

Элементы теории фредгольмовых отображений

<https://vk.com/fredholm>

6. Вполне непрерывные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и задан оператор $A \in L(E, F)$. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если всякое ограниченное множество $M \subset E$ он переводит в относительно компактное множество $A[M] \subset F$.

Заметим, что не всякий оператор из $L(E, F)$ является вполне непрерывным. Пусть, например, $\dim E = \infty$. Рассмотрим тождественный оператор $I \in L(E)$. Как известно, замкнутый шар с центром в нуле радиуса единица $B[0, 1] = M$ в бесконечномерном пространстве не является относительно компактным множеством. Тогда образ $I[M] = M$ не будет относительно компактным множеством. Значит, оператор $I \in L(E)$ не является вполне непрерывным.

Множество всех вполне непрерывных операторов из $L(E, F)$ будем обозначать $\sigma(E, F)$.

Теорема 6.1. Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E, F)$ является линейным многообразием в пространстве $L(E, F)$. Если пространство F банахово, то множество $\sigma(E, F)$ замкнуто, то есть является подпространством $L(E, F)$.

Теорема 6.2. Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и хотя бы одно из этих пространств конечномерно. Тогда множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E, F) = L(E, F)$.

Пример вполне непрерывного оператора

Оператор Фредгольма

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds, \quad (1)$$

где функция $K(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных $a \leq t, s \leq b$.

Нетрудно установить, что оператор $A \in L(C[a, b])$. Покажем, что этот оператор является вполне непрерывным в $C[a, b]$, то есть $A \in \sigma(C[a, b])$.

Пусть $M \subset C[a, b]$ – ограниченное множество, то есть

$$(\exists P > 0)(\forall x \in M)[\|x\|_C = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \leq P].$$

Покажем, что множество непрерывных функций $A[M]$ в $C[a, b]$ является относительно компактным, то есть согласно теореме Арцела ограниченным и равномерно непрерывным.

Если функция $y \in A[M]$, то $y = Ax$, где $x \in M$. Тогда

$$\|y\|_C = \|Ax\|_C \leq \|A\| \|x\|_C \leq \|A\| P,$$

то есть множество $A[M]$ ограничено в $C[a, b]$.

Далее, для функции $y(t) = Ax(t)$, где $x \in M$, и $t_1, t_2 \in [a, b]$ получим

$$\begin{aligned} |y(t_1) - y(t_2)| &= \left| \int_a^b [K(t_1, s) - K(t_2, s)]x(s) ds \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| |x(s)| ds \leq P \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Непрерывная в квадрате $a \leq t, s \leq b$ функция $K(t, s)$ равномерно непрерывна. Тогда

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t_1, t_2, s \in [a, b]) \\ &\left[(|t_1 - t_2| < \delta) \rightarrow \left(|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{P(b-a)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что множество функций $A[M]$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, множество $A[M] \subset C[a, b]$ относительно компактно, а оператор $A \in \sigma(C[a, b])$.

Другое название вполне непрерывного оператора -- ***компактный оператор***.

7. Фактор-пространство

Пусть E — лин. простр-во, L — лин. многообразие в E .

Опр. Элементы $x, y \in E$ называются эквивалентными, если $x - y \in L$.

Обозначение: $x \sim y$.

Заметим, что выполняются след-е свойства (где $\forall x, y, z \in E$):

- 1) $x \sim x$ (рефлексивность);
- 2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симметричность);
- 3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзитивность).

Итак, на $\Lambda \Pi E$ задано отношение эквивалентности, которое разбивает $\text{пр-во } E$ на класс смежности (фрагмент-класс). Два класса смежности либо не пересекаются, либо совпадают (частично пересекаясь они не могут).

Класс эквивалентности (смежность), порожденный элементом $x \in E$,

имеет вид

$$x + L = \{x + y \mid y \in L\}.$$

Заметим, что для $\forall x_1 \in x + L$

$x_1 + L = x + L$ (любой "представитель"

x_1 класса $x + L$ порождает этот же класс).

Множество всех классов смежности называется фактор-множеством и

обозначается E/L ("E по L"):

$$E/L = \{x + L \mid x \in E\}.$$

На множестве E/L зададим
операции сложения и умножения
на число:

$$1) (x+L) + (y+L) = (x+y) + \overbrace{(L+L)}^L = \\ = x+y+L \text{ (классы складываются} \\ \text{как множества);}$$

$$2) \lambda(x+L) = \lambda x + \underbrace{\lambda L}_L = \lambda x + L.$$

Роль нулевого элемента играет $LM L$.

