

# Функции и их графики

## Задание №22

1. Постройте график функции  $y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$  и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$  не имеет с графиком ни одной общей точки.

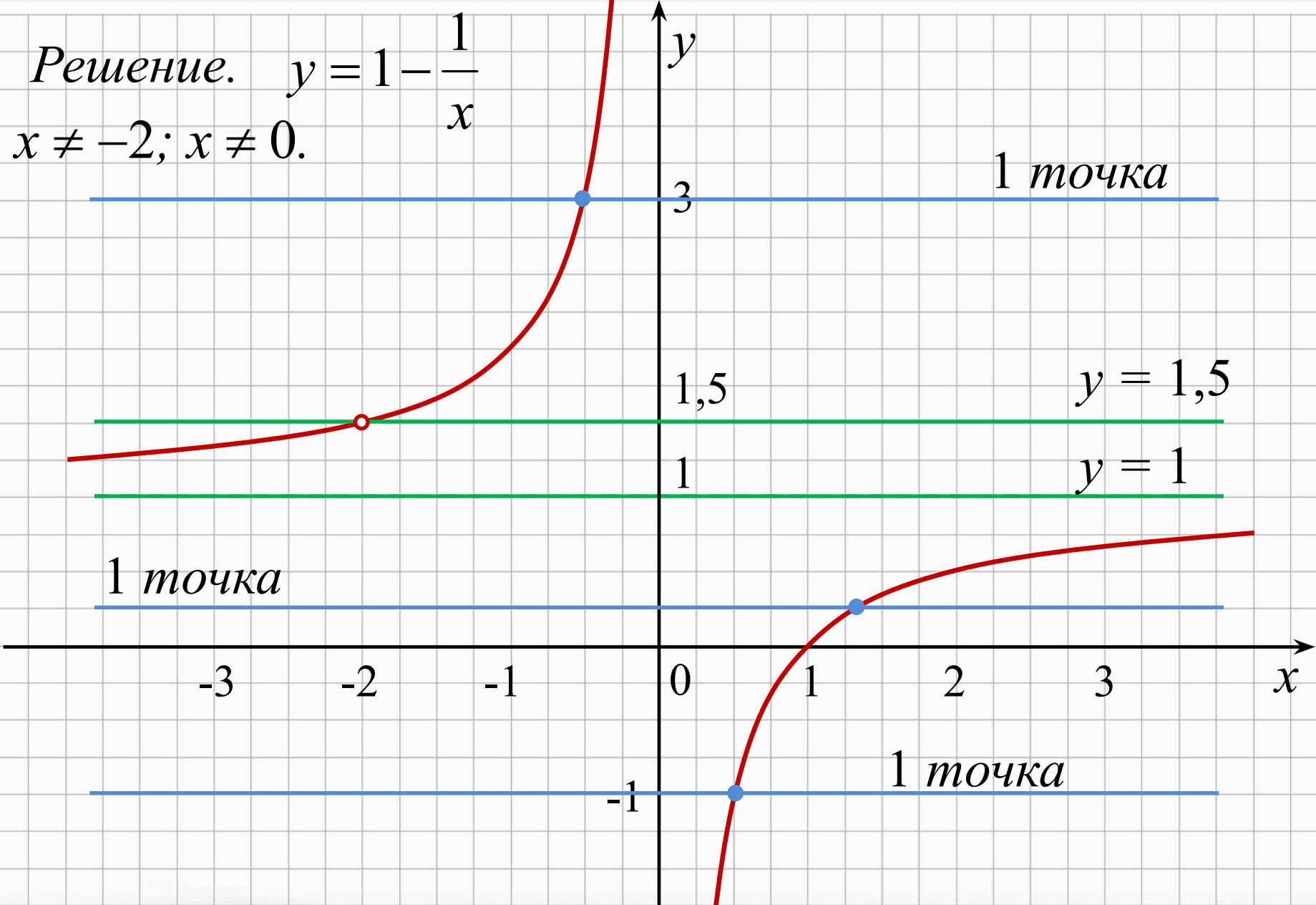
Решение.

$$y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$$

$$1 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 1 - \frac{x+2}{x(x+2)} = 1 - \frac{1}{x}$$

при условии  $x \neq 0$  и  $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  и  $x \neq -2$ .

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty).$$



Ответ:  $m = 1; m = 1,5.$

2. Постройте график функции  $y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$   
и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$   
имеет с графиком две общие точки.

*Решение.*

$$y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$$

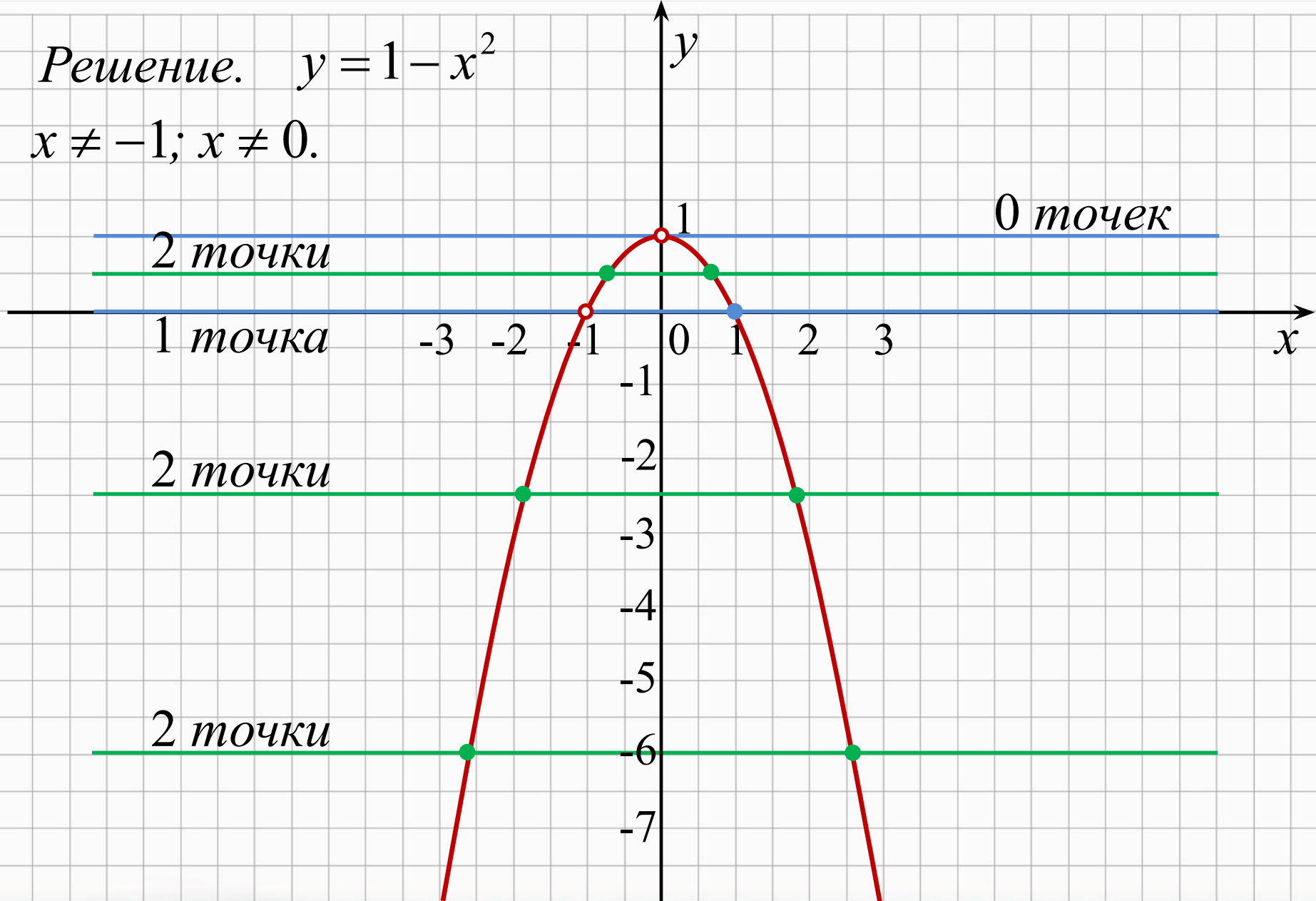
$$1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2} = 1 - \frac{x^3(x+1)}{x(x+1)} = 1 - x^2$$

при условии  $x \neq 0$  и  $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  и  $x \neq -1$ .

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Решение.  $y = 1 - x^2$

$x \neq -1; x \neq 0.$



Ответ:  $m < 0; 0 < m < 1.$

3. Постройте график функции  $y = \frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}$  и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y^4 = t$

имеет с графиком ровно одну общую точку.

