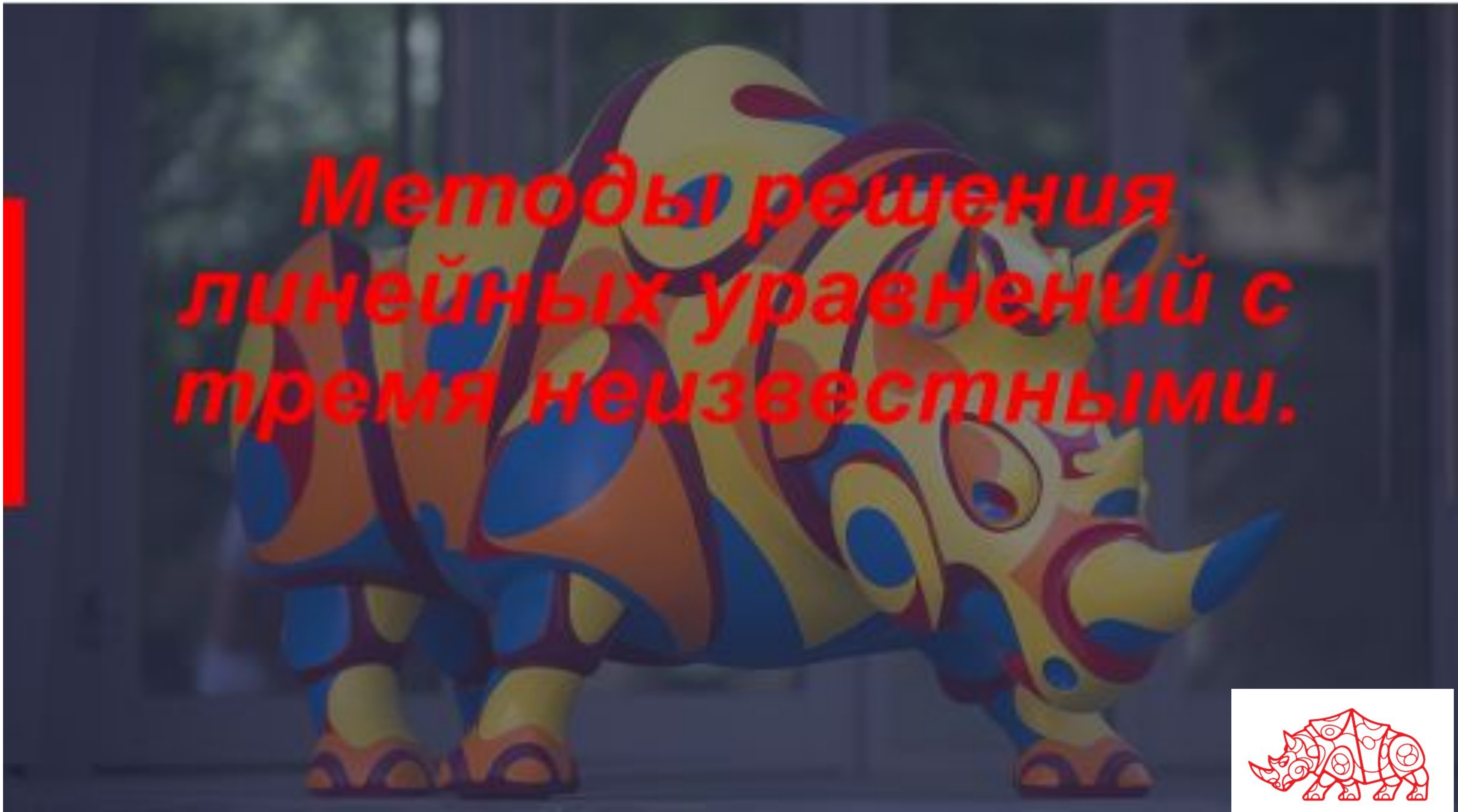
УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ | БОЛЬШЕ ЧЕМ ОБРАЗОВАНИЕ



Методы решения линейных уравнений с тремя неизвестными.

4.1. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы (Матричный метод)

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Литература:

Линейная алгебра

Хамидуллин Р.Я. Гулиян Б.Ш.

Дома: теория - Занятие 4

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

где - x_1, x_2, x_3 неизвестные, a_{ij} - коэффициенты ($i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$),

b_1, b_2, b_3 - свободные члены.

Тройка чисел называется <u>решением системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными</u>, если при подстановке их в уравнения системы вместо x_1, x_2, x_3 получают верные числовые равенства.

Если система трёх линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется <u>совместной</u>.

Если система уравнений решений не имеет, то она называется <u>несовместной</u>.

Если система трёх линейных уравнений имеет единственное решение, то ее называют определенной; если решений больше одного, то – неопределенной. Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю , то система называется однородной, в противном случае – неоднородной.

ДАНО:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

В матричной форме записи эта система уравнений имеет вид:

$$A \cdot X = B$$

где:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

А- основная матрица системы

Х-матрица неизвестных

В-матрица свободных членов

Матричный метод

Пусть $|A| \neq 0$

Тогда существует обратная матрица A^{-1} .
Если умножить обе части уравнения

$$A \cdot X = B$$

на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения неизвестных переменных, т.е.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Подставим формулы: $A^{-1} \cdot A = E$; **$E \cdot X = X$**

Получим:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Алгоритм решения системы линейных уравнений в матричной форме.

1. Найти обратную матрицу A^{-1}
2. Найти произведение обратной матрицы на столбец свободных членов: $X = A^{-1} \cdot B$
3. Записать ответ.

