

Лекция

Криволинейные интегралы. Теория поля.

Плоское векторное поле. Криволинейные интегралы в векторном поле (интегралы по координатам). Теорема Грина. Вычисление площади пластины с помощью криволинейного интеграла по её границе. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу.

Трёхмерное векторное поле. Поток вектора через поверхность. Дивергенция вектора. Теорема Остроградского-Гаусса. Циркуляция и ротор векторного поля. Теорема Стокса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57.1. Область S , в каждой точке которой задан вектор $\vec{F} = \vec{F}(x; y) = P(x; y)\vec{i} + Q(x; y)\vec{j}$, называется плоским векторным полем.

$$\overline{\Delta l}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i = (x_{i+1} - x_i)\vec{i} + (y_{i+1} - y_i)\vec{j} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}.$$

$$F(\xi_i; \eta_i) \cdot \overline{\Delta l}_i = P(\xi_i; \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i; \eta_i)\Delta y_i$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i; \eta_i) \overline{\Delta l}_i = \sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i; \eta_i)\Delta y_i$$

$$\int_L \vec{F}(x; y) d\vec{l} = \int_L P(x; y) dx + Q(x; y) dy \quad \text{или} \quad (57.1)$$

$$\int_{AB} \vec{F}(x; y) d\vec{l} = \int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy.$$

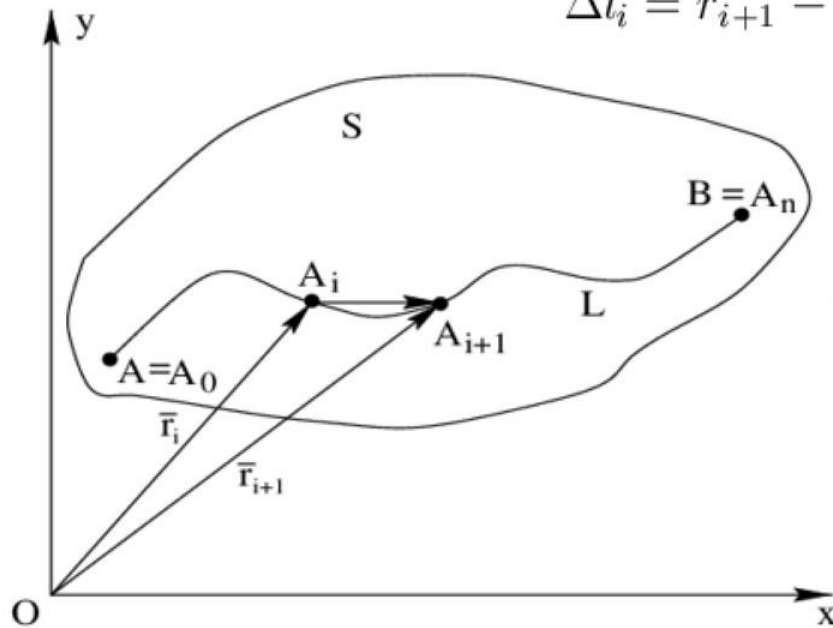


Рис. 113. К определению криволинейного интеграла по координатам вдоль дуги L

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57.2. Предел, к которому стремится n -ая интегральная сумма $\sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i; \eta_i) \overline{\Delta l}_i$ при стремлении к нулю длин всех звеньев ломаной линии $A_i A_{i+1}$, называется криволинейным интегралом вдоль линии L по координатам и обозначается:

При известном уравнении кривой L криволинейный интеграл вычисляется по формулам

3

$$\int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \int_{x_A}^{x_B} (P(x; y(x)) + Q(x; y(x))y'(x)) dx \quad (57.2)$$

– для кривой L , заданной уравнением $y = y(x)$;

$$\int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \int_{y_A}^{y_B} (P(x(y); y)x'(y) + Q(x(y); y)) dy \quad (57.3)$$

– для кривой L , заданной уравнением $x = x(y)$;

$$\int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \int_{t_A}^{t_B} (P(x(t); y(t))x'(t) + Q(x(t); y(t))y'(t)) dt \quad (57.4)$$

для кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\int_{AC} P dx + Q dy = \int_{AB} P dx + Q dy + \int_{BC} P dx + Q dy$$

$$\int_{AB} P dx + Q dy = - \int_{BA} P dx + Q dy.$$

Если контур L – замкнутый, то криволинейный интеграл по этому контуру обозначается $\oint_L Pdx + Qdy$, если он берется против часовой стрелки (так, чтобы область S , лежащая внутри контура L при обходе находилась слева) и $\oint_{-L} Pdx + Qdy$ – если против.