*Решение.*

$$y = \frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}$$

$$\frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4} = \frac{(x+5)(x+4)(x+1)}{x+4} = (x+5)(x+1) =$$

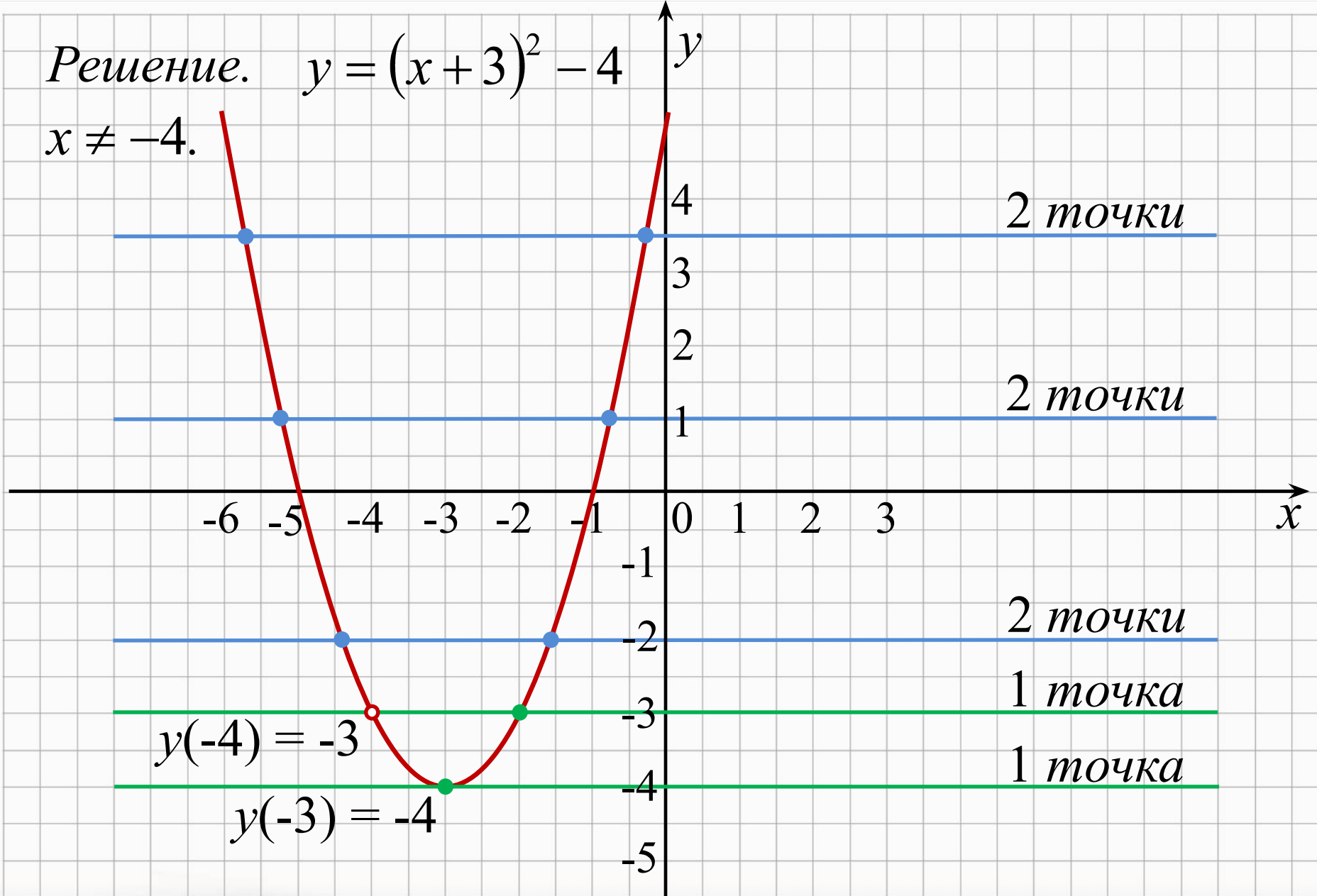
$$= x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$$

при условии  $x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$ .

$$D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty).$$

Решение.  $y = (x + 3)^2 - 4$

$x \neq -4$ .



Ответ:  $m = -4$ ;  $m = -3$ .

4. Постройте график функции  $y = |x^2 - x - 2|$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

*Решение.*

$$y = |x^2 - x - 2|$$

$$y_1 = x^2 - x - 2$$

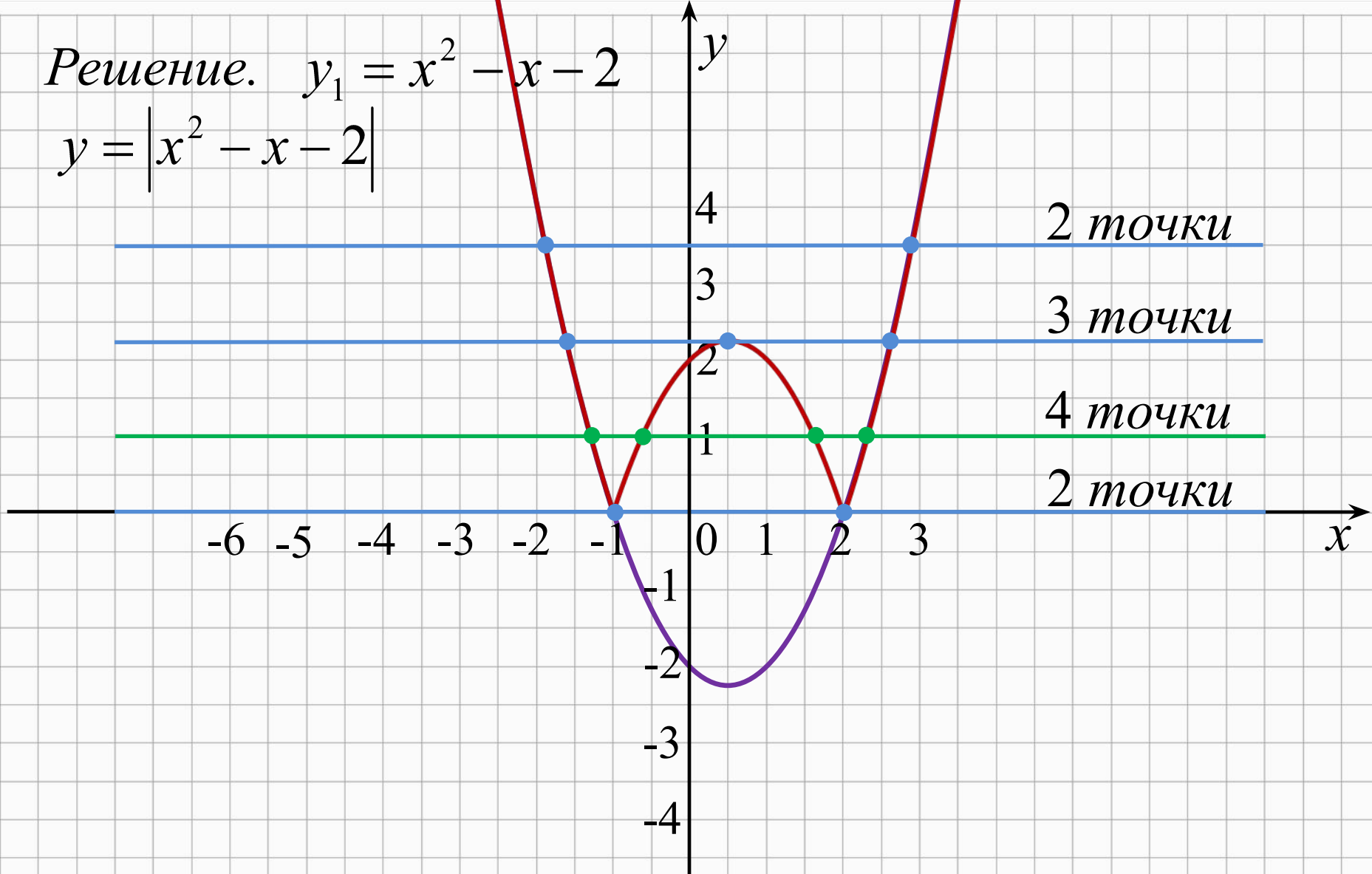
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}; \quad y_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{4}.$$

$x$	0	1	-1	2	3	-2
$y$	-2	-2	0	0	4	4



Решение.  $y_1 = x^2 - x - 2$

$$y = |x^2 - x - 2|$$



Ответ: наибольшее число точек пересечения равно 4 при  $0 < t < 2,25$ .

5. Постройте график функции  $y = x^2 - 6|x| + 8$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

*Решение.*

$$y = x^2 - 6|x| + 8 \Leftrightarrow y = |x|^2 - 6|x| + 8, \text{ т.к. } |x|^2 = x^2$$

$$y_1 = x^2 - 6x + 8$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3; \quad y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1.$$