Нетрудно проверить выполнение аксиом
линейного пространства.

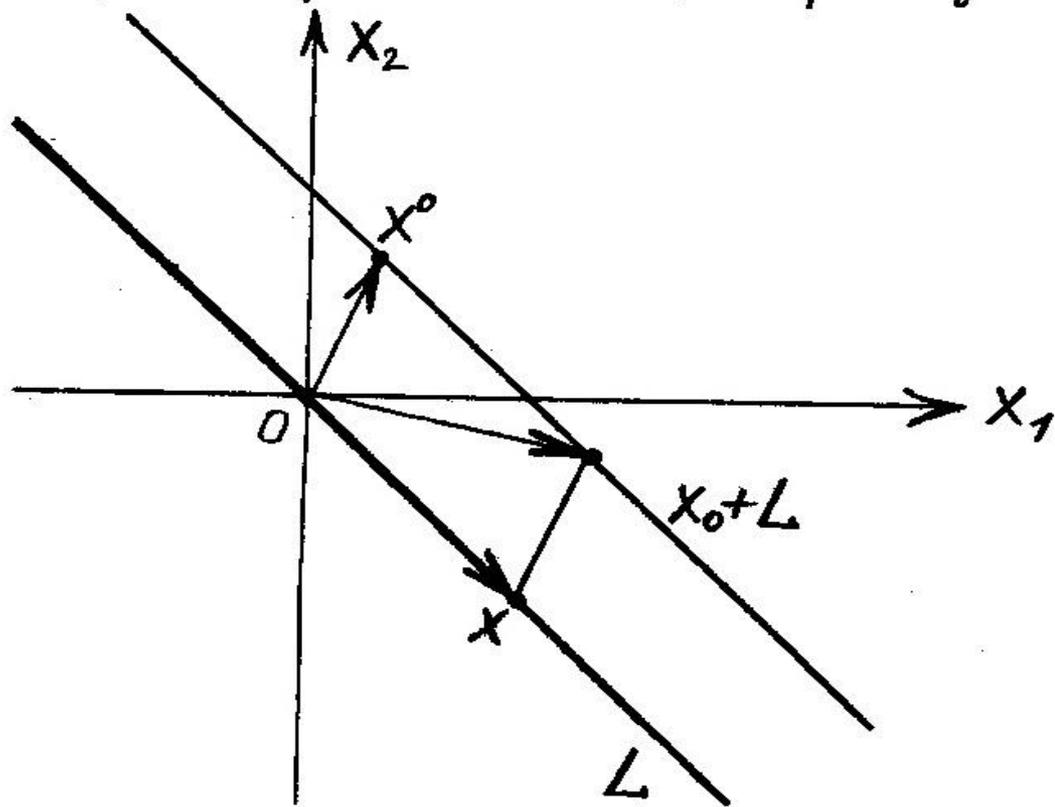
Линейное пространство E/L называется
фактор-пространством.

Пример $E = \mathbb{R}^2$,

$$L = \{ x = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}.$$

$$x^0 + L = \{ x = (x_1^0 + x_1, x_2^0 + x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$$

— сдвиг-класс, порожденный элементом x^0 .



8. Топологический изоморфизм. Прямые суммы

Топологический изоморфизм пространств

Пусть E, F – линейные пространства. Пространства E и F изоморфны, если существует линейное взаимно однозначное отображение $T: E \rightarrow F$, называемое изоморфизмом. Если E, F – линейные нормированные пространства, то говорят, что они **топологически изоморфны**, если существует непрерывный изоморфизм $T: E \rightarrow F$, для которого обратный оператор T^{-1} также непрерывен. В этом случае T называют **топологическим изоморфизмом**.

Если пространства E и F топологически изоморфны и одно из них банахово, то и второе также является банаховым.

Теорема *Если $T: E \rightarrow F$ – линейное непрерывное взаимно однозначное отображение банаховых пространств, то T – топологический изоморфизм.*

Пусть E – линейное пространство и E_1, E_2 – его подпространства. Говорят, что пространство E разлагается в **алгебраическую прямую сумму** подпространств E_1 и E_2 , и пишут $E = E_1 \oplus E_2$, если каждый элемент $x \in E$ единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Сумма $E = E_1 + E_2$ является прямой тогда и только тогда, когда $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Если E есть прямая сумма подпространств E_1, E_2 , то каждое из подпространств E_1 и E_2 называется **алгебраическим дополнением** другого. Известно, что каждое подпространство в линейном пространстве имеет по крайней мере одно алгебраическое дополнение¹.