Очевидно, что $\oint_L Pdx + Qdy = -\oint_{-L} Pdx + Qdy$.

ПРИМЕР 57.1. Вычислить криволинейный интеграл $\oint_L ydx + xdy$ и $\oint_L ydx - xdy$ вдоль границ прямоугольного треугольника $OABO$ (рис. 114)

- уравнение прямой OA : $y = 0$ и, следовательно, $dy = 0$,

$$\int_{OA} ydx + xdy = 0 \quad \text{и} \quad \int_{OA} ydx - xdy = 0;$$

- уравнение прямой AB : $y = -2x + 2$, поэтому $dy = -2dx$,

$$\int_{AB} ydx + xdy = \int_1^0 (-2x + 2)dx - 2x dx = \left(-4\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^0 = 0,$$

$$\int_{AB} ydx - xdy = \int_1^0 (-2x + 2)dx + 2x dx = 2 \int_1^0 dx = 2x \Big|_1^0 = -2$$

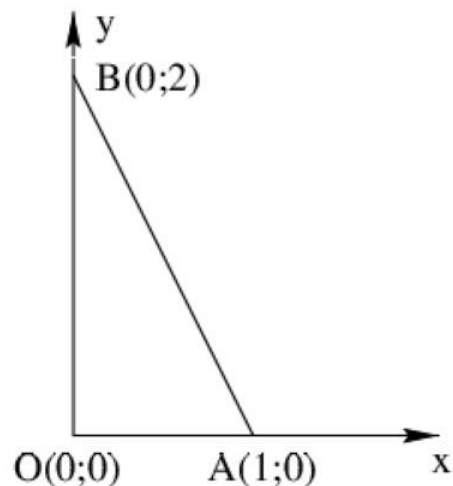


Рис. 114. К примеру 57.1

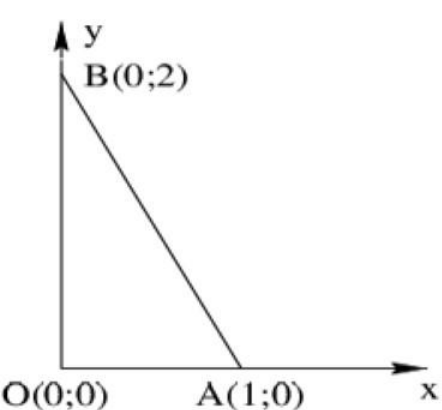


Рис. 114. К примеру 57.1

- уравнение прямой $OB : x = 0$ и, следовательно, $dx = 0$, 5

$$\int_{BO} ydx + xdy = 0 \quad \text{и} \quad \int_{BO} ydx - xdy = 0.$$

Таким образом, $\oint_L ydx + xdy = 0$, а $\oint_L ydx - xdy = -2$.

ПРИМЕР 57.2. Вычислить интегралы из примера 57.1 вдоль эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 115).

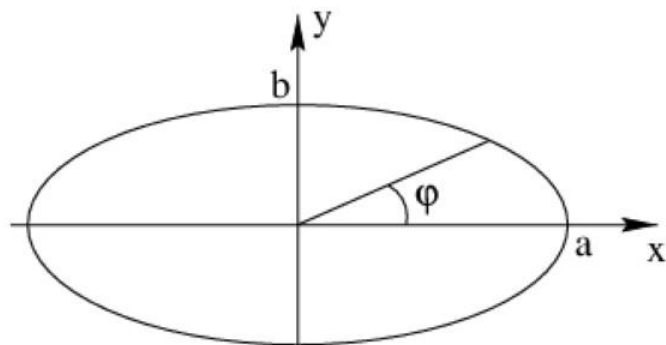


Рис. 115. К примеру 57.2

Уравнение эллипса в параметрическом виде $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$

следовательно $dx = -a \sin \varphi d\varphi, dy = b \cos \varphi d\varphi$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \oint_L ydx + xdy &= \int_0^{2\pi} -ab \sin^2 \varphi d\varphi + ab \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= ab \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{ab}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \oint_L ydx - xdy &= \int_0^{2\pi} -ab \sin^2 \varphi d\varphi - ab \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= -ab \int_0^{2\pi} d\varphi = -ab\varphi \Big|_0^{2\pi} = -2\pi ab. \end{aligned}$$