$x$	0	6	1	5	2	4
$y$	8	8	3	3	0	0

Решение.  $y_1 = x^2 - 6x + 8$

$$y = |x|^2 - 6|x| + 8$$

2 точки

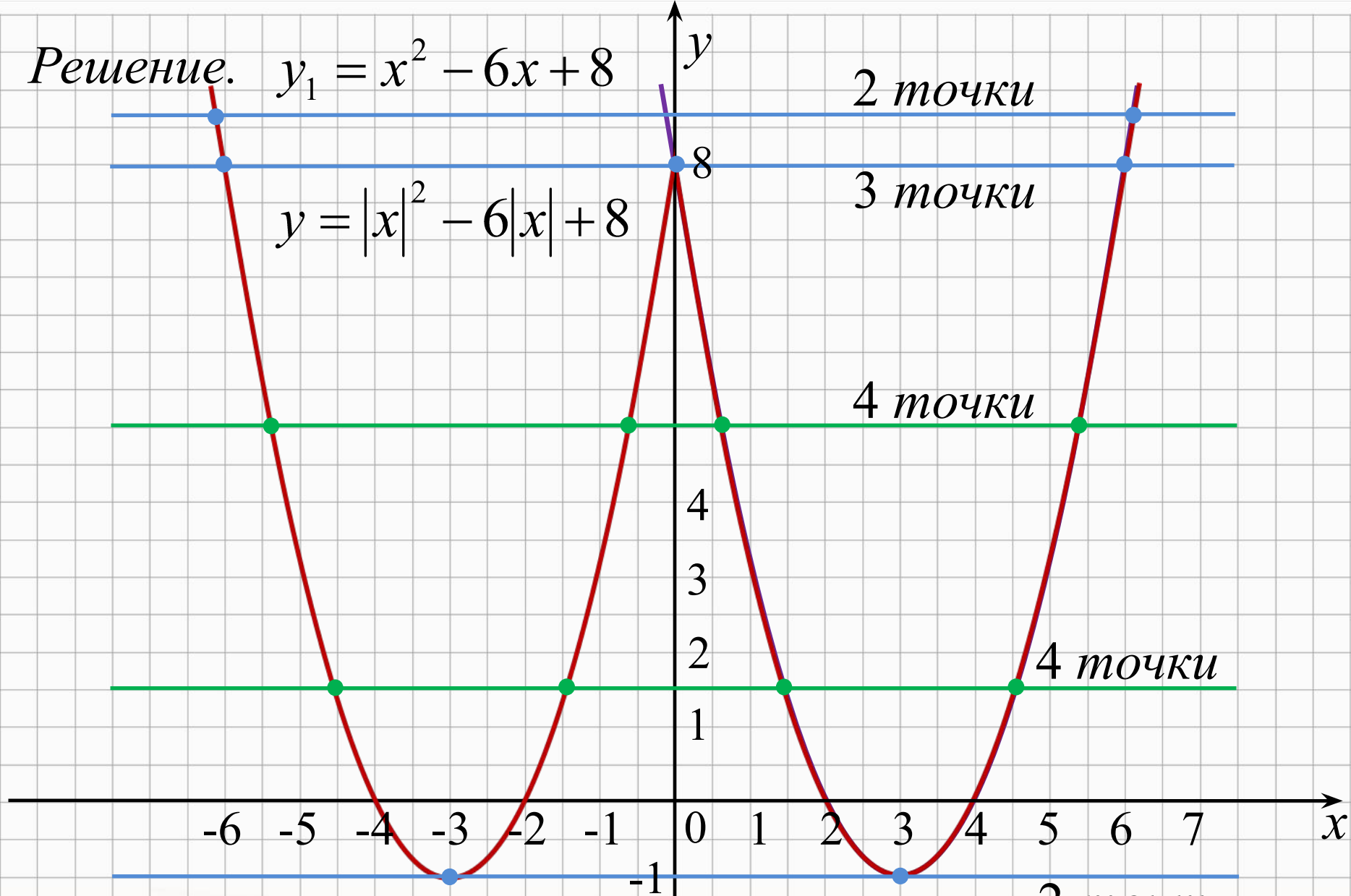
3 точки

4 точки

4 точки

0 точки

Ответ: наибольшее число точек пересечения равно 4 при  $-1 < t < 8$ .



6. Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3}$  и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$

имеет с графиком ровно одну общую точку.

*Решение.*

$$y = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-3)(x+2)(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-3)} =$$

$$= (x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10 = (x-1,5)^2 - 12,25.$$

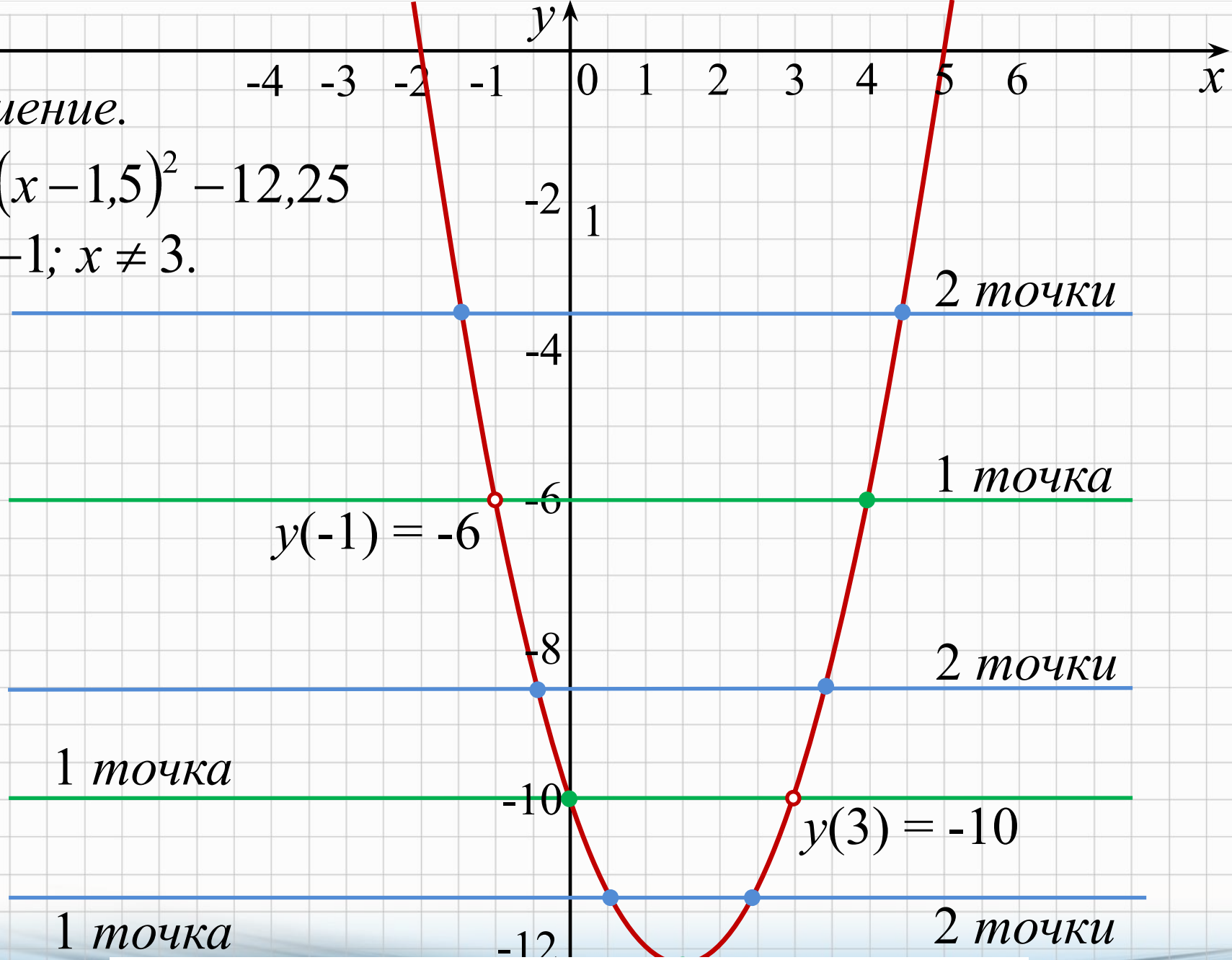
при условии  $x+1 \neq 0$ ,  $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$  и  $x \neq 3$ .

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty).$$

Решение.

$$y = (x - 1,5)^2 - 12,25$$

$$x \neq -1; x \neq 3.$$



Ответ:  $m = -12,25$ ;  $m = -10$ ;  $m = -6$ .

7. Постройте график функции  $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$   
и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$

имеет с графиком ровно две общие точки.

