

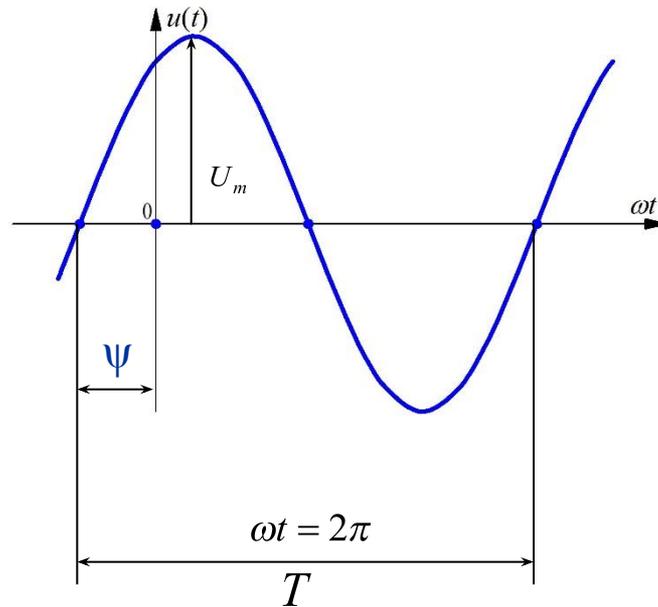
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
кафедра электротехники, О8

Лекция 3

Расчет электрических цепей
переменного тока

Однофазный синусоидальный ток

Основные понятия



Период T и
частота

$$f = \frac{1}{T} [\text{Гц}]$$

В России и Европе

$$f=50 \text{ Гц,}$$

$$T=20 \text{ миллисекунд}$$

U_m, I_m - амплитудное значение напряжения u , и тока i

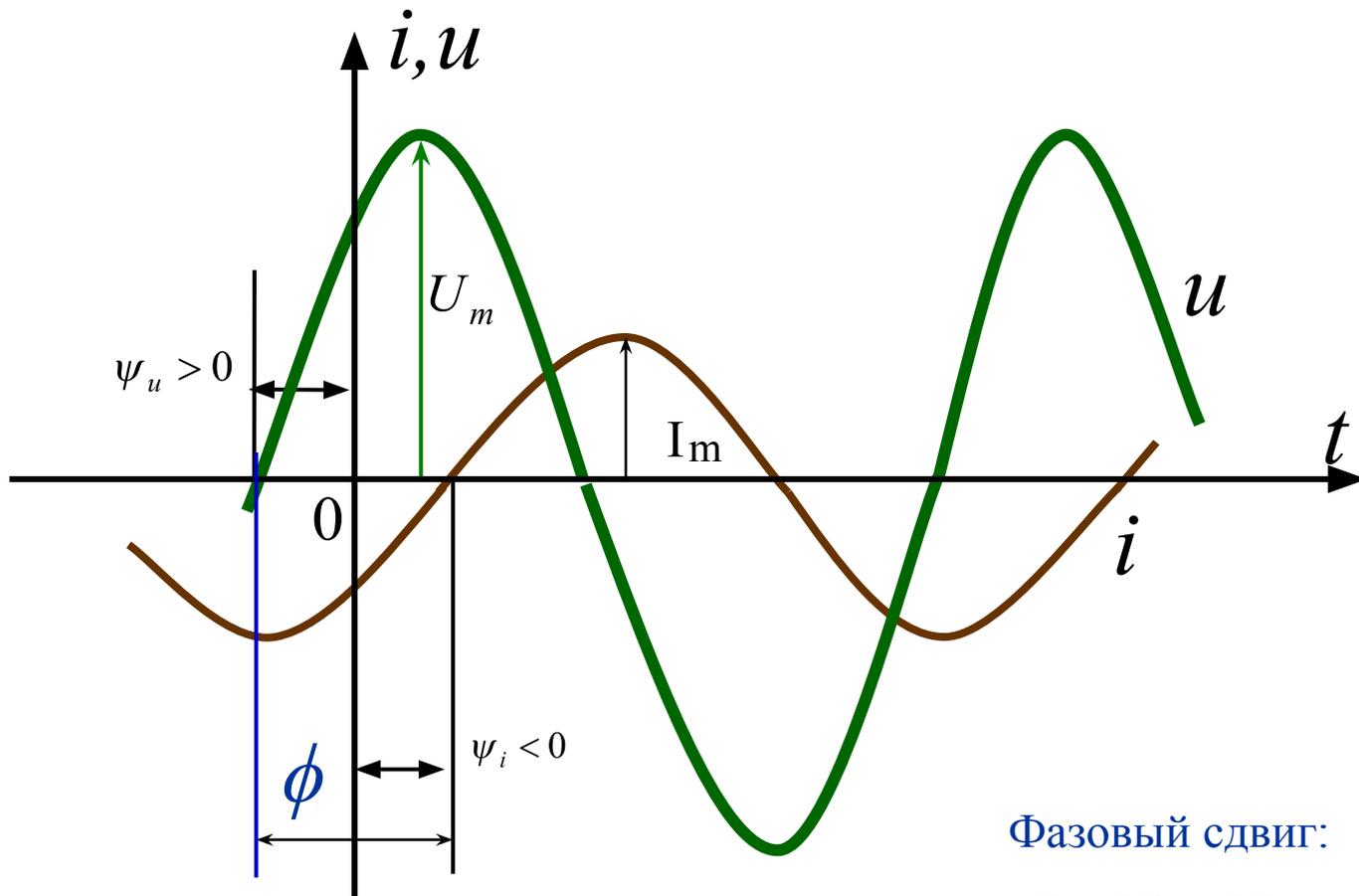
ψ_u, ψ_i - начальная фаза напряжения u , и тока i