Криволинейный интеграл в векторном поле имеет важное приложение в физике. Так, если \vec{F} есть вектор силы, то его скалярное произведение на вектор перемещения $d\vec{l}$ есть элементарная работа силы F на пути dl . Очевидно, что работа, совершаемая в силовом поле $\vec{F} = \vec{F}(x; y) = (F_x(x; y); F_y(x; y))$ при перемещении какого-либо объекта из точки A в точку B вдоль пути L будет равна:

$$A = \int_{AB} \vec{F}(x; y) d\vec{l} = \int_{AB} F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy. \quad (57.5)$$

Теорема Грина

ТЕОРЕМА 57.1. *Теорема Грина . Если функции $P = P(x; y)$ и $Q = Q(x; y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой области S , ограниченной кривой L , то*

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (57.6)$$

Если в формуле Грина (57.6) взять P и Q такими, чтобы выполнялось равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, получим, что двойной интеграл в правой части формулы (57.5) будет равен площади области S . Это можно сделать различными способами и, в частности, положив $P = 0$, $Q = x$ или $P = -y$, $Q = 0$ или $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$. Таким образом, площадь S можно, в частности, определить по одной из следующих трёх формул

$$S = \oint_L x dy = - \oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (57.7)$$

ПРИМЕР 57.3. Найти площади треугольника OAB (рис. 114) и эллипса (рис. 115) с помощью криволинейных интегралов по их границе. 8

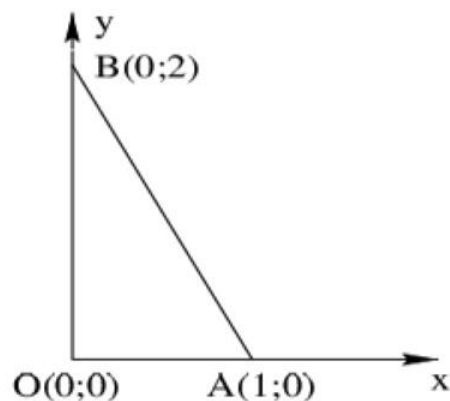


Рис. 114. К примеру 57.1

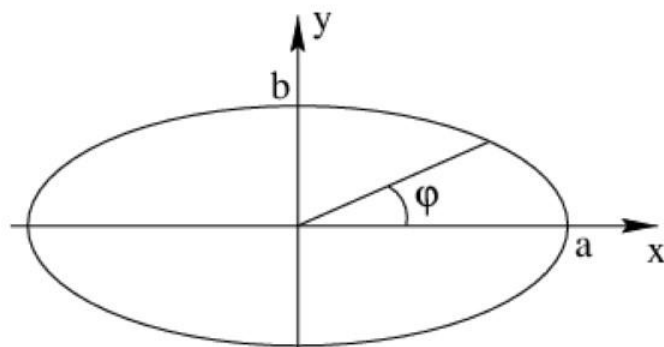


Рис. 115. К примеру 57.2

Воспользуемся третьей формулой (57.7) $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$.

В примерах 57.1 и 57.2 был вычислен $\oint_L y dx - x dy$, используя его значения для указанных контуров получим:

- площадь треугольника OAB :

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = -\frac{1}{2} \oint_L y dx - x dy = -\frac{1}{2} \cdot (-2) = 1, \text{ что очевидно.}$$

- площадь эллипса:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = -\frac{1}{2} \oint_L y dx - x dy = -\frac{1}{2} (-2\pi ab) = \pi ab, \text{ значение, которое мы получили ранее вычисляя двойной интеграл } \iint_S dx dy.$$

Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования 9

если интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования, то по замкнутому контуру он будет равен нулю.

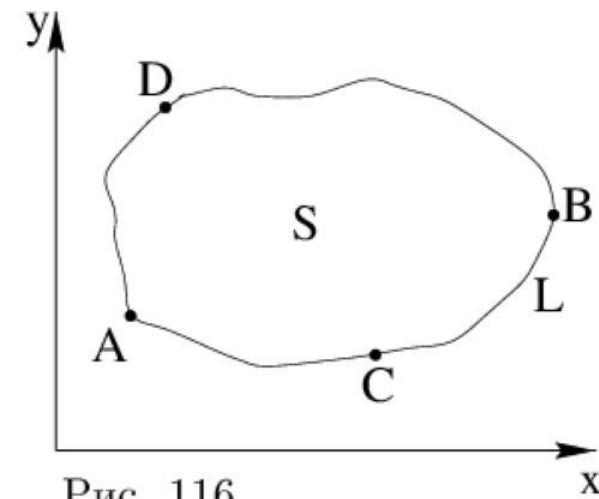


Рис. 116.

$$\begin{aligned} \oint_{ACBDA} Pdx + Qdy &= \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{ADB} Pdx + Qdy = 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 57.2. Для того, чтобы криволинейный интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области D (см. лекцию 35), необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (57.8)$$

ПРИМЕР 57.4. Зависят ли от пути интегрирования криволинейные интегралы $\int_{AB} ydx + xdy$ и $\int_{AB} ydx - xdy$.