*Решение.*

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

$$y_1 = x^2 - 4x + 6$$

$$y_2 = 3x$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

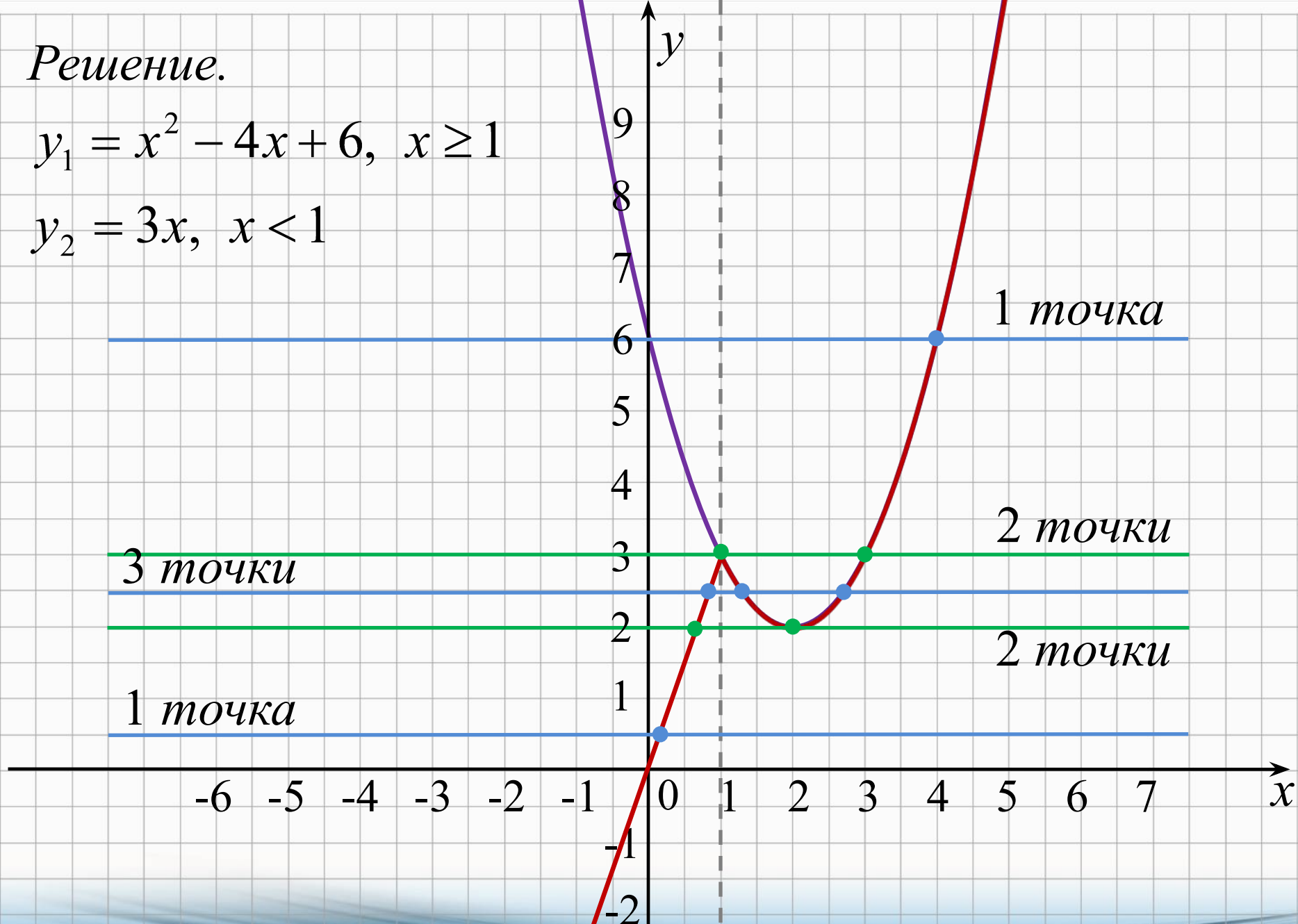
$x$	0	-2
$y$	0	-6

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2.$$

*Решение.*

$$y_1 = x^2 - 4x + 6, \quad x \geq 1$$

$$y_2 = 3x, \quad x < 1$$



*Ответ:  $m = 2$ ;  $m = 3$ .*

8. Найдите все значения  $k$ , при каждом из которых прямая  $y = kx$  имеет с графиком функции  $y = x^2 + 4$  ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

*Решение.*

Другими словами, нужно найти все значения  $k$ , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = x^2 + 4, \\ y = kx; \end{cases}$$

$$kx = x^2 + 4$$

$$x^2 - kx + 4 = 0$$

$$D = k^2 - 16$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 4.$$

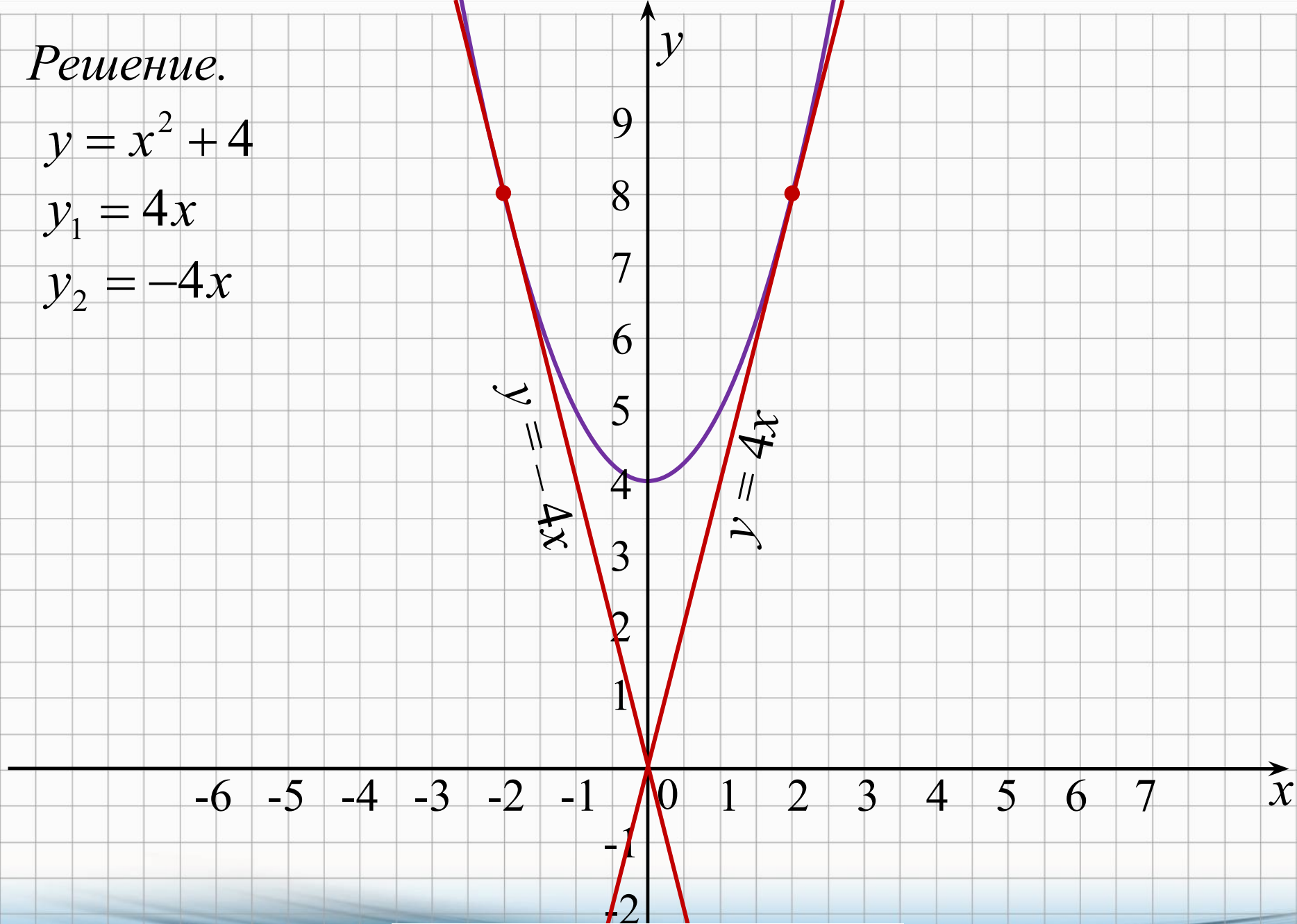


*Решение.*

$$y = x^2 + 4$$

$$y_1 = 4x$$

$$y_2 = -4x$$



*Ответ:  $k = 4$ ;  $k = -4$ .*

9. Найдите все значения  $k$ , при каждом из которых прямая  $y = kx$  имеет с графиком функции  $y = -x^2 - 1$  ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

*Решение.*

Другими словами, нужно найти все значения  $k$ , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 1, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = -x^2 - 1, \\ y = kx; \end{cases}$$