Предположим теперь, что E – нормированное пространство, которое разложено в прямую сумму своих подпространств: $E = E_1 \oplus E_2$. Это разложение задает линейные отображения

$$P_i: E \rightarrow E_i, \quad P_i x = P(x_1 + x_2) = x_i, \quad i = 1, 2,$$

которые называются проекторами. Отображения P_i , вообще говоря, могут оказаться не непрерывными. Поскольку $x = P_1 x + P_2 x$, то из непрерывности одного отображения вытекает непрерывность другого.

Сумма $E = E_1 \oplus E_2$ называется **топологической прямой суммой**, если один из проекторов P_i (а значит, и второй) является непрерывным. В этом случае каждое из подпространств E_1 и E_2 называется **топологическим дополнением** другого.

9. Линейные фредгольмовы операторы

Пусть E, F – вещественные банаховы пространства. Обозначим через $L(E, F)$ пространство непрерывных линейных операторов $A: E \rightarrow F$.

Пусть $A \in L(E, F)$. **Ядром** оператора A называется векторное пространство

$$\text{Ker } A = \{x \in E : Ax = 0\}$$

и **образом** оператора A – векторное пространство

$$\text{Im } A = \{y \in F : Ax = y \text{ для некоторого } x \in E\}.$$

Фактор-пространство $\text{Coker } A = F / \text{Im } A$ называют **коядром** оператора A .

Через $\dim V$ далее обозначается размерность векторного пространства V (возможно, даже бесконечная).

Определение 1. *Линейный оператор $A \in L(E, F)$ называется **фредгольмовым**, если*

1. $\dim \text{Ker } A < \infty$;
2. $\dim \text{Coker } A < \infty$.

Индексом *фредгольмова оператора A называется число*

$$\text{ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A.$$

Обозначим через $\Phi(E, F)$ множество всех фредгольмовых операторов $A \in L(E, F)$ и через $\Phi_n(E, F)$ его подмножество, состоящее из фредгольмовых операторов индекса n .

Теорема *Если $A \in \Phi(E, F)$, тогда образ $\text{Im } A$ – замкнутое подпространство в F и найдется конечномерное подпространство $F_2 \subset F$, которое является топологическим дополнением к $\text{Im } A$.*

Определение *Оператор $K \in L(E, F)$ называют **конечномерным оператором** (или оператором конечного ранга), если $\dim \operatorname{Im} K < \infty$.*

Напомним, что множество относительно компактно, если его замыкание компактно.

Определение *Оператор $C \in L(E, F)$ называют **компактным**¹ оператором, если C отображает шар $B_1(0) \subset E$ радиуса 1 с центром в нуле (а значит, и каждое ограниченное подмножество из E) в относительно компактное подмножество пространства F .*

¹Часто такие операторы называют **вполне непрерывными**.

Обозначим через $C(E, F)$ подмножество $L(E, F)$, состоящее из компактных операторов, и через $K(E, F)$ подмножество конечномерных операторов. Очевидно, что всякий конечномерный оператор является компактным, следовательно $K(E, F) \subset C(E, F)$. В случае, когда $E = F$, вместо обозначений $L(E, F)$, $C(E, F)$, $K(E, F)$ будем использовать обозначения $L(E)$, $C(E)$, $K(E)$. Отметим также простой, но часто используемый факт, что сумма и произведение конечномерных (компактных) операторов является конечномерным (компактным) оператором, а также произведение конечномерного (компактного) оператора и непрерывного оператора в любом порядке дает снова конечномерный (компактный) оператор.

Рассмотрим подмножество в $L(E)$, состоящее из конечномерных возмущений тождественного отображения, а именно, операторов вида $I + K$, где $K \in K(E)$ – конечномерный оператор, и подмножество в $L(E)$, состоящее операторов вида $I + C$, где $C \in C(E)$ – компактный оператор. Покажем, что эти подмножества являются подмножествами множества фредгольмовых операторов нулевого индекса.

Лемма Пусть E – банахово пространство и $K \in K(E)$ – конечномерный оператор. Тогда оператор $I + K$ фредгольмов и $\text{ind}(I + K) = 0$.

Теорема Пусть E – банахово пространство и $C \in C(E)$. Тогда $I + C \in \Phi(E)$ и $\text{ind}(I + C) = 0$.

Литература

1. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т., Ратинер Н.М. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства. Учебное пособие
2. Смагин В.В. Линейные операторы и функционалы. Учебное пособие

<https://vk.com/fredholm>