Решение: Для интеграла $\int_{AB} ydx + xdy$: $P = y, Q = x, \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и данный интеграл не зависит от пути интегрирования, а по любому замкнутому контуру он будет равен нулю, что мы и видели в примерах 57.1 и 57.2.

В интеграле $\int_{AB} ydx - xdy$: $P = y, Q = -x, \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ и данный интеграл зависит от пути интегрирования, а по замкнутому контуру он не равен нулю, что мы получили в примерах 57.1 и 57.2.

Пусть дано дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$, в котором функции $P = P(x; y)$ и $Q = Q(x; y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области D . На вопрос при каких условиях это выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x; y)$ отвечает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 57.3. Для того, чтобы дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$ в односвязной области D было полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x; y)$, необходимо и достаточно выполнение в области D условия (57.8)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Докажем только необходимость. Если $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал функции $U = U(x; y)$, то

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = Pdx + Qdy. \quad (57.9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57.3. Функция $U = U(x; y)$, полный дифференциал которой равен дифференциальному выражению $Pdx + Qdy$, называется первообразной для этого выражения.

$$U(x; y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(\xi; \eta) d\xi + Q(\xi; \eta) d\eta + C. \quad (57.10)$$

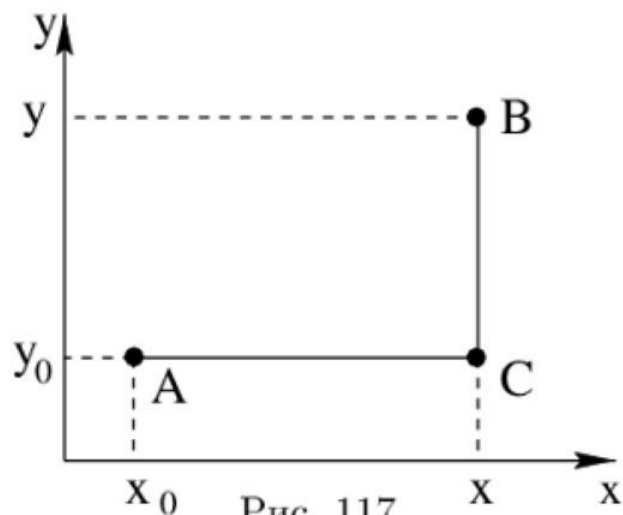


Рис. 117.

$$U(x; y) = \int_{x_0}^x P(\xi; y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x; \eta) d\eta + C. \quad (57.11)$$

Если $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ не имеют особенностей на оси абсцисс, в формуле (57.11) целесообразно положить $x_0 = y_0 = 0$:

$$U(x; y) = \int_0^x P(\xi; 0) d\xi + \int_0^y Q(x; \eta) d\eta + C. \quad (57.12)$$

ПРИМЕР 57.5. *Найти первообразную для дифференциального выражения $ydx + xdy$ из примера 57.1.*

Р е ш е н и е: В данном выражении в примере 57.4 мы показали, что для данного криволинейного интеграла выполняется условие 57.8 и, следовательно, $ydx + xdy$ является полным дифференциалом и имеет первообразную, которую можно найти по формуле (57.12), так как на оси абсцисс особенностей y подынтегрального выражения нет

$$U(x; y) = \int_0^x 0d\xi + \int_0^y x d\eta = xy + C.$$

Для проверки вычислим dU . Получим: $dU = d(xy + C) = ydx + xdy$.

ПРИМЕР 57.6. Проверить существует ли первообразная у дифференциального выражения $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy$, и если да, найти её.

Решение: $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $Q = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$. Проверим выполнение условия (57.8): $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$. Следовательно $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и данное выражение имеет первообразную, однако, в отличие от предыдущего примера вычислять её нужно по формуле (57.11), а не (57.12), так как при $x = 0$ и $y = 0$ функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ не определены. Положим в формуле (57.11) $x_0 = y_0 = 1$:

$$\begin{aligned} U(x; y) &= \int_1^x \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) d\xi + \int_1^y \left(\frac{2}{\eta} - \frac{x}{\eta^2}\right) d\eta = (\ln \xi + \xi) \Big|_1^x + \left(2 \ln \eta + \frac{x}{\eta}\right) \Big|_1^y = \\ &= \ln x + x - \ln 1 - 1 + 2 \ln y + \frac{x}{y} - 2 \ln 1 - x = \ln x + 2 \ln y + \frac{x}{y} + C. \end{aligned}$$

Проверка: найдем $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = P(x, y)$; $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2} = Q(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.1. Область D , в каждой точке которой определен вектор

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k} \quad (58.1)$$

называется трёхмерным (пространственным) векторным полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.2. Линия L , в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора $\vec{F} = (P; Q; R)$ в этой точке, называется векторной линией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.3. Множество всех векторных линий, проходящих через замкнутую кривую C , образуют поверхность, называемую векторной трубкой.

