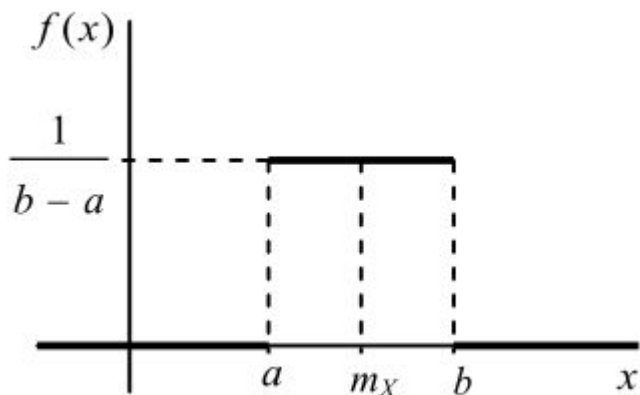


Некоторые виды распределений непрерывных случайных величин

1. Равномерное распределение
2. Показательное (экспоненциальное) распределение
3. Нормальное распределение
4. Распределения, основанные на нормальном

Равномерное распределение

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , если на интервале (a, b) , которому принадлежат все возможные значения X , плотность сохраняет постоянное значение, а именно $f(x)=1/(b-a)$; вне этого интервала $f(x)=0$.



Кривая равномерного распределения

Найдем вид функции распределения: поскольку вне отрезка $[a, b]$ $f(x)=0$, то при $x < a$ $F(x)=0$, при $x > b$ $F(x)=1$; для $x \in (a, b)$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_a^x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^x = \frac{1}{b-a} (x-a).$$

Таким образом функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a} (x-a) & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases} |$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию равномерно распределенной случайной величины X :

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b+a}{2},$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

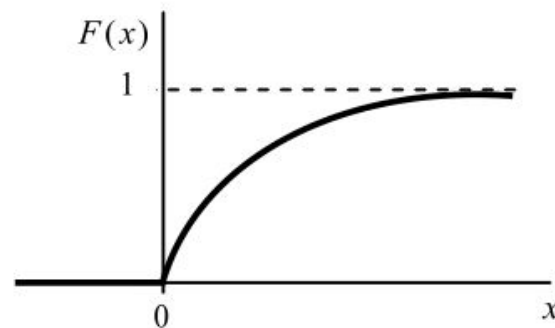
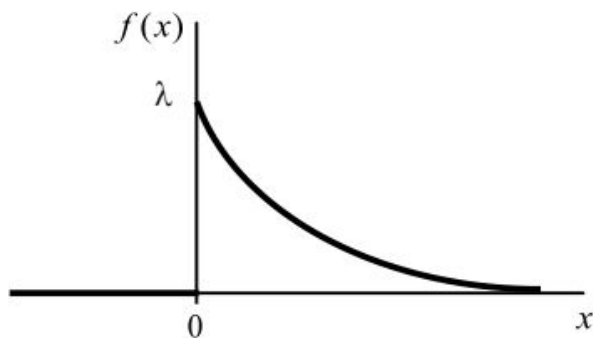
2. Показательное распределение и его числовые характеристики. Функция надежности.

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$



*Вероятность попадания в интервал (a, b)
непрерывной случайной величины X ,
распределенной по показательному закону,
 $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.*

*Математическое ожидание, дисперсия и среднее
квадратическое отклонение показательного
распределения зависят лишь от значения
параметра λ и соответственно равны
 $M(X) = 1/\lambda$, $D(X) = 1/\lambda^2$, $\sigma(X) = 1/\lambda$.*

Элементом называют некоторое устройство, независимо от того, «простое» оно или «сложное». Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а в момент t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину — длительность времени безотказной работы элемента, а через λ — интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0)$$

определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t .

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t :

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

3. Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , плотность которого имеет вид

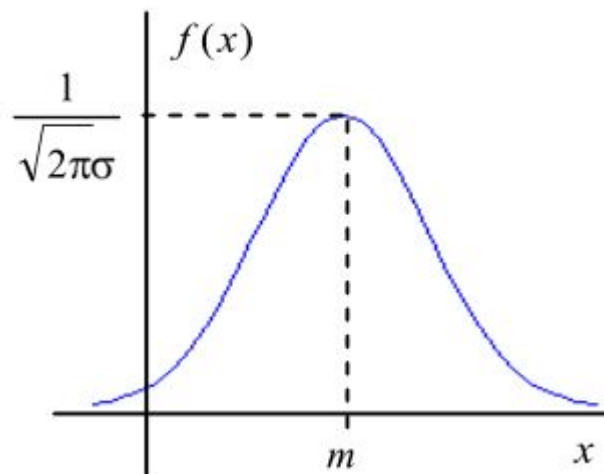
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)},$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X .

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.



Кривая нормального распределения

Положение кривой распределения и ее форма полностью определяются параметрами m и σ .

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β определяются следующим образом:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left. \begin{array}{l} \text{замена :} \\ t = \frac{x-m}{\sigma} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.