Частные производные второго порядка. Первый и второй дифференциалы. Локальный экстремум.

Условный экстремум.

Лекция 17

Производные второго порядка функции нескольких переменных

Пусть для функции $z = f(x, y)$ в каждой точке некоторой области существуют первые частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые в свою очередь дифференцируемы. Тогда **определены производные второго порядка:**

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}$ - вторая производная по x при условии $y = const$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$ - вторая производная по y при условии $x = const$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$ - смешанная производная при условии $y = const$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}$ - смешанная производная при условии $x = const$

Теорема. Если смешанные производные существуют в окрестности некоторой точки и непрерывны в самой точке , то они равны $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример: $z = e^{\frac{x}{y}} \longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2}$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3}$; $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^3} - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}$

Производные второго порядка функции нескольких переменных. Дифференциал 2-го порядка

Для функции $f(x,y,z)$ определены производные:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$ при $y = const,\ z = const$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ при $x = const, z = const$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$ при $y = const,\ x = const$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ при $y = const,\ z = const$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$ при $y = const,\ z = const$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$ при $x = const,\ z = const$

Дифференциалом второго порядка называют дифференциал от дифференциала первого порядка $d^2 f(M) = d(df(M))$:

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\, dy^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\, dxdy$$

$$d^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}\, dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\, dz^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y}\, dxdy +$$

$$+ 2\,\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z}\, dxdz + 2\,\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z}\, dzdy$$

Пример: для функции $z = e^{\frac{x}{y}}$ в точке $M_0(0\ ,1)$:

$$d^2 f(M) = \boldsymbol{dx^2 - 2dxdy}$$

Формула Тейлора для функции нескольких переменных

- $$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + \cdots$$

Заменяя дифференциалы независимых переменных их приращениями :
$dx = \Delta x = x - x_0, \quad dy = \Delta y = y - y_0, dz = z - z_0$ получаем выражения для дифференциалов:

$$df(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}(z - z_0)$$

$$d^2f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2}(z - z_0)^2$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial z}(x - x_0) +$$

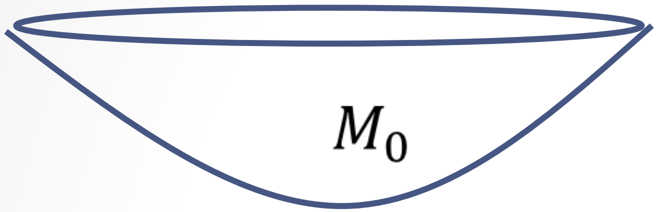
$$+ 2\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z}(y - y_0)(z - z_0)$$

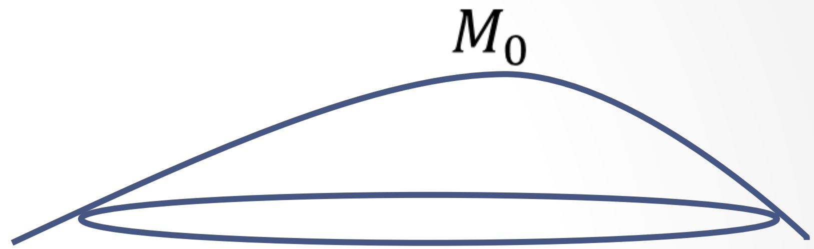
Пример: разложение по формуле Тейлора с точностью до бесконечно малых второго порядка функции $z = e^{\frac{x}{y}}$ в точке $M_0(0\ ,1)$ имеет вид:

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - 2x(y-1) \ldots) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) \ldots.$$

Локальные экстремумы функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в точке M_0 и окрестности этой точки, непрерывна в точке M_0 . Если приращение функции $\Delta f = f(M) - \ (M_0)$ сохраняет знак в окрестности точки, то точка M_0 является точкой локального экстремума:





минимум $\Delta f > 0$ *максимум* $\Delta f < 0$

Необходимые условия существования экстремума**:** $df(M_0) = 0$ $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Решение системы – точка (x_0, y_0) называется критической или стационарной точкой, в которой может существовать экстремум

Сведения о квадратичных формах

Квадратичной формой порядка $n = 2$ называют функцию:

$$Q_2(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \qquad a_{12} = a_{21},$$

Квадратичной формой порядка $n = 3$ называют функцию:

$$Q_3(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

$$a_{12} = a_{21}; \qquad a_{13} = a_{31}; \qquad a_{32} = a_{23}$$

Каждой квадратичной форме ставится в соответствие матрица:

$$Q_2(x, y) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad Q_3(x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Критерий Сильверста. 1) Для **положительной определенной** $\boldsymbol{Q_n(M) > 0}$ необходимо и достаточно, чтобы **были положительны** все главные диагональные миноры матрицы 2) для **отрицательной определенности** $\boldsymbol{Q_n(M) < 0}$ **миноры должны менять знаки в порядке** « $- \longrightarrow + \longrightarrow -$»

$$\Delta_1 = a_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Достаточные условия существования экстремума

Характер экстремума в стационарной точке определяется знаком приращения функции в окрестности точки или знаком второго дифференциала $\Delta f(M) = f(M) - f(M_0) \cong \frac{1}{2} d^2(M_0)\ldots$:

$d^2(M_0) > 0 \longrightarrow \Delta f(M_0) > 0 \longrightarrow M_0$ - точка минимума

$d^2(M_0) < 0 \longrightarrow \Delta f(M_0) < 0 \longrightarrow M_0$ - точка максимума

По своей структуре второй дифференциал является квадратичной формой относительно $dx,\ dy$. Поэтому знак $d^2(M_0)$ можно определять по критерию

Сильверста $\longrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix},\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} > 0 \\ > 0 \end{matrix},\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} > 0 - min \\ < 0 - max \end{matrix}$$

Пример исследования на экстремум

Для функции $f = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ находим область определения ($x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$) и записываем *необходимые условия* существования экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Решением системы являются стационарные точки $M_1(2,1)$, $M_2(-2,-1)$, $M_3(1,2)$, $M_4(-1,-2)$.

Находим вторые производные и составляем матрицу для проверки *достаточных условий* в каждой точке $\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$.

В точке $M_1(2,1)$ выполняются условия существования *минимума :*

$a_{11} = \dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} = 6x = 12 > 0$, $\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0$. В точке $M_2(-2,-1)$ выполняются условия *максимума*: $\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} = 6x = -12 < 0$, $\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0$

В других точках условия экстремума не выполняются.

Условный экстремум. Функция Лагранжа

Рассматриваем функцию $z = f(x, y)$, где переменные x, y связаны дополнительным *условием связи* $\varphi(x, y) = 0$. Точка M_0 называется точкой **условного экстремума,** если при выполнении условий связи приращение функции сохраняет знак. Существуют методы решения этой задачи : 1) метод исключений, когда используя условие связи, задача сводится к исследованию на экстремум функции одной переменной , 2) метод множителей Лагранжа.

Условия существования экстремума $\frac{df}{dx}$ =0. По правилу дифференцирования сложной функции :$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \lambda$

Последнее условие равносильно условию коллинеарности векторов $grad f(x, y), grad \varphi(x, y)$, которое можно записать в виде:

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Таким образом задача сводится к задаче на обычный экстремум, но для **функции Лагранжа**

$\boldsymbol{L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)}$ при выполнении условий связи $\varphi(x,y) = 0$

Число λ - множитель Лагранжа. Достаточные условия проверяем по знаку d^2L.