Поток векторного поля

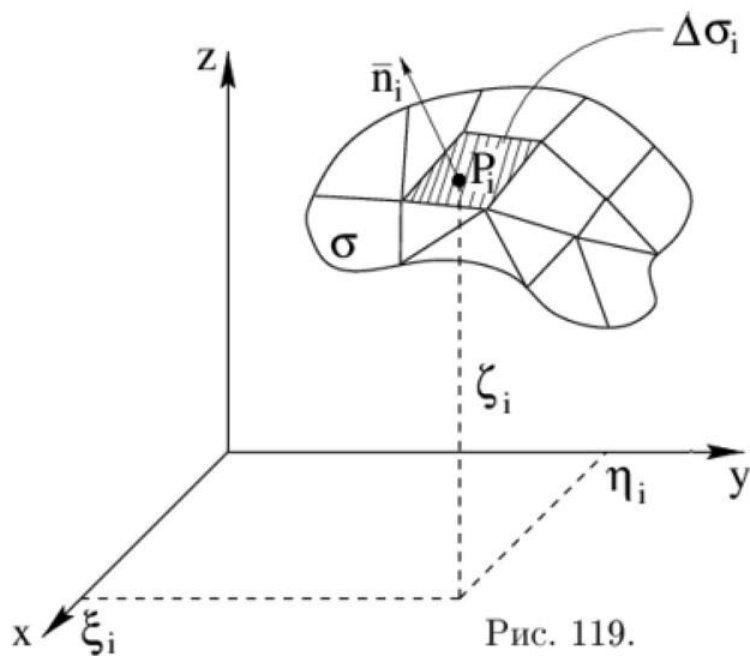


Рис. 119.

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$$

$$\bar{F}_i = \bar{F}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$$

$$\bar{n}_i = \bar{n}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$$

$$\bar{F}_i \cdot \bar{n}_i \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{n}_i \cdot \Delta\sigma_i$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.4. Предел n -ой интегральной суммы

$\Phi_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{n}_i \cdot \Delta\sigma_i$ при стягивании всех $\Delta\sigma_i$ в точки, и, следовательно, при $n \rightarrow +\infty$, называется потоком вектора \bar{F} через поверхность σ и обозначается

$$\Phi_\sigma = \iint \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint \bar{F}(x; y; z) \cdot \bar{n}(x; y; z) d\sigma. \quad (58.2)$$

$$\Phi_\sigma = \oiint_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma. \quad (58.3)$$

Дивергенция векторного поля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.5. Дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\vec{F} = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$ в точке $M(x; y; z) \in \Delta V$ называется предел, к которому стремится отношение потока векторного поля \vec{F} через замкнутую поверхность σ , являющуюся границей области ΔV , при стягивании этой области в точку M , и, следовательно, при $\Delta V \rightarrow 0$.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (58.5)$$

Примем без доказательства формулы:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{и} \quad (58.6)$$

$$\Phi_{\sigma} = \oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{F} dV. \quad (58.7)$$

Последняя формула называется формулой Остроградского-Гаусса.

Теорема Остроградского - Гаусса

ТЕОРЕМА 58.1. (Остроградского-Гаусса). Если функции $P = P(x; y; z)$, $Q = Q(x; y; z)$ и $R = R(x; y; z)$, являющиеся проекциями вектора \overline{F} на оси координат $F_x = P$, $F_y = Q$, $F_z = R$, непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в ограниченной замкнутой области, имеющей объём V , то поток вектора \overline{F} через замкнутую поверхность σ , ограничивающую V , равен тройному интегралу от дивергенции этого вектора по объёму V .

Выясним физический смысл формулы Остроградского-Гаусса (58.7). Пусть нам задано поле скоростей \overline{W} движущейся жидкости. Расход жидкости через любую замкнутую поверхность, ограничивающую объём V , расположенную в этом поле, в соответствии с (58.4) и (58.7) будет

$$Q = \gamma \oiint_{\sigma} \overline{W} \cdot \overline{n} d\sigma = \gamma \iiint_V \operatorname{div} \overline{W} dV. \quad (58.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.6. Точка векторного поля, в которой $\operatorname{div} F > 0$, называется источником, а точка, в которой $\operatorname{div} \overline{F} < 0$ – стоком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.7. Векторное поле, в каждой точке которого $\operatorname{div} \overline{F} = 0$, называется соленоидальным (или трубчатым).

