Элементы теории фредгольмовых отображений

https://vk.com/fredholm

6. Вполне непрерывные операторы

Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и задан оператор $A \in L(E, F)$. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если всякое ограниченное множество $M \subset E$ он переводит в относительно компактное множество $A[M] \subset F$.

Заметим, что не всякий оператор из $L(E, F)$ является вполне непрерывным. Пусть, например, $\dim E = \infty$. Рассмотрим тождественный оператор $I \in L(E)$. Как известно, замкнутый шар с центром в нуле радиуса единица $B[\Theta, 1] = M$ в бесконечномерном пространстве не является относительно компактным множеством. Тогда образ $I[M] = M$ не будет относительно компактным множеством. Значит, оператор $I \in L(E)$ не является вполне непрерывным.

Множество всех вполне непрерывных операторов из $L(E, F)$ будем обозначать $\sigma(E, F)$.

Теорема 6.1. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства. Множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E,F)$ является линейным многообразием в пространстве $L(E,F)$. Если пространство F банахово, то множество $\sigma(E,F)$ замкнуто, то есть является подпространством $L(E,F)$.*

Теорема 6.2. *Пусть E, F – линейные нормированные пространства, и хотя бы одно из этих пространств конечномерно. Тогда множество вполне непрерывных операторов $\sigma(E,F) = L(E,F)$.*

Пример вполне непрерывного оператора

Оператор Фредгольма

Рассмотрим оператор

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\,, \qquad (1)$$

где функция $K(t,s)$ непрерывна по совокупности переменных $a \le t, s \le b$.

Нетрудно установить, что оператор $A \in L(C[a,b])$. Покажем, что этот оператор является вполне непрерывным в $C[a,b]$, то есть $A \in \sigma(C[a,b])$.

Пусть $M \subset C[a,b]$ – ограниченное множество, то есть

$$(\exists P > 0)(\forall\, x \in M)[\, \|x\|_C = \max_{a \le t \le b} |x(t)| \le P\,]\,.$$

Покажем, что множество непрерывных функций $A[M]$ в $C[a,b]$ является относительно компактным, то есть согласно теореме Арцела ограниченным и равностепенно непрерывным.

Если функция $y \in A[M]$, то $y = Ax$, где $x \in M$. Тогда

$$\|y\|_C = \|Ax\|_C \le \|A\|\,\|x\|_C \le \|A\|\,P\,,$$

то есть множество $A[M]$ ограничено в $C[a,b]$.

Далее, для функции $y(t) = Ax(t)$, где $x \in M$, и $t_1, t_2 \in [a,b]$ получим

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left|\int_a^b [K(t_1,s) - K(t_2,s)]x(s)\,ds\right| \le$$

$$\le \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|\,ds \le P\int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,ds\,. \qquad (2)$$

Непрерывная в квадрате $a \le t, s \le b$ функция $K(t,s)$ равномерно непрерывна. Тогда

$$(\forall\,\varepsilon > 0)(\exists\,\delta > 0)(\forall\,t_1, t_2, s \in [a,b])$$

$$\left[(|t_1 - t_2| < \delta) \to \left(|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{P(b-a)}\right)\right]. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что множество функций $A[M]$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, множество $A[M] \subset C[a,b]$ относительно компактно, а оператор $A \in \sigma(C[a,b])$.

Другое название вполне непрерывного оператора -- ***компактный оператор.***

7. Фактор-пространство

Пусть E — лин. простр-во, L — лин. многообразие в E.

<u>Опр.</u> Элементы $x, y \in E$ назыв-ся <u>эквивалентными</u>, если $x - y \in L$.

Обозначение: $x \sim y$.

Заметим, что выполняются след-е свойства (для $\forall x, y, z \in E$):

1) $x \sim x$ (рефлексивность);

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симметричность);

3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзитивность).

Итак, на ЛП E задано <u>отношение эквивалентности</u>, которое разбивает пр-во E на <u>классы смежности</u> (<u>фактор-классы</u>). Два класса смежности либо не пересекаются, либо совпадают (частично пересекаться они не могут).

Класс эквивалентности (смежности), порожденный элементом $x \in E$, имеет вид

$$x + L = \{x + y \mid y \in L\}.$$

Заметим, что для $\forall x_1 \in x + L$ $x_1 + L = x + L$ (любой "представитель" x_1 класса $x + L$ порождает этот же класс).

Множество всех классов смежности называется <u>фактор-множеством</u> и обозначается E/L ("E по L"):

$$E/L = \{x + L \mid x \in E\}.$$

На множестве E/L зададим операции сложения и умножения на число:

1) $(x+L)+(y+L)=(x+y)+(\overbrace{L+L}^{L}) = x+y+L$ (классы складываются как множества);

2) $\lambda(x+L) = \lambda x + \underbrace{\lambda L}_{L} = \lambda x + L$.

