

*Методы решения
линейных уравнений с
тремя неизвестными.*



4.1. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы (Матричный метод)



Литература:

Линейная алгебра

Хамидуллин Р.Я. Гулиян Б.Ш.

Дома: теория - Занятие 4



1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

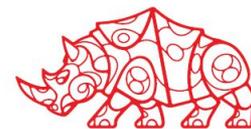
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 — неизвестные, a_{ij} — коэффициенты
($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$),

b_1, b_2, b_3 — свободные члены.



Тройка чисел называется решением
системы трёх линейных уравнений с
тремя неизвестными, если при
подстановке их в уравнения системы
вместо x_1, x_2, x_3 получают верные
числовые равенства.



Если система трёх линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной.

Если система уравнений решений не имеет, то она называется несовместной.



Если система трёх линейных уравнений

имеет единственное решение, то ее называют определенной; если решений больше одного, то – неопределенной.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю, то система называется однородной, в противном случае – неоднородной.



ДАНО:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$



**В матричной форме записи
эта система уравнений имеет вид:**

$$A \cdot X = B$$

где:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

A- основная матрица системы

X- матрица неизвестных

B- матрица свободных членов



Пусть $\neq 0$

Тогда существует обратная матрица A^{-1} .

Если умножить обе части уравнения

$$A \cdot X = B$$

на A^{-1} слева, то получим формулу для нахождения неизвестных переменных, т.е.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

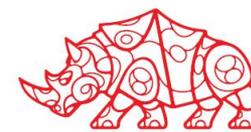


Подставим формулы: $A^{-1} \cdot A = E$; $E \cdot X = X$

Получим:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$



Алгоритм решения системы линейных уравнений в матричной форме.

1. Найти обратную матрицу A^{-1}
2. Найти произведение обратной матрицы на столбец свободных членов: $X = A^{-1} \cdot B$
3. Записать ответ.



Пример.

Решите систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$



Решение:

1. Перепишем систему уравнений в матричном виде: $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Так как определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13,$$

Тогда систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными можно решить матричным методом.



С помощью обратной матрицы решение этой системы может быть найдено так:

$$X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



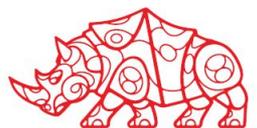
2. Построим обратную матрицу A^{-1} с помощью матрицы из алгебраических дополнений элементов матрицы A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$



.Осталось вычислить матрицу неизвестных переменных, умножив обратную матрицу на матрицу свободных членов:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \cdot 9 + \frac{6}{13} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot 2 \\ \frac{1}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot 3 + \frac{3}{13} \cdot 2 \\ -\frac{2}{13} \cdot 9 + \left(-\frac{3}{13}\right) \cdot 3 + \frac{7}{13} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1$$



4.2. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера



Литература:

Линейная алгебра

Хамидуллин Р.Я. Гулиян Б.Ш.

Дома: теория - Занятие 4

решить -№ 2.1, стр.53



Теорема Крамера

Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой не равен 0, всегда имеет решение и притом единственное.

Оно находится так: каждое из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца при искомом неизвестном на столбец свободных членов.



Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 — неизвестные, a_{ij} — коэффициенты
($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$),

b_1, b_2, b_3 — свободные члены.



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$



Рассмотрим случай, когда определитель системы равен нулю.

Здесь возможны два варианта:

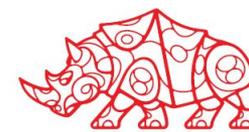
1. $\Delta=0$ и каждый определитель $\Delta x_i = 0$. Это имеет место тогда, когда коэффициенты при неизвестных X_i пропорциональны, т.е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число K .

Система уравнений имеет в этом случае бесчисленное множество решений.



Рассмотрим случай, когда определитель системы равен нулю.

2. $\Delta=0$ и хотя бы один из определителей $\Delta x_i \neq 0$.
Это имеет место тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных, кроме X_i пропорциональны.
При этом получается система из противоречивых уравнений, которая не имеет решения.



Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение: Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.



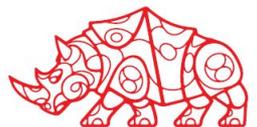
2. Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 9 \cdot 1 \cdot 0 = -52,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \cdot 0 - 9 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 13.$$



Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -1.$$



4.3 Метод Гаусса

Метод Крамера можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является универсальным и пригоден для решения систем с любым числом уравнений. Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$



Литература:

Линейная алгебра

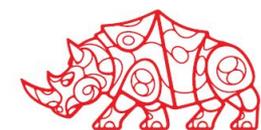
Хамидуллин Р.Я. Гулиян Б.Ш.

Дома: теория - Занятие 4



При решении систем линейных уравнений используют метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Он состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы уравнений называются эквивалентными, если множества решений их совпадают). Эти действия называются прямым ходом.



Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход)



При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

- 1. Перестановка двух строк;*
- 2. Умножение строки на произвольное число, отличное от нуля;*
- 3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число;*
- 4. Отбрасывание нулевой строки.*



Пример 1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Обозначим: A_B или $A|B$ - *расширенная матрица системы.*

Расширенная матрица этой системы имеет вид:

$$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$



Проведем следующие преобразования расширенной матрицы системы: умножим первую строку на -2 и сложим со второй строкой ($-2I+II$), а также умножим первую строку

на -1 и сложим с третьей строкой ($-1I+III$).

Результатом будет расширенная матрица первого цикла (в дальнейшем все преобразования будем изображать в виде схемы):

$$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$



Расширенная матрица этой системы имеет вид:

$$A_B^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array} \right)$$

$$A_B^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \frac{3}{5} \\ \end{array}$$

$-3II+5III$

$$\sim A_B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{52}{5} \end{array} \right)$$



Полученная расширенная матрица соответствует системе уравнений:

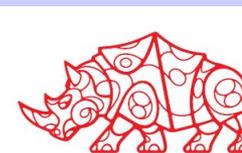
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 5x_2 - 7x_3 = -39, \\ \frac{26}{5}x_3 = \frac{52}{5}, \end{cases}$$

которая эквивалентна исходной системе.

Далее последовательно находим:

$$x_3 = 2 \quad x_2 = -5 \quad x_1 = 3$$

Проверкой убеждаемся, что система решена верно



Пример 2. Решить систему методом Жордана–Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Расширенная матрица данной системы имеет вид:

$$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$



После первого шага по методу Гаусса
получаем:

$$A_B^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array} \right)$$

$$A_B^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 3 & 1 & -13 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \frac{3}{5} \\ \leftarrow \frac{-3}{5} \end{array} \sim A_B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{52}{5} \end{array} \right) \text{— после 2-го шага.}$$

III:26 II+7III I+(-2)III



Продедаем следующие операции: разделим

последнюю строку полученной матрицы на 5,

$$\frac{26}{5}$$

умножив на 7, прибавим ко второй строке, умножив на -2 прибавим к первой строке.

$$A_B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{26}{5} & \frac{52}{5} \end{array} \right) \sim A_B^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Разделим вторую строку на 5 и прибавим к первой, умножив на 2.

II:5 I+2II



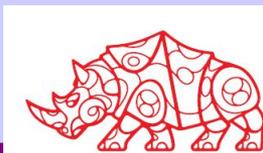
Разделим вторую строку на 5 и прибавим к первой, умножив на 2.

$$A_B^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim A_B^{(4)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

II:5 I+2II

Выписываем решение:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = 2$$



Практикум :

1. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы и методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ 6x_1 + 8x_2 - 17x_3 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -9 \end{cases} .$$



2. Решить методом Гаусса и Жордано-Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -7, \\ 2x + y + 2z = -2, \\ 3x + 2y + z = 3. \end{cases}$$

$A|B=$

$-2I+II \quad -3I+III \quad III:-4 \quad 3III+II$