Циркуляция и ротор векторного поля

$$\sum_{i=1}^n \overline{F}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \overline{\Delta l}_i = \sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta z_i$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.8. Предел, к которому стремится n -я интегральная сумма $\sum_{i=1}^n \overline{F}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \overline{\Delta l}_i$, при стремлении к нулю длин всех звеньев ломаной линии, вписанной в дугу AB , и, следовательно, при $n \rightarrow +\infty$, называется криволинейным интегралом по координатам и обозначается

$$\int_L \overline{F}(x; y; z) \overline{dl} = \int_L P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz \quad (58.9)$$

или

$$\int_{AB} \overline{F}(x; y; z) \overline{dl} = \int_{AB} P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz.$$

Как и в двумерном случае (57.5) криволинейный интеграл в силовом поле $\overline{F} = \overline{F}(x; y; z) = (F_x(x; y; z); F_y(x; y; z); F_z(x; y; z))$ определяет работу, совершаемую при перемещении какого-либо объекта из точки A в точку B вдоль линии L

$$A = \int_{AB} \overline{F}(x; y; z) \overline{dl} = \int_{AB} F_x(x; y; z) dx + F_y(x; y; z) dy + F_z(x; y; z) dz. \quad (58.11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.9. Криволинейный интеграл (58.9) по замкнутому контуру L называется циркуляцией векторного поля \overline{F} по замкнутому контуру L и обозначается

$$\oint_L \overline{F} d\overline{l} = \oint_L P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz. \quad (58.12)$$

В формуле (58.12) обход поверхности, границей которой является контур L совершается таким образом, чтобы при обходе эта поверхность находилась слева. При изменении направления обхода знак циркуляции меняется на противоположный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.10. Ротором (или вихрем) векторного поля $\overline{F} = P(x; y; z)\overline{i} + Q(x; y; z)\overline{j} + R(x; y; z)\overline{k}$ называется вектор обозначаемый $\text{rot } \overline{F}$ и равный

$$\text{rot } \overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (58.13)$$

$$\text{rot } \overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

ТЕОРЕМА 58.2. (Теорема Стокса) . Если функции $P = P(x; y; z)$, $Q = Q(x; y; z)$, $R = R(x; y; z)$, являющиеся проекциями вектора $\bar{F} = \bar{F}(x; y; z)$, и их первые производные непрерывны на поверхности σ , ограниченной замкнутым контуром L , то циркуляция вектора \bar{F} по контуру L равна потоку ротора этого вектора через поверхность σ :

$$\oint_L \bar{F} d\bar{l} = \iint_{\sigma} \bar{n} \operatorname{rot} \bar{F} d\sigma. \quad (58.14)$$

Формула (58.14) позволяет установить физический смысл ротора векторного поля. Если мы рассматриваем движение жидкости, то циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру L определяется движением (вращением) частиц жидкости по этому контуру, а по формуле (58.14) она равна потоку $\operatorname{rot} \bar{V}$ через поверхность, ограниченную L . Отсюда ясен смысл названия ротор, или иначе вихрь.

Покажем, что формула Грина (57.6) является частным случаем формулы Стокса (58.14). Действительно, если $P = P(x; y)$; $Q = Q(x; y)$, а $R = 0$, то согласно (58.13) $\operatorname{rot} \bar{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}$. Если, кроме того, кривая L и область σ расположены в плоскости Oxy , то $\bar{n} = \bar{k}$. Поставив эти значения $\operatorname{rot} \bar{F}$ и \bar{n} в (58.14) получаем (57.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.11. Векторное поле $\bar{F} = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$ называется безвихревым, если во всех его точках $\text{rot } \bar{F} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58.12. Функция $U = U(x; y; z)$, градиент которой равен вектору $\bar{F} = \bar{F}(x; y; z)$, называется потенциальной функцией (или просто потенциалом) поля $\bar{F} = \bar{F}(x; y; z)$.