Роль нулевого элемента играет ЛМ L.

Нетрудно проверить выполнение аксиом линейного простр-ва.

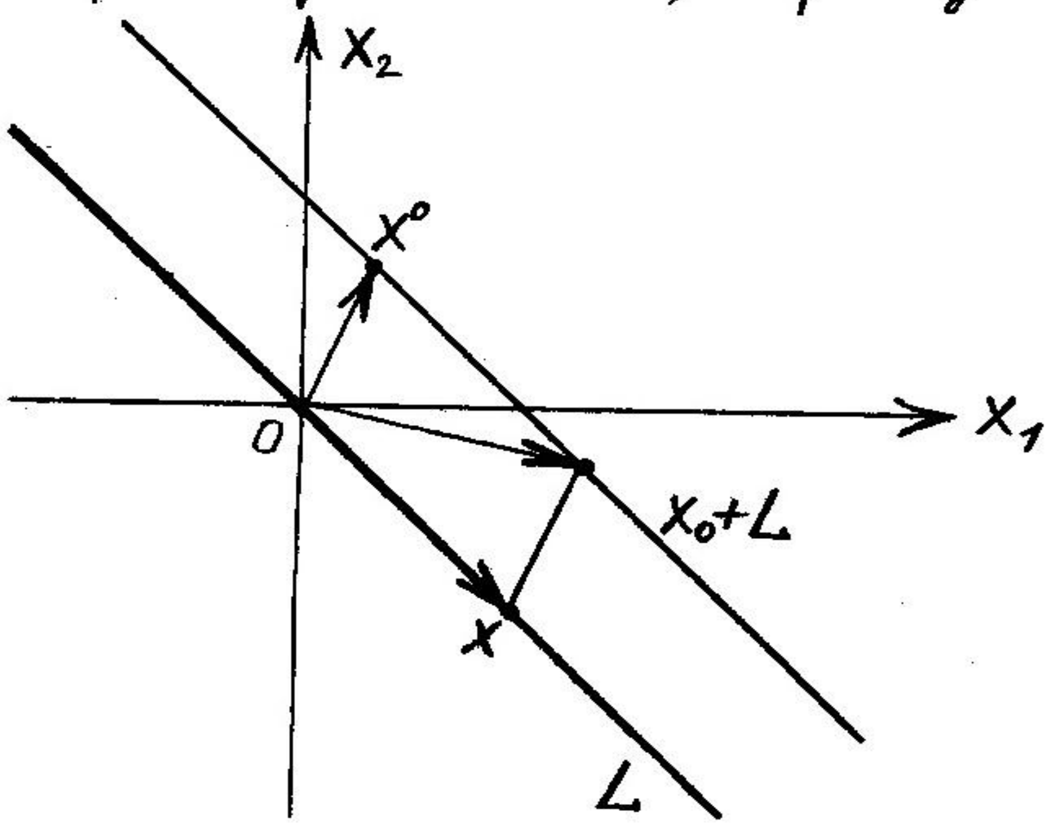
Линейное простр-во E/L наз-ся <u>фактор-пространством</u>.

Пример $E = \mathbb{R}^2$,

$L = \{ x = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$.

$x^0 + L = \{ x = (x_1^0 + x_1, x_2^0 + x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \}$

— фактор-класс, порожд-й элем-м x^0.



8. Топологический изоморфизм. Прямые суммы

Топологический изоморфизм пространств

Пусть E, F – линейные пространства. Пространства E и F изоморфны, если существует линейное взаимно однозначное отображение $T\colon E \to F$, называемое изоморфизмом. Если E, F – линейные нормированные пространства, то говорят, что они **топологически изоморфны**, если существует непрерывный изоморфизм $T\colon E \to F$, для которого обратный оператор T^{-1} также непрерывен. В этом случае T называют **топологическим изоморфизмом**.

Если пространства E и F топологически изоморфны и одно из них банахово, то и второе также является банаховым.

Теорема *Если $T : E \to F$ – линейное непрерывное взаимно однозначное отображение банаховых пространств, то T – топологический изоморфизм.*

Пусть E – линейное пространство и E_1, E_2 – его подпространства. Говорят, что пространство E разлагается в **алгебраическую прямую сумму** подпространств E_1 и E_2, и пишут $E = E_1 \oplus E_2$, если каждый элемент $x \in E$ единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Сумма $E = E_1 + E_2$ является прямой тогда и только тогда, когда $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Если E есть прямая сумма подпространств E_1, E_2, то каждое из подпространств E_1 и E_2 называется **алгебраическим дополнением** другого. Известно, что каждое подпространство в линейном пространстве имеет по крайней мере одно алгебраическое дополнение[1].