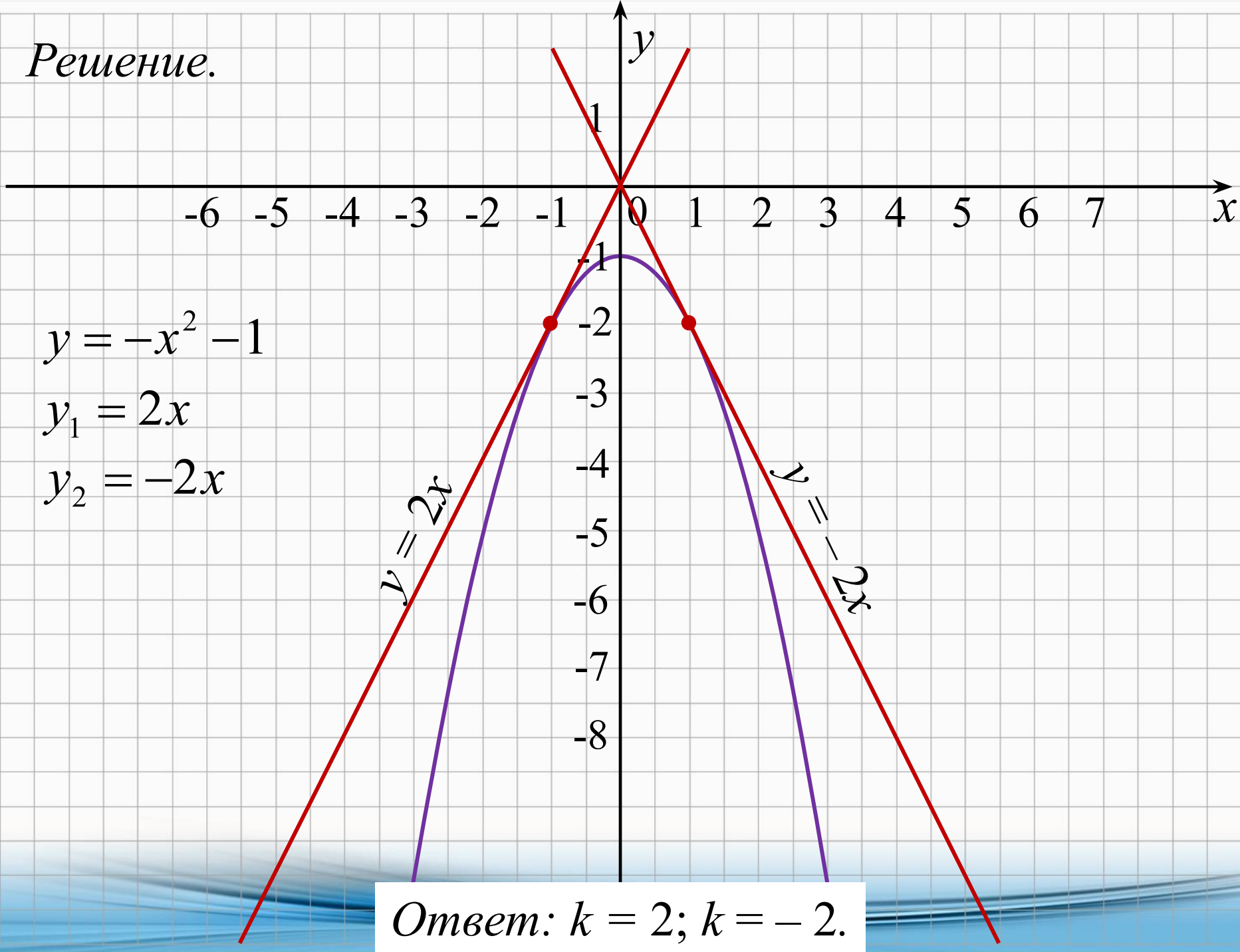
$$kx = -x^2 - 1$$

$$x^2 + kx + 1 = 0$$

$$D = k^2 - 4$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

*Решение.*



$$y = -x^2 - 1$$

$$y_1 = 2x$$

$$y_2 = -2x$$

*Ответ:  $k = 2; k = -2.$*

**10.** Найдите  $p$  и постройте график функции  $y = x^2 + p$  если известно, что прямая  $y = 6x$  имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

*Решение.*

Другими словами, нужно найти все значения  $p$ , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = x^2 + p, \\ y = 6x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = x^2 + p, \\ y = 6x; \end{cases}$$

$$6x = x^2 + p$$

$$x^2 - 6x + p = 0$$

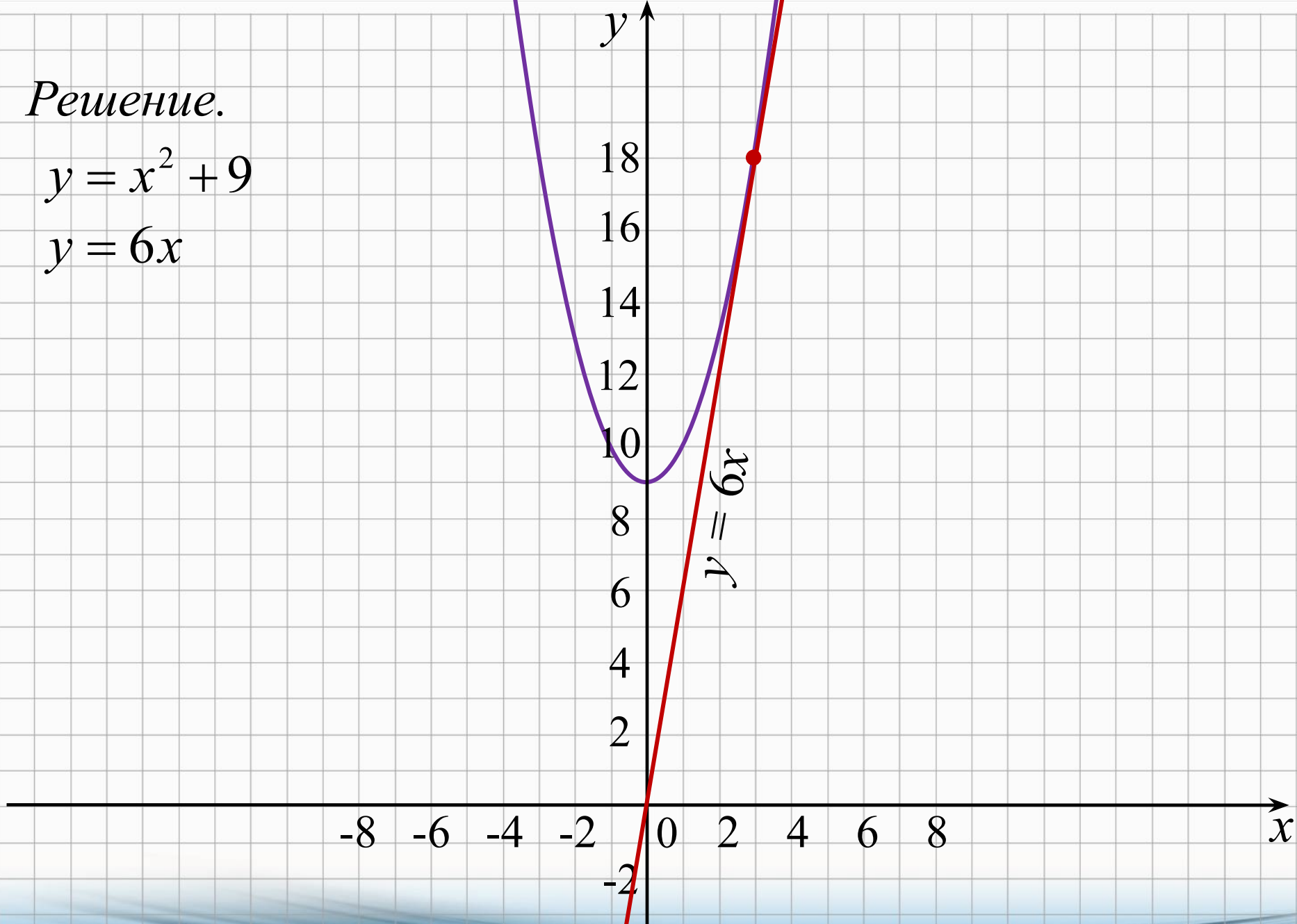
$$D = 36 - 4p$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow 36 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 9.$$

*Решение.*

$$y = x^2 + 9$$

$$y = 6x$$



*Ответ:  $p = 9$ .*

11. Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1}$  и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$

не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1}$$
$$\frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1} = \frac{x(x + 1)|x|}{x + 1} = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

при условии  $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ .

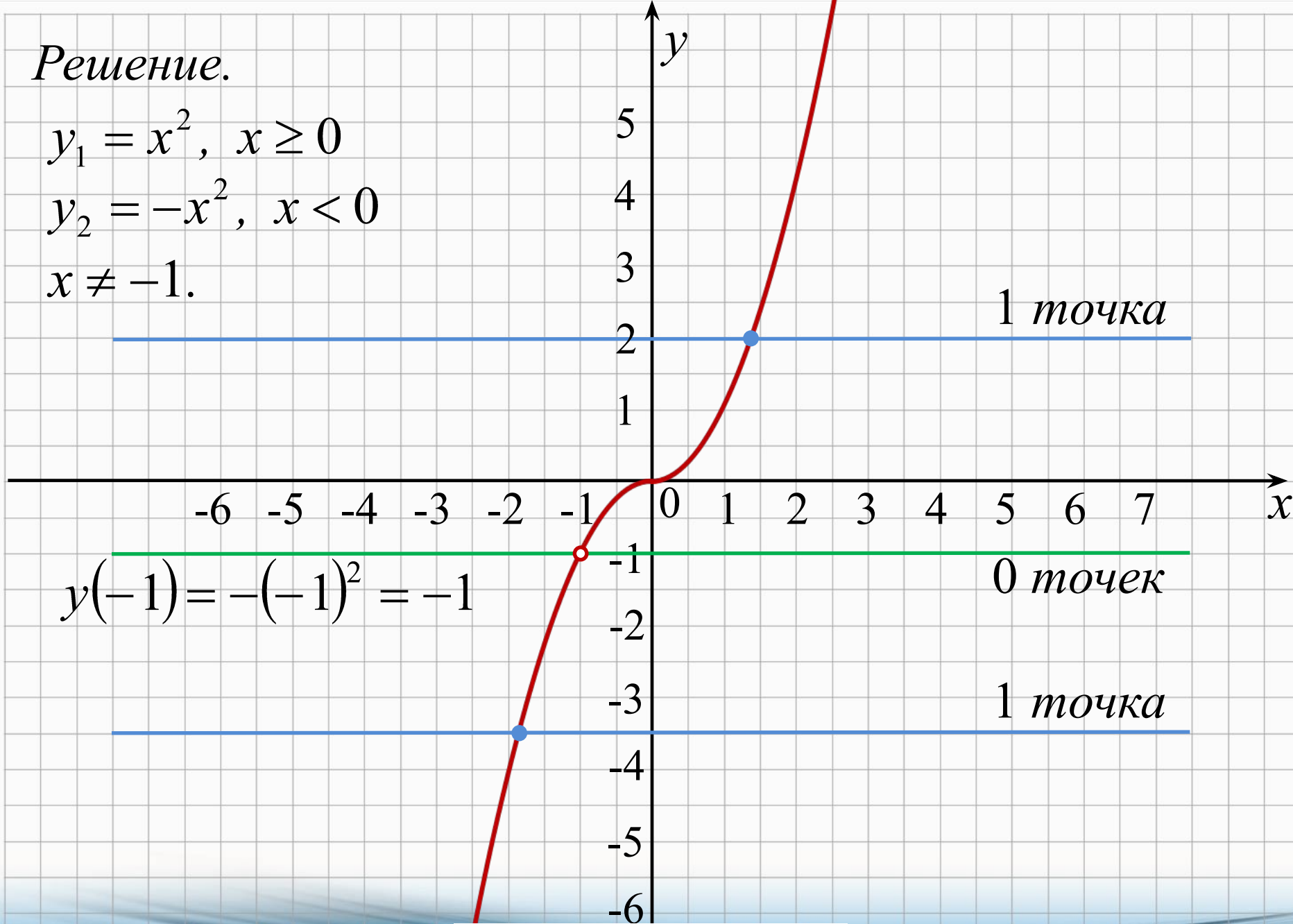
$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