Пример.

Решите систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Решение:

1. Перепишем систему уравнений в матричном виде: $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Так как определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13,$$

Тогда систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными можно решить матричным методом.

С помощью обратной матрицы решение этой системы может быть найдено так:

$$X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Построим обратную матрицу A^{-1} с помощью матрицы из алгебраических дополнений элементов матрицы A :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{T}=\frac{1}{-13}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}^{T}=-\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix},$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7.$$

.Осталось вычислить матрицу неизвестных переменных, умножив обратную матрицу на матрицу свободных членов:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \cdot 9 + \frac{6}{13} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot 2 \\ \frac{1}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot 3 + \frac{3}{13} \cdot 2 \\ -\frac{2}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{3}{13}\right) \cdot 3 + \frac{7}{13} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$

4.2. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Литература:

Линейная алгебра

Хамидуллин Р.Я. Гулиян Б.Ш.

Дома: теория - Занятие 4

решить -№ 2.1, стр.53

Теорема Крамера

Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой не равен 0, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится так: каждое из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Теорема Крамера

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

где - x_1, x_2, x_3 неизвестные, a_{ij} - коэффициенты ($i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$),

b_1, b_2, b_3 - свободные члены.

Теорема Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Рассмотрим случаи, когда определитель системы равен нулю.

Здесь возможны два варианта:

1. Δ=0 и каждый определитель $\Delta xi = 0$. Это имеет место тогда, когда коэффициенты при неизвестных Xi пропорциональны, т.е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число К.

Система уравнений имеет в этом случае бесчисленное множество решений.

Рассмотрим случаи, когда определитель системы равен нулю.

2. $\Delta=0$ и хотя бы один из определителей $\Delta x_i \neq 0$. Это имеет место тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных, кроме Xi пропорциональны. При этом получается система из противоречивых уравнений, которая не имеет решения.

Теорема Крамера

Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение: Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 0 - (-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 0 = -13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

Теорема Крамера

2.Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 0=-13.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 3\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\cdot 2-3\cdot 3\cdot 2-9\cdot 1\cdot 0=-52,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 2+9\cdot 1\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 2-(-1)\cdot 3\cdot 1-9\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 2=0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2+3\cdot 3\cdot 1+9\cdot 1\cdot 0-9\cdot(-2)\cdot 1-3\cdot 1\cdot 2-2\cdot 3\cdot 0=13.$$

Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$$

4.3 Метод Гаусса

Метод Крамера можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является универсальным и пригоден для решения систем с любым числом уравнений. Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Литература:

Линейная алгебра

Хамидуллин Р.Я. Гулиян Б.Ш.

Дома: теория - Занятие 4

3.3 Метод Гаусса

При решении систем линейных уравнений используют метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Он состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы уравнений называются эквивалентными, если множества решений их совпадают).

Эти действия называются прямым ходом.

Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход)

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1. Перестановка двух строк;
2. Умножение строки на произвольное число, отличное от нуля;
3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число;
4. Отбрасывание нулевой строки.

3.3 Метод Гаусса

Пример 1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Обозначим: A_B или $A|B$ - ***расширенная матрица системы.***

Расширенная матрица этой системы имеет вид:

$$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

3.3 Метод Гаусса

Проведем следующие преобразования расширенной матрицы системы: умножим первую строку на -2 и сложим со второй строкой **(-2I+II)** , а также умножим первую строку на -1 и сложим с третьей строкой **(-1I+III)**.

Результатом будет расширенная матрица первого цикла (в дальнейшем все преобразования будем изображать в виде схемы):

$$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Расширенная матрица этой системы имеет вид:

$$A_B^{(1)}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array}\right)$$

$$A_B^{(1)}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array}\right) -\frac{3}{5} \sim A_B^{(2)}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{52}{5} \end{array}\right)$$

-3II+5III

Полученная расширенная матрица соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 5x_2 - 7x_3 = -39, \\ \dfrac{26}{5}x_3 = \dfrac{52}{5}, \end{cases}$$

которая эквивалентна исходной системе.
Далее последовательно находим:

$x_3 = 2$ $\quad x_2 = -5$ $\quad x_1 = 3$

Проверкой убеждаемся, что система решена верно

Пример 2.Решить систему методом Жордана–Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Расширенная матрица данной системы имеет вид:

$$\text{A}_{\text{В}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

После первого шага по методу Гаусса получаем:

$$A_B^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array}\right)$$

$$A_B^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array}\right) -\frac{3}{5} \sim A_B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{52}{5} \end{array}\right) - \textit{после 2-го шага.}$$

III:26 II+7III I+(-2)III

Метод Гаусса

Проделаем следующие операции: разделим последнюю строку полученной матрицы на $\frac{26}{5}$ и,

умножив на 7 , прибавим ко второй строке,
умножив на –2 прибавим к первой строке.

$$A_B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{52}{5} \end{array}\right) \sim A_B^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Разделим вторую строку на 5 и прибавим к первой, умножив на 2 .

II:5 I+2II

Разделим вторую строку на 5 и прибавим к первой, умножив на 2.

$$A_B^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim A_B^{(4)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

II:5 I+2II

Выписываем решение:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = 2$$

Практикум :

1. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы и методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ 6x_1 + 8x_2 - 17x_3 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases}.$$

2.Решить методом Гаусса и Жордано-Гаусса:

$$\begin{cases} x+2y+3z=-7, \\ 2x+y+2z=-2, \\ 3x+2y+z=3. \end{cases}$$

A|B=

-2I+II   -3I+III   III:-4 3III+II