Предположим теперь, что E – нормированное пространство, которое разложено в прямую сумму своих подпространств: $E = E_1 \oplus E_2$. Это разложение задает линейные отображения

$$P_i\colon E \to E_i, \qquad P_i x = P(x_1 + x_2) = x_i, \quad i = 1, 2,$$

которые называются проекторами. Отображения P_i, вообще говоря, могут оказаться не непрерывными. Поскольку $x = P_1x + P_2x$, то из непрерывности одного отображения вытекает непрерывность другого.

Сумма $E = E_1 \oplus E_2$ называется **топологической прямой суммой**, если один из проекторов P_i (а значит, и второй) является непрерывным. В этом случае каждое из подпространств E_1 и E_2 называется **топологическим дополнением** другого.

9. Линейные фредгольмовы операторы

Пусть E, F – вещественные банаховы пространства. Обозначим через $L(E,F)$ пространство непрерывных линейных операторов $A\colon E \to F$.

Пусть $A \in L(E,F)$. **Ядром** оператора A называется векторное пространство

$$\mathrm{Ker}\ A = \{x \in E : Ax = 0\}$$

и **образом** оператора A – векторное пространство

$$\mathrm{Im}\, A = \{y \in F : Ax = y \text{ для некоторого } x \in E\}.$$

Фактор-пространство $\operatorname{Coker} A = F/\operatorname{Im} A$ называют **коядром** оператора A.

Через $\dim V$ далее обозначается размерность векторного пространства V (возможно, даже бесконечная).

Определение 1. *Линейный оператор $A \in L(E, F)$ называется* **фредгольмовым**, *если*

1. $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$;
2. $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$.

Индексом *фредгольмова оператора A называется число*

$$\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A.$$

Обозначим через $\Phi(E,F)$ множество всех фредгольмовых операторов $A \in L(E,F)$ и через $\Phi_n(E,F)$ его подмножество, состоящее из фредгольмовых операторов индекса n.

Теорема *Если* $A \in \Phi(E,F)$, *тогда образ* $\operatorname{Im} A$ – *замкнутое подпространство в* F *и найдется конечномерное подпространство* $F_2 \subset F$, *которое является топологическим дополнением к* $\operatorname{Im} A$.

Определение *Оператор* $K \in L(E, F)$ *называют* **конечномерным** *оператором (или оператором конечного ранга), если* $\dim \operatorname{Im} K < \infty$.

Напомним, что множество относительно компактно, если его замыкание компактно.

Определение *Оператор* $C \in L(E, F)$ *называют* **компактным**[1] *оператором, если* C *отображает шар* $B_1(0) \subset E$ *радиуса* 1 *с центром в нуле (а значит, и каждое ограниченное подмножество из* E*) в относительно компактное подмножество пространства* F.

[1] Часто такие операторы называют **вполне непрерывными.**

Обозначим через $C(E,F)$ подмножество $L(E,F)$, состоящее из компактных операторов, и через $K(E,F)$ подмножество конечномерных операторов. Очевидно, что всякий конечномерный оператор является компактным, следовательно $K(E,F) \subset C(E,F)$. В случае, когда $E = F$, вместо обозначений $L(E,F)$, $C(E,F)$, $K(E,F)$ будем использовать обозначения $L(E)$, $C(E)$, $K(E)$. Отметим также простой, но часто используемый факт, что сумма и произведение конечномерных (компактных) операторов является конечномерным (компактным) оператором, а также произведение конечномерного (компактного) оператора и непрерывного оператора в любом порядке дает снова конечномерный (компактный) оператор.

Рассмотрим подмножество в $L(E)$, состоящее из конечномерных возмущений тождественного отображения, а именно, операторов вида $I+K$, где $K \in K(E)$ – конечномерный оператор, и подмножество в $L(E)$, состоящее операторов вида $I+C$, где $C \in C(E)$ – компактный оператор. Покажем, что эти подмножества являются подмножествами множества фредгольмовых операторов нулевого индекса.

Лемма *Пусть E – банахово пространство и $K \in K(E)$ – конечномерный оператор. Тогда оператор $I+K$ фредгольмов и* $\mathrm{ind}(I+K)=0$.

Теорема *Пусть E – банахово пространство и $C \in C(E)$. Тогда $I+C \in \Phi(E)$ и* $\mathrm{ind}(I+C)=0$.

Литература

1. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т., Ратинер Н.М. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства. Учебное пособие

2. Смагин В.В. Линейные операторы и функционалы. Учебное пособие

https://vk.com/fredholm