*Решение.*

$$y_1 = x^2, \quad x \geq 0$$

$$y_2 = -x^2, \quad x < 0$$

$$x \neq -1.$$



$$y(-1) = -(-1)^2 = -1$$

*1 точка*

*0 точек*

*1 точка*

*Ответ:  $m = -1$ .*

12. Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 - 2x)|x|}{x - 2}$  и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $\frac{x-2}{y} = t$

не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 - 2x)|x|}{x - 2}$$

$$D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$$

$$\frac{(x^2 - 2x)|x|}{x - 2} = \frac{x(x - 2)|x|}{x - 2} = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{при условии } x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

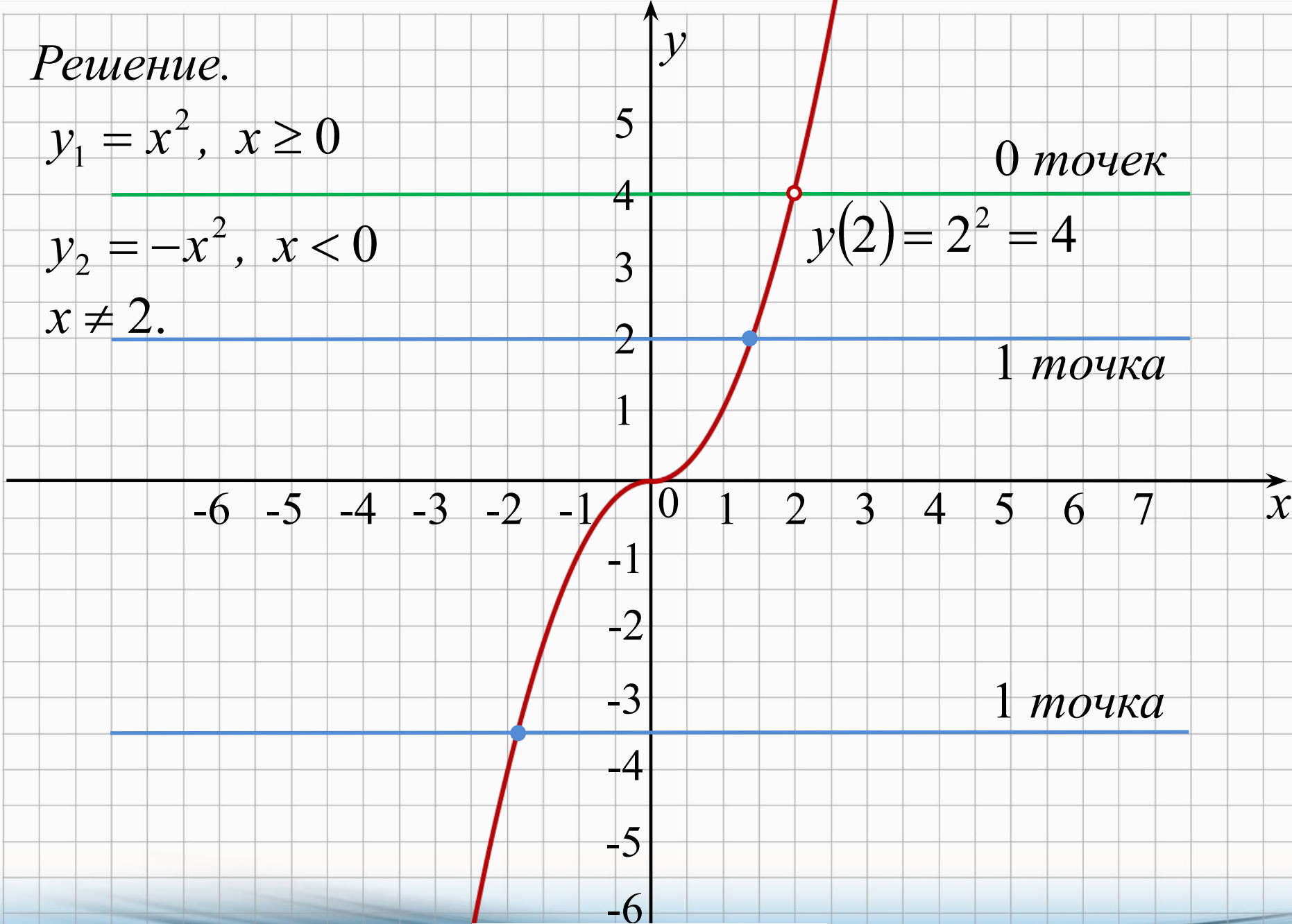


*Решение.*

$$y_1 = x^2, \quad x \geq 0$$

$$y_2 = -x^2, \quad x < 0$$

$$x \neq 2.$$



*Ответ:  $m = 4$ .*

**13.** Постройте график функции  $y = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{если } x \geq -1, \\ x + 6, & \text{если } x < -1 \end{cases}$   
и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$

имеет с графиком ровно две общие точки.

*Решение.*

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{если } x \geq -1, \\ x + 6, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

$$y_1 = x^2 - 4x$$

$$y_2 = x + 6$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

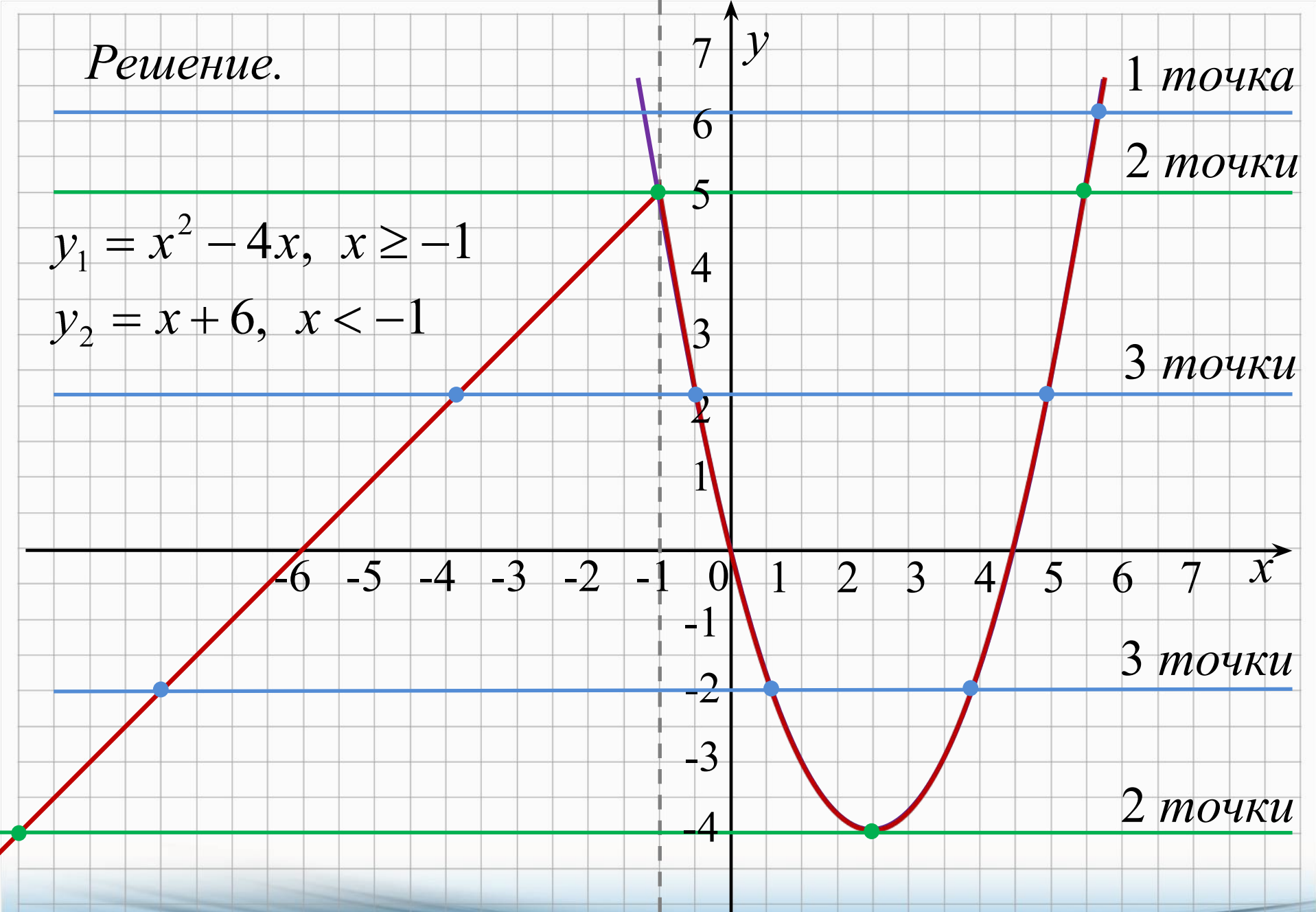
$x$	-2	-6
$y$	4	0

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4.$$

Решение.

$$y_1 = x^2 - 4x, \quad x \geq -1$$

$$y_2 = x + 6, \quad x < -1$$



Ответ:  $m = 5$ ;  $m = -4$ .

