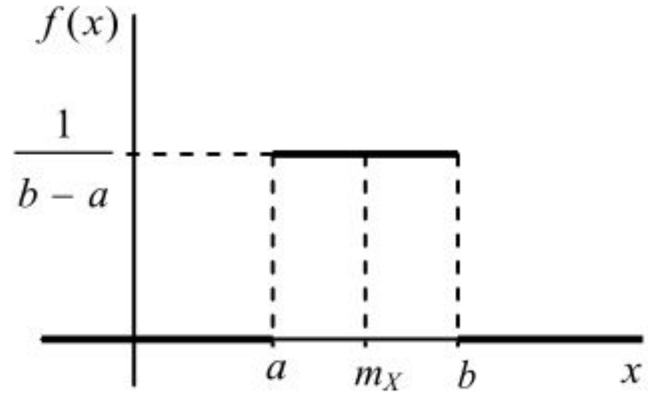
Некоторые виды распределений непрерывных случайных величин

1. Равномерное распределение
2. Показательное (экспоненциальное) распределение
3. Нормальное распределение
4. Распределения, основанные на нормальном

Равномерное распределение

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения X, плотность сохраняет постоянное значение, а именно f(x)=1/(b-a); вне этого интервале f(x)=0.



Кривая равномерного распределения

Найдем вид функции распределения: поскольку вне отрезка [a, b] f(x)=0, то при x<a F(x)=0, при x>b F(x)=1; для x∈(a, b) имеем

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{(b-a)}dx=\frac{1}{b-a}x\Big|_{a}^{x}=\frac{1}{b-a}(x-a).$$

Таким образом функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le a, \\ \dfrac{1}{b-a}(x-a) & \text{при} \quad a<x\le b, \\ 1 & \text{при} \quad x>b. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию равномерно распределенной случайной величины X:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{b+a}{2},$$

$$\mathrm{D(X(} = \int_a^b \mathrm{x}^2 \mathrm{f(x)dx} - [\mathrm{M(X)}]^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

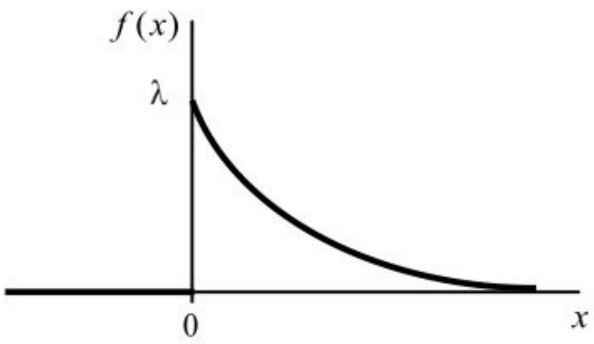
2. Показательное распределение и его числовые характеристики. Функция надежности.

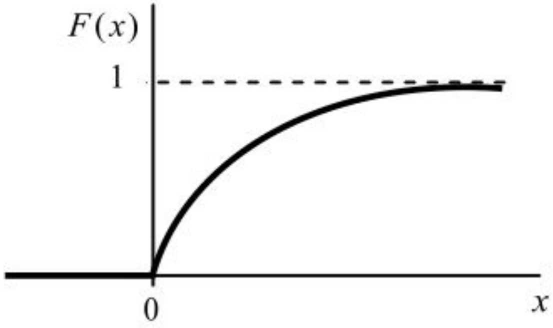
Показательным (экспоненциальным) *называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью*

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$$

Функция распределения показательного закона

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$





Вероятность попадания в интервал (a, b) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}- e^{-\lambda b}$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределения зависят лишь от значения параметра λ и соответственно равны

$M(X)=1/\lambda$, $D(X)=1/\lambda^2$, $\sigma(X)=1/\lambda$.

Элементом *называют некоторое устройство, независимо от того, «простое» оно или «сложное». Пусть элемент начинает работать в момент времени* $t_o = 0$, *а в момент t происходит отказ. Обозначим через Г непрерывную случайную величину— длительность времени безотказной работы элемента, а через λ — интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени).*

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t)=P(T<t\}=1 - e^{-\lambda t} \quad (\lambda>0)$$

определяет вероятность отказа элемента за время длительностью *t.*

Функцией надежности *R (t) называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:*

$$R(t)= e^{-\lambda t}.$$

3. Нормальное распределение

Нормальным *называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид*

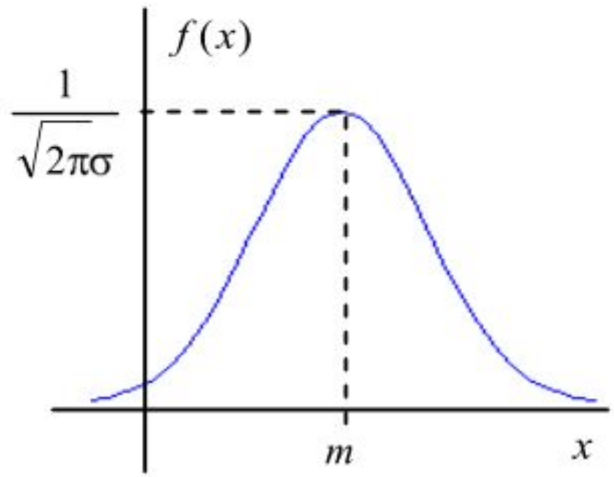
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)},$$

где a – математическое ожидание, σ - среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где Φ(x) – функция Лапласа.



Кривая нормального распределения

Положение кривой распределения и ее форма полностью определяются параметрами m *и* σ.

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β определятся следующим образом:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int^{\beta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{matrix} \text{замена :} \\ t = \dfrac{x-m}{\sigma} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.