

или, что равносильно,  $v_B = v_A + \Omega \times r_{AB}$ . При этом вектор  $\Omega(t)$  не зависит от точек  $A, B \in \Sigma$ .

Осталось заметить, что, в силу леммы 6.2, вектор  $\Omega(t)$  однозначно определяется матрицей  $M = \dot{D}D^T$ .

Теорема доказана.

Вектор  $\Omega = \Omega(t)$ , существование и единственность которого утверждается в данной теореме, называется *вектором мгновенной угловой скорости твердой среды  $\Sigma$  по отношению к системе отсчета  $S$ .*