14. Постройте график функции  $y = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{если } x \geq -1, \\ -x - 8, & \text{если } x < -1 \end{cases}$  и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$

имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{если } x \geq -1, \\ -x - 8, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

$$y_1 = 6x - x^2$$

$$y_2 = -x - 8$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3;$$

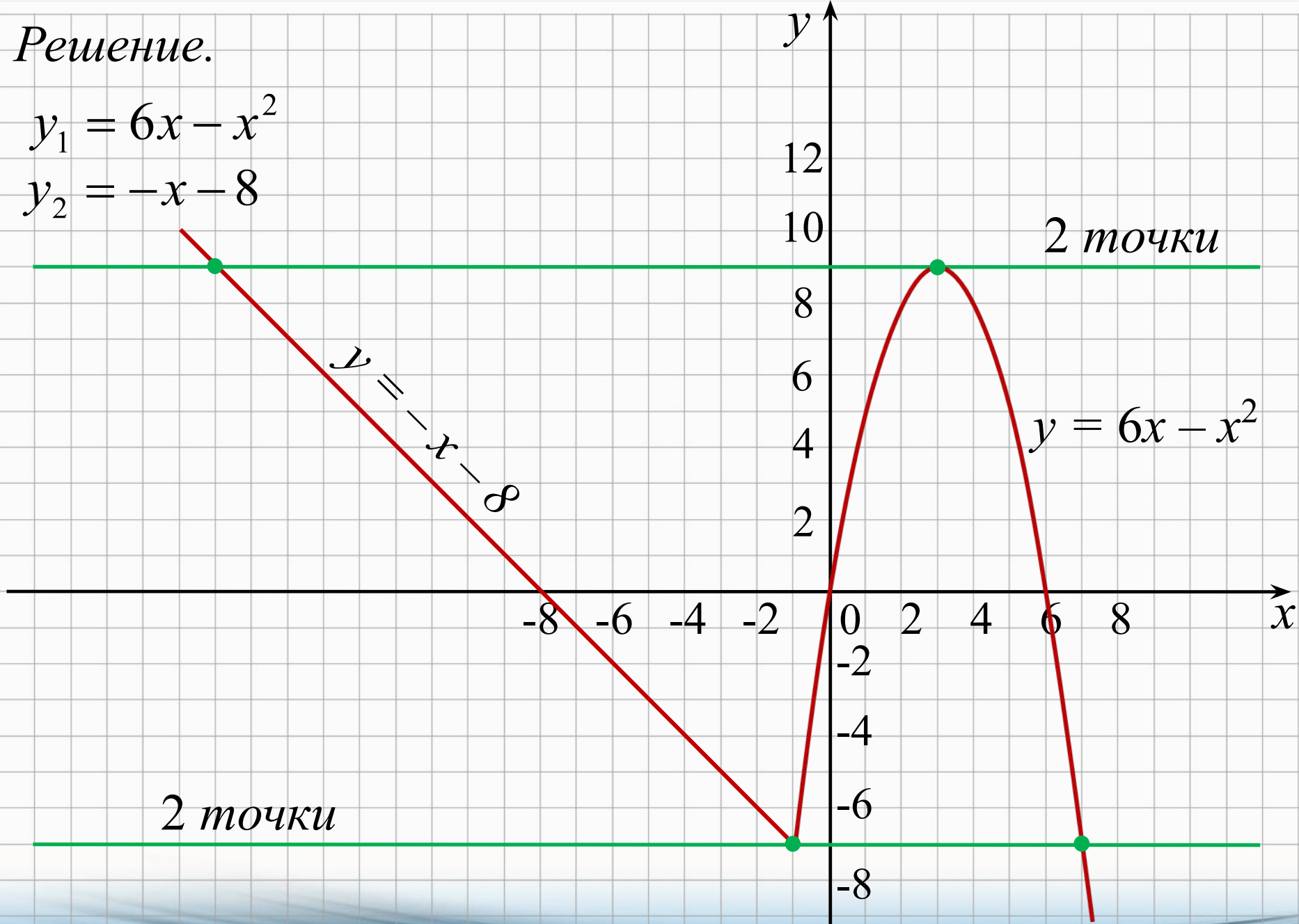
$$y_0 = 6 \cdot 3 - 3^2 = 9.$$

$x$	-2	-8
$y$	-6	0

Решение.

$$y_1 = 6x - x^2$$

$$y_2 = -x - 8$$



Ответ:  $m = 9$ ;  $m = -7$ .

**15.** Постройте график функции  $y = \frac{(x^2 + 9)(x - 1)}{1 - x}$  и определите, при каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком ровно одну общую точку.

*Решение.*

$$y = \frac{(x^2 + 9)(x - 1)}{1 - x} \quad D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$\frac{(x^2 + 9)(x - 1)}{1 - x} = \frac{(x^2 + 9)(x - 1)}{-(x - 1)} = -x^2 - 9$$

при условии  $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$

*Решение.*

*Другими словами, нужно найти все значения  $k$ , при каждом из которых система имеет одно решение:*

$$\begin{cases} y = -x^2 - 9, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = -x^2 - 9, \\ y = kx; \end{cases}$$

$$kx = -x^2 - 9$$

$$x^2 + kx + 9 = 0$$

$$D = k^2 - 36$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 6;$$

$$\text{и при } x = 1, y = -1 - 9 = -10 \Rightarrow -10 = k \cdot 1 \Rightarrow k = -10.$$

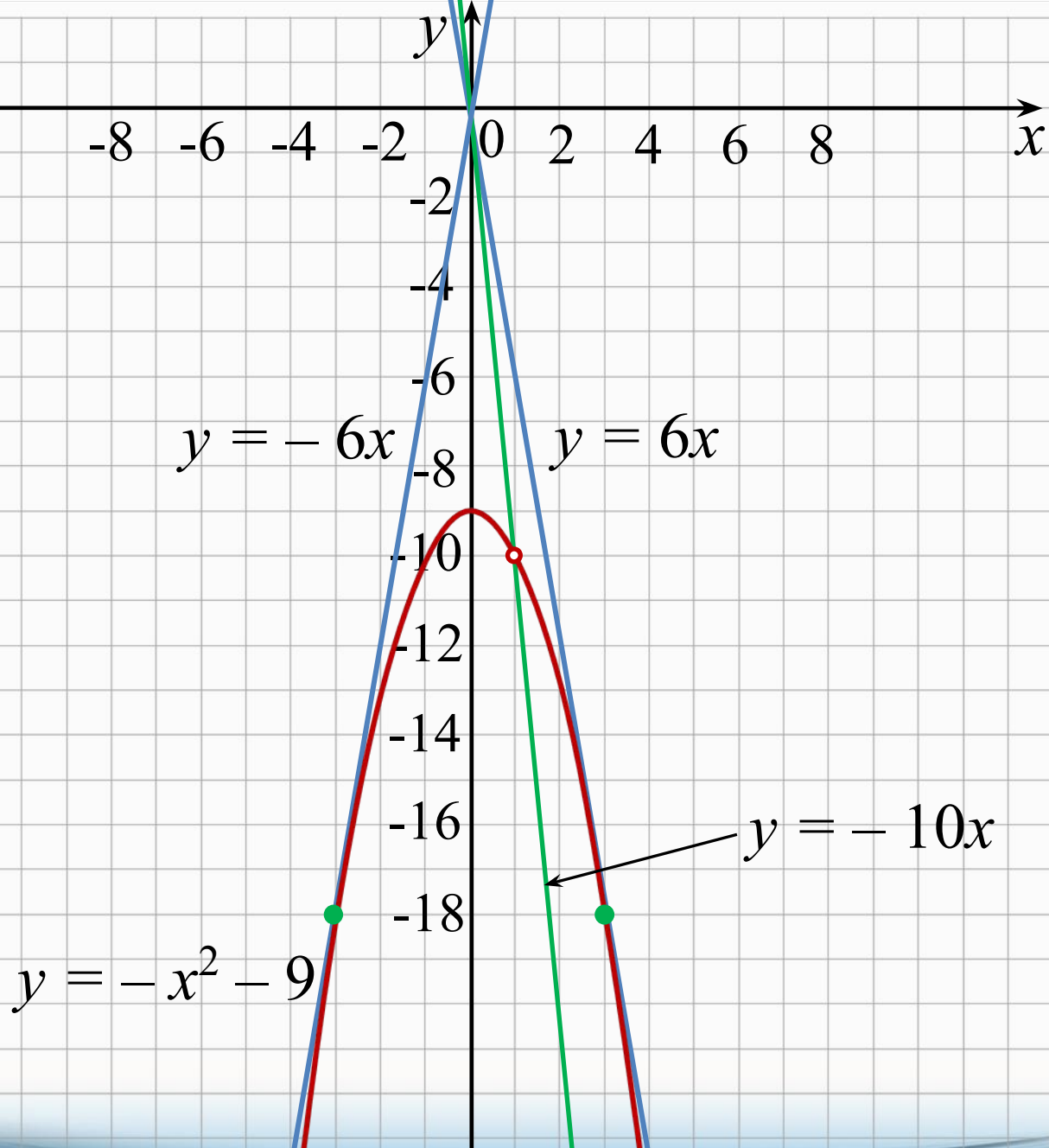
Решение.

$$y_1 = -x^2 - 9$$

$$y_2 = -6x$$

$$y_3 = 6x$$

$$y_4 = -10x$$



Ответ:  $k = 6$ ;  $k = -6$ ;  $k = -10$ .



