

Частные производные
второго порядка. Первый и
второй дифференциалы.
Локальный экстремум.
Условный экстремум.

Лекция 17

Производные второго порядка функции нескольких переменных

Пусть для функции $z = f(x, y)$ в каждой точке некоторой области существуют первые частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые в свою очередь дифференцируемы. Тогда **определены производные второго порядка**:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \right\} - \text{вторая производная по } x \text{ при условии } y = \text{const}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} \right\} - \text{вторая производная по } y \text{ при условии } x = \text{const}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} \right\} - \text{смешанная производная при условии } y = \text{const}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \right\} - \text{смешанная производная при условии } x = \text{const}$$

Теорема. Если смешанные производные существуют в окрестности некоторой точки и непрерывны в самой точке, то они равны $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример: $z = e^{\frac{x}{y}} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^3} - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}$$

Производные второго порядка функции нескольких переменных. Дифференциал 2-го порядка

Для функции $f(x, y, z)$ определены производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \text{ при } y = \text{const}, z = \text{const}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \text{ при } x = \text{const}, z = \text{const} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} \text{ при } y = \text{const}, x = \text{const}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \text{ при } y = \text{const}, z = \text{const} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} \text{ при } y = \text{const}, z = \text{const}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\} \text{ при } x = \text{const}, z = \text{const}\end{aligned}$$

Дифференциалом второго порядка называют дифференциал от дифференциала первого порядка $d^2 f(M) = d(df(M))$:

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy$$

$$\begin{aligned}d^2 f(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial y} dx dy + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial z} dz dy\end{aligned}$$

Пример: для функции $z = e^{\frac{x}{y}}$ в точке $M_0(0, 1)$:

- $d^2 f(M) = dx^2 - 2 dx dy$

Формула Тейлора для функции нескольких переменных

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \dots$$

Заменяя дифференциалы независимых переменных их приращениями :
 $dx = \Delta x = x - x_0$, $dy = \Delta y = y - y_0$, $dz = z - z_0$ получаем
выражения для дифференциалов:

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} (y - y_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} (z - z_0)$$

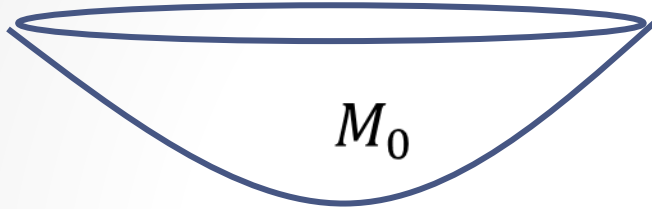
$$d^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2} (z - z_0)^2 \\ + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial z} (x - x_0) + \\ + 2 \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} (y - y_0)(z - z_0)$$

Пример: разложение по формуле Тейлора с точностью до бесконечно малых второго порядка функции $z = e^{\frac{x}{y}}$ в точке $M_0(0, 1)$ имеет вид:

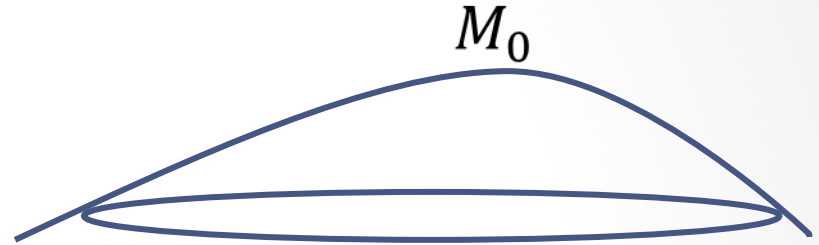
$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2} (x^2 - 2x(y - 1) \dots) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 - x(y - 1) \dots$$

Локальные экстремумы функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в точке M_0 и окрестности этой точки, непрерывна в точке M_0 . Если приращение функции $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ сохраняет знак в окрестности точки, то точка M_0 является точкой локального экстремума:



минимум $\Delta f > 0$



максимум $\Delta f < 0$

Необходимые условия существования экстремума: $df(M_0) = 0 \implies$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Решение системы – точка (x_0, y_0) называется критической или стационарной точкой, в которой может существовать экстремум

Сведения о квадратичных формах

Квадратичной формой порядка $n = 2$ называют функцию:

$$Q_2(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad a_{12} = a_{21},$$

Квадратичной формой порядка $n = 3$ называют функцию:

$$Q_3(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \quad a_{32} = a_{23}$$

Каждой квадратичной форме ставится в соответствие матрица:

$$Q_2(x, y) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Q_3(x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Критерий Сильверста. 1) Для положительной определенной $Q_n(M) > 0$ необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры матрицы 2) для отрицательной определенности $Q_n(M) < 0$ миноры должны менять знаки в порядке « $- \longrightarrow + \longrightarrow -$ »

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Достаточные условия существования экстремума

Характер экстремума в стационарной точке определяется знаком приращения функции в окрестности точки или знаком второго дифференциала $\Delta f(M) = f(M) - f(M_0) \cong \frac{1}{2} d^2(M_0) \dots$:

$d^2(M_0) > 0 \longrightarrow \Delta f(M_0) > 0 \longrightarrow M_0$ - точка минимума

$d^2(M_0) < 0 \longrightarrow \Delta f(M_0) < 0 \longrightarrow M_0$ - точка максимума

По своей структуре второй дифференциал является квадратичной формой относительно dx, dy . Поэтому знак $d^2(M_0)$ можно определять по критерию

Сильверста $\longrightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} > 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2} \end{vmatrix} > 0 - \min$$

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} < 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2} \end{vmatrix} < 0 - \max$$

Пример исследования на экстремум

Для функции $f = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ находим область определения ($x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$) и записываем *необходимые условия* существования экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Решением системы являются стационарные точки $M_1(2,1)$, $M_2(-2,-1)$, $M_3(1,2)$, $M_4(-1,-2)$.

Находим вторые производные и составляем матрицу для проверки *достаточных условий* в каждой точке $\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$.

В точке $M_1(2,1)$ выполняются условия существования *минимума*:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} = 6x = 12 > 0, \quad \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0. \quad \text{В точке } M_2(-2,-1)$$

$$\text{выполняются условия } \textit{максимума}: \quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} = 6x = -12 < 0, \quad \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0$$

В других точках условия экстремума не выполняются.

Условный экстремум. Функция Лагранжа

Рассматриваем функцию $z = f(x, y)$, где переменные x, y связаны дополнительным *условием связи* $\varphi(x, y) = 0$. Точка M_0 называется точкой **условного экстремума**, если при выполнении условий связи приращение функции сохраняет знак. Существуют методы решения этой задачи: 1) метод исключений, когда используя условие связи, задача сводится к исследованию на экстремум функции одной переменной, 2) метод множителей Лагранжа.

Условия существования экстремума $\frac{df}{dx} = 0$. По правилу дифференцирования

сложной функции:
$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \lambda$$

Последнее условие равносильно условию коллинеарности векторов $grad f(x, y), grad \varphi(x, y)$, которое можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Таким образом задача сводится к задаче на обычный экстремум, но для **функции Лагранжа**

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \text{ при выполнении условий связи } \varphi(x, y) = 0$$

Число λ - множитель Лагранжа. Достаточные условия проверяем по знаку d^2L .