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ - циклическая частота или угловая скорость

Мгновенные значения напряжения $u(t)$, тока $i(t)$ и фазовый сдвиг ϕ

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$



Фазовый сдвиг:

$$\phi = \psi_i - \psi_u$$

Однофазный синусоидальный ток

Средние и действующие значения величин

Среднее значение переменной величины за период T равно нулю. Поэтому среднее значение вычисляют за половину периода:

$$U_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U_m \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi} U_m$$

Среднее значение для мощности за период времени T можно вычислить формулой:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

Для оценки периодически изменяющегося величин (напряжение, ЭДС и ток) используется и понятие *«действующее значение»*.

Действующим значением переменного периодического сигнала ($i(t)$) называется значение такого постоянного сигнала (I), который за один период совершает ту же работу, что и рассматриваемый переменный.

Действующее значение переменной величины

Величина	Мгновенное значение	Действующее значение
Напряжение	$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$	U
Ток	$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$	I
ЭДС	$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$	E

Работу, совершаемую при приложении напряжения на резистор с сопротивлением r находим по закону Джоуля-Ленца.

Постоянное напряжение

$$A = \frac{U^2}{r} T$$

Переменное напряжение

$$A = \int_0^T \frac{u^2}{r} dt$$

Если мгновенное значение напряжения:

$$u = U_M \sin \omega t$$

То постоянное напряжение U вычислим из равенства работ

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_M^2 \sin^2 \omega t dt} = U_M \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_M$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_M$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} E_M$$

Мощность в сети переменного тока

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_M \sin \omega t \cdot I_M \sin(\omega t + \varphi) dt =$$
$$= \frac{1}{T} \int_0^T [UI(1 - \cos 2\omega t) \cos \varphi + UI \sin 2\omega t \sin \varphi] dt.$$

$UI(1 - \cos 2\omega t) \cos \varphi \geq 0$ Мощность отбирается от сети и совершает полезную работу

$P = UI \cos \varphi$ Активная мощность. Единица измерения - Вт

$UI \sin 2\omega t \sin \varphi$ Знакопеременная величина. Средняя значения за период =0!

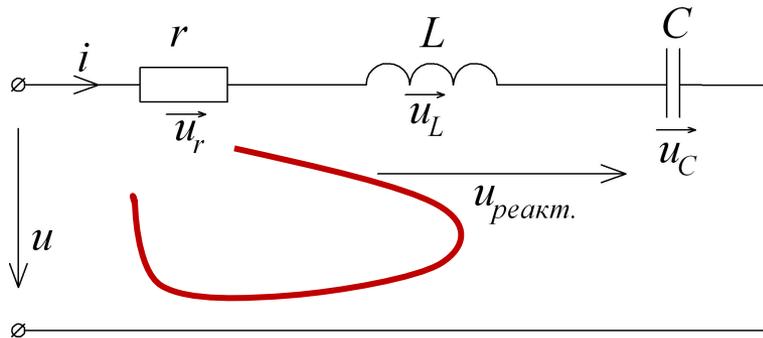
$Q = UI \sin \varphi$ Реактивная мощность. Единица измерения - ВАр

Наибольшее значение активной мощности, возможное при данных значениях напряжения и тока, называется *полной* мощностью и обозначается S :

$$S = UI \quad [\text{ВА}]$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Соотношение действующих значений напряжения и тока и сдвиг по фазе в цепи синусоидального переменного тока



Мгновенные значения тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$ на зажимах двухполюсника:

$$i = I_m \sin \omega t$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Составим уравнение на основании второго закона Кирхгофа для замкнутого контура:

$$u = u_r + u_L + u_C = ir + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = I_m \sin(\omega t) \cdot r + I_m \cos(\omega t) \cdot \omega L - I_m \cos(\omega t) \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Обозначим:

$$x_L = \omega L$$

$$x_C = \frac{1}{\omega L}$$

Для отдельных элементов цепи можем написать:

Для резистора:

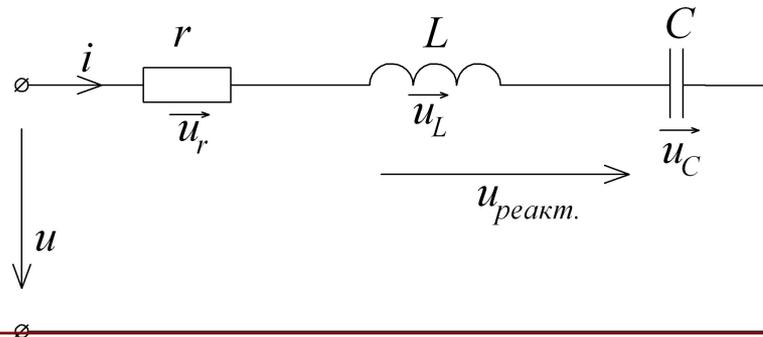
$$u_r = I_m r \sin \omega t$$

Для индуктивности: $u_L = \omega L \cdot I_m \cos \omega t = x_L I_m \cos \omega t$

$$u_L = I x_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Для емкости: $u_C = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = -x_C I_m \cos \omega t$

$$u_C = I x_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



$$u = u_r + u_L + u_C = I_m \sin(\omega t) \cdot r + I_m \cos(\omega t) \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = I_m \sin(\omega t) \cdot r + I_m \cos(\omega t) \cdot (x_L - x_C)$$

Для данной схемы введем:

$$x = x_L - x_C$$

Активное напряжение:

$$u_{\text{акт}} = u_r = r I_m \sin \omega t$$

Реактивное напряжение:

$$u_{\text{реак.}} = u_L + u_C = I_m x \cos \omega t$$

Полное напряжение:

$$u = u_r + u_{\text{реак.}} = \sqrt{2} I (r \sin \omega t + x \cos \omega t)$$

Введем величину:

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}$$

Полное напряжение умножим и поделим на z :

Тогда можем написать:

$$u = I_m z \left(\frac{r}{z} \sin \omega t + \frac{x}{z} \cos \omega t \right)$$

где: $\frac{r}{z} = \cos \varphi$; $\frac{x}{z} = \sin \varphi$

Отсюда получим: $\varphi = \text{arctg} \frac{x}{r}$

Мгновенное значение напряжения на входе двухполюсника $u(t)$:

$$u = I_m z [\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi)] = I_m z \sin(\omega t + \varphi)$$

φ - фазовый сдвиг между входным напряжением $u(t)$ и током $i(t)$

введённые выше величины x_L , x_C , x , z имеют размерность сопротивления (Ом).

Поэтому в соответствии с их физическим смыслом – они называются:

r - активное сопротивление;

x - реактивное сопротивление;

x_L - индуктивное сопротивление;

x_C - ёмкостное сопротивление;

z - полное сопротивление.

Закон Ома для действующих значений тока и напряжения:

$$U_r = Ir$$

$$U_L = Ix_L$$

$$U_C = Ix_C$$

$$U = Iz$$

Подставляя данные величины в формулы мощности:

Активная мощность : $P = I^2 r$ [Вт];

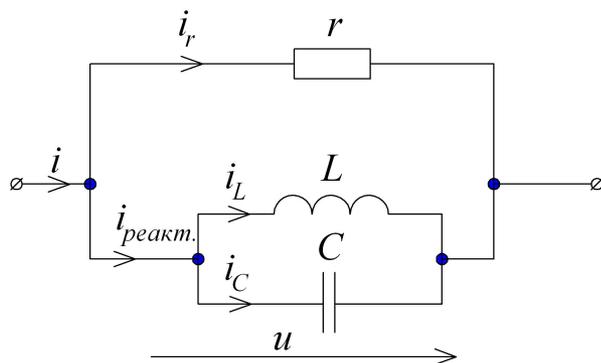
Реактивная мощность : $Q = I^2 x$ [ВАр];

Полная мощность : $S = I^2 z$ [ВА].

Реактивную мощность можем представить в виде:

$$Q = I^2 (x_L - x_C) = I^2 x_L - I^2 x_C = Q_L - Q_C$$

Параллельное соединение элементов:



- b_L *индуктивная* проводимость;
 - b_C *ёмкостная* проводимость;
 - b *реактивная* проводимость;
 - y *полная* проводимость;
- Единица измерения – (Сим) Сименс

Приложенное напряжение:

$$u = U_m \sin \omega t$$

Входящий ток можем найти в виде:

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi)$$

Для данной схемы:

$$b_L = \frac{1}{\omega L};$$

$$b_C = \omega C;$$

$$b = b_L - b_C;$$

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

Закон Ома для действующих значений токов отдельных элементов и приложенного напряжения:

$$I_r = Ug \quad \text{-для активной проводимости (g);}$$

$$I_L = Ub_L \quad \text{-для индуктивной проводимости (b_L);}$$

$$I_C = Ub_C \quad \text{-для ёмкостной проводимости (b_C);}$$

$$I_{\text{реак.}} = Ub \quad \text{-для реактивной проводимости (b);}$$

$$I = Uy \quad \text{-для полной проводимости (y);}$$