**16.1.** Постройте график функции  $y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x < -1, \\ -1,5x + 4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 1,5x - 7,5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$

и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$  имеет с графиком ровно две общие точки.

*Решение.*

$$y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x < -1, \\ -1,5x + 4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 1,5x - 7,5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

$$y_1 = x - 3$$

$$y_2 = -1,5x + 4,5$$

$$y_3 = 1,5x - 7,5$$

$x$	-2	-3
$y$	-5	-6

$x$	3	4
$y$	0	-1,5

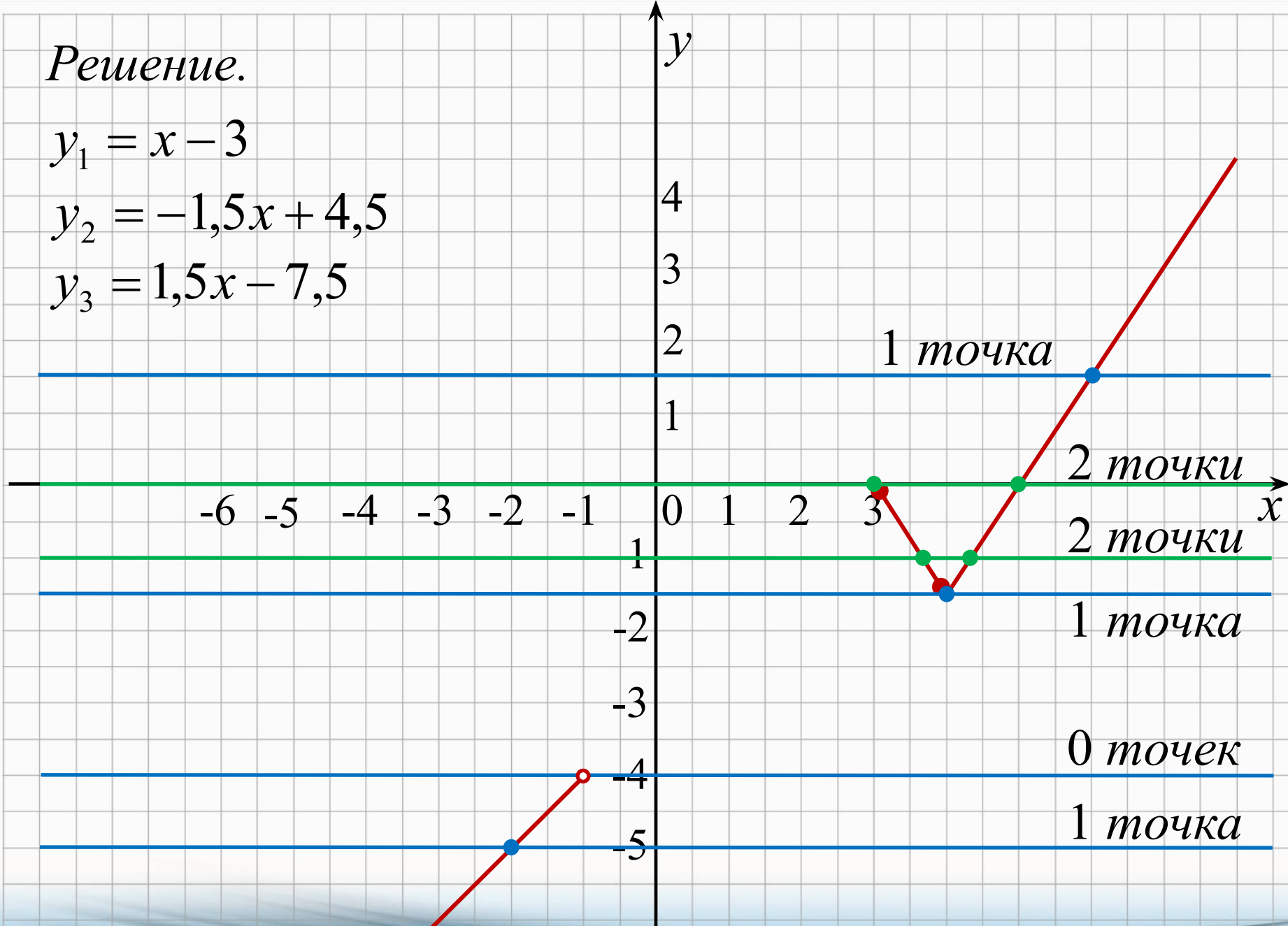
$x$	5	7
$y$	0	3

*Решение.*

$$y_1 = x - 3$$

$$y_2 = -1,5x + 4,5$$

$$y_3 = 1,5x - 7,5$$



*Ответ:*  $-1,5 < m \leq 0$ .

**16.2.** Постройте график функции  $y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x < 3, \\ -1,5x + 4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 1,5x - 7,5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$

и определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$  имеет с графиком ровно две общие точки.

*Решение.*

$$y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x < 3, \\ -1,5x + 4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4 \\ 1,5x - 7,5, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

$$y_1 = x - 3$$

$$y_2 = -1,5x + 4,5$$

$$y_3 = 1,5x - 7,5$$

$x$	2	-3
$y$	-1	-6

$x$	3	4
$y$	0	-1,5

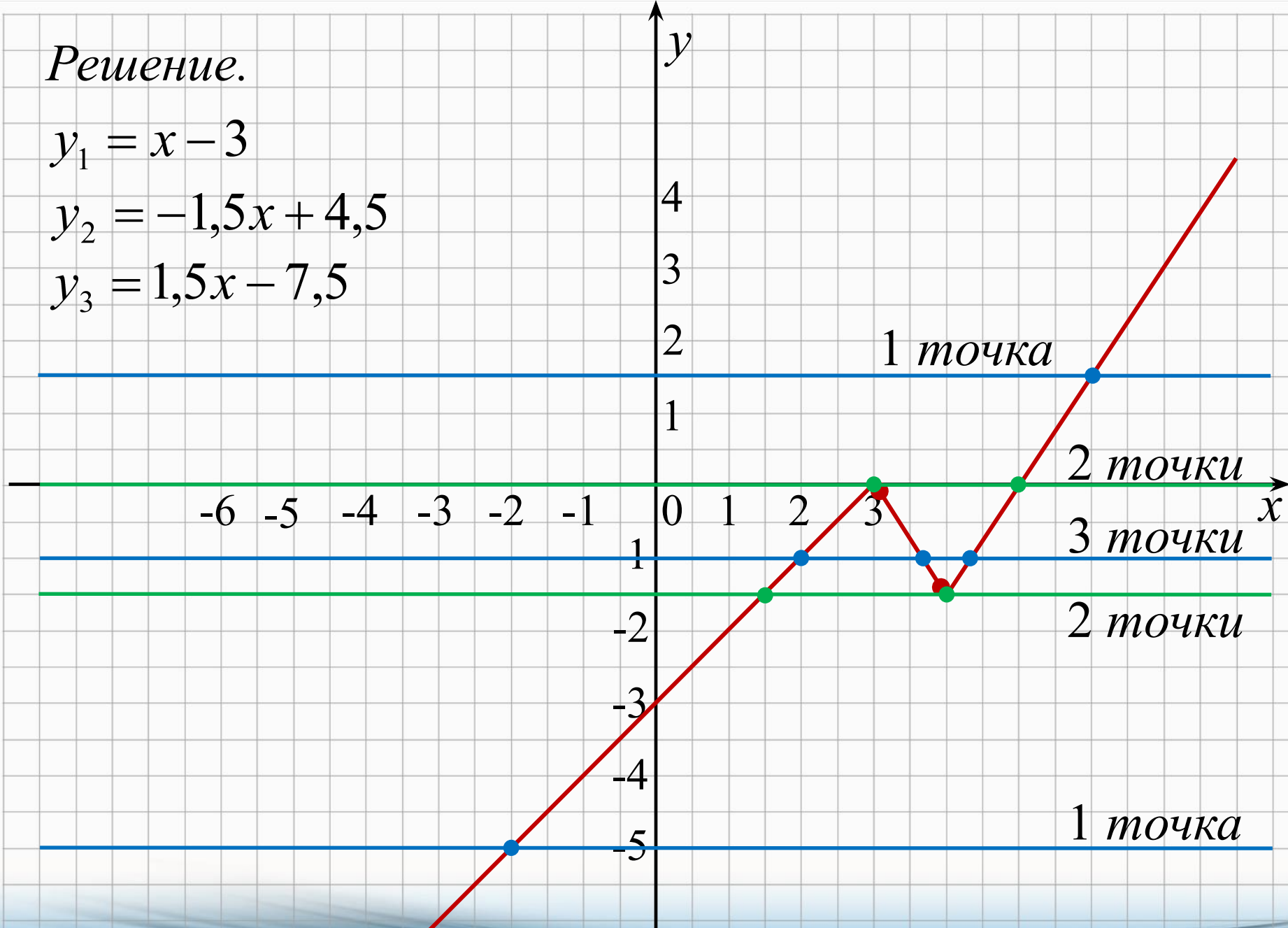
$x$	5	7
$y$	0	3

*Решение.*

$$y_1 = x - 3$$

$$y_2 = -1,5x + 4,5$$

$$y_3 = 1,5x - 7,5$$



*Ответ:  $m = -1,5$ ;  $m = 0$ .*

# Использованы ресурсы

- <http://www.mathgia.ru/or/gia12/Main.html> - открытый банк заданий ОГЭ по математике

*Продолжение следует!*