ТЕОРЕМА 58.3. Для того, чтобы векторное поле $\bar{F} = \bar{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$ было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е., чтобы во всех точках векторного поля выполнялось условие

$$\text{rot } \bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0. \quad (58.15)$$

Поскольку, если вектор равен нулю, равны нулю и его проекции, следовательно, выполняются условия

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (58.16)$$

Докажем только необходимость. Пусть поле $\bar{F} = \bar{F}(x; y; z)$ имеет потенциал $U = U(x; y; z)$, и, следовательно, согласно определению (58.12) и выражению градиента (39.7)

$$\bar{F} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}$$

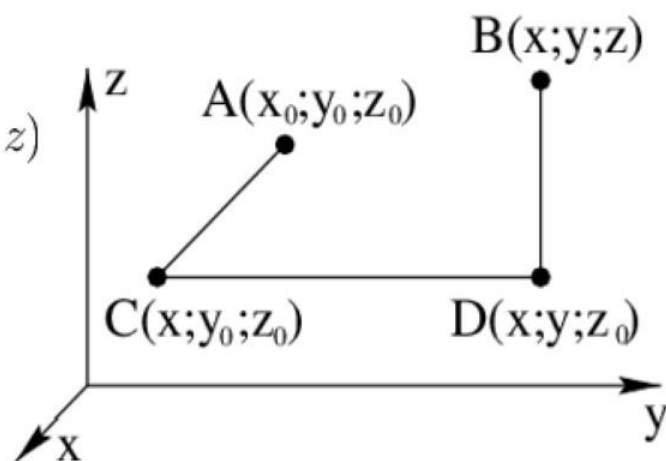
$$\text{откуда} \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (58.17)$$

ТЕОРЕМА 58.4. *Если векторное поле является потенциальным, то циркуляция вектора \overline{F} по любому замкнутому контуру, расположенному в этом поле, равна нулю и, следовательно, криволинейный интеграл $\int_{AB} \overline{F}d\overline{l}$ в этом поле не зависит от пути интегрирования.*

Учитывая, что для потенциального поля $\overline{F} = (P; Q; R)$ выполняются условия (58.17), а полным дифференциалом функции $U = U(x; y; z)$ является выражение $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$, имеем

$$\int_{AB} \overline{F}d\overline{l} = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \int_A^B dU = U(B) - U(A). \quad (58.18)$$

Если векторное поле является потенциальным, то согласно определению (58.12) $\vec{F}(x; y; z) = \text{grad } U(x; y; z)$ и нашей задачей является определение функции $U = U(x; y; z)$ по заданному векторному полю $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$.



Это можно сделать с помощью формулы (58.18).

Рис. 122. Путь интегрирования вдоль ломаной L со звеньями, являющимися координатными линиями

Возьмём в качестве точки A (рис. 122) фиксированную точку $(x_0; y_0; z_0)$, а в качестве B – произвольную точку $(x; y; z)$. И поскольку криволинейный интеграл в (58.18) не зависит от пути интегрирования из (58.18) получим

$$U(x; y; z) = \int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} P(\xi; \eta; \zeta) d\xi + Q(\xi; \eta; \zeta) d\eta + R(\xi; \eta; \zeta) d\zeta + C, \quad (58.19)$$

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^x P(\xi; y_0; z_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x; \eta; z_0) d\eta + \int_{z_0}^z R(x; y; \zeta) d\zeta + C. \quad (58.20)$$

ПРИМЕР 58.1. Найти поток векторного поля $\vec{F} = k\vec{r} = kx\vec{i} + ky\vec{j} + kz\vec{k}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат непосредственно и с помощью теоремы Остроградского-Гаусса.

Решение: Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вектор единичной внешней нормали к ней $\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{R}$, векторное поле на поверхности сферы $\vec{F} = k\vec{R}$, скалярное произведение $\vec{F}\vec{n} = k\vec{R} \cdot \frac{1}{R}\vec{R} = \frac{k}{R}R^2 = kR$ и, следовательно, поток поля $\vec{F} = k\vec{r}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, определяется по формуле (58.8)

$$\Phi_{\sigma} = \oiint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV. \quad (58.7)$$

$$\Phi_{\sigma} = \iint_{\sigma} \vec{F}\vec{n} d\sigma = kR \iint_{\sigma} d\sigma = kR4\pi R^2 = 4\pi kR^3.$$

Найдем дивергенцию заданного векторного поля. Поскольку для заданного поля $P = kx$; $Q = ky$; $R = kz$ по формуле (58.6) находим $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial kx}{\partial x} + \frac{\partial ky}{\partial y} + \frac{\partial kz}{\partial z} = 3k$. По формуле Остроградского-Гаусса (58.7) находим

$$\Phi_{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 3k \iiint_V dV = 3k \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi kR^3.$$

ПРИМЕР 58.2. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (2x + z)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$ через тетраэдр, ограниченный плоскостями $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ и $x - 2y + 2z - 6 = 0$, используя формулу Остроградского-Гаусса и непосредственно.

Решение: Тетраэдр, ограниченный заданными плоскостями, изображен на рис. 123. Определим дивергенцию векторного поля \vec{F} . Поскольку в нашем примере $P = 2x + z$; $Q = y + 2z$; $R = z - y$, получим

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(2x + z)}{\partial x} + \frac{\partial(y + 2z)}{\partial y} + \frac{\partial(z - y)}{\partial z} = 2 + 1 + 1 = 4$$

и, следовательно, по формуле (58.7)

$$\Phi_{\sigma} = \oint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV. \quad (58.7)$$

$$\Phi_{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 4 \iiint_V dV =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{6} OA \cdot BO \cdot OC = 4 \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 = 36.$$

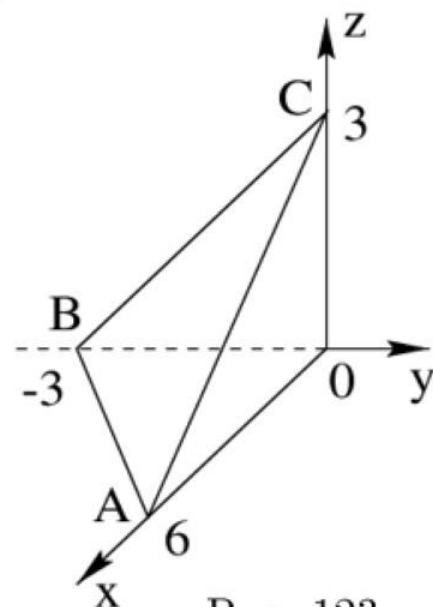


Рис. 123.

Перейдем теперь к непосредственному вычислению потока векторного поля через четыре грани BOC ; AOC ; AOB и ABC тетраэдра $OABC$.

- На грани BOC (рис. 124): $x = 0$, $\bar{n} = -\bar{i}$, $\overline{F}\bar{n} = -z$, $\Phi_{BOC} =$
 $= - \iint_{BOC} z dz dy = - \int_{-3}^0 dy \int_0^{3+y} z dz = -\frac{1}{2} \int_{-3}^0 z^2 \Big|_0^{3+y} dy = \frac{1}{2} \int_0^{-3} (9+6y+$
 $+ y^2) dy = -\frac{1}{2} \left(9y + 3y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{-3} = -\frac{1}{2}(-27 + 27 - 9) = -4,5.$

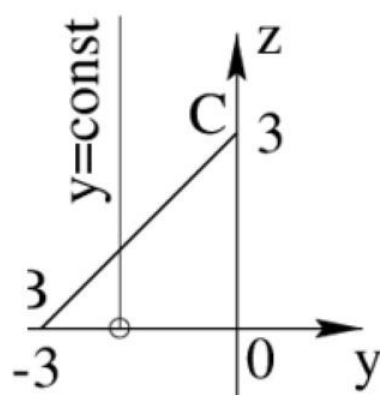


Рис. 124. К примеру 58.2; плоскость $x = 0$

- На грани AOC (рис. 125): $y = 0$, $\bar{n} = \bar{j}$, $\overline{F}\bar{n} = 2z$, $\Phi_{AOC} =$
 $= 2 \iint_{AOC} z dx dz = 2 \int_0^3 z dz \int_0^{6-2z} dx = 2 \int_0^3 z(6-2z) dz =$
 $= 2 \left(3z^2 - \frac{2}{3}z^3 \right) \Big|_0^3 = 2(27 - 8) = 18.$

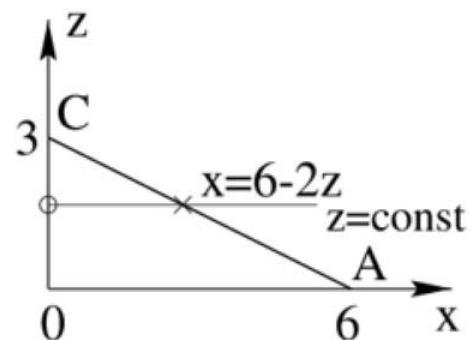


Рис. 125. плоскость $y = 0$

- На грани AOB (рис. 126): $z = 0$, $\bar{n} = -\bar{k}$, $\overline{F}\bar{n} = y$,
 $\Phi_{AOB} = \iint_{AOB} y dx dy = \int_{-3}^0 y dy \int_0^{6+2y} dx = \int_{-3}^0 y(6+2y) dy =$
 $= \left(3y^2 + \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_{-3}^0 = -27 + 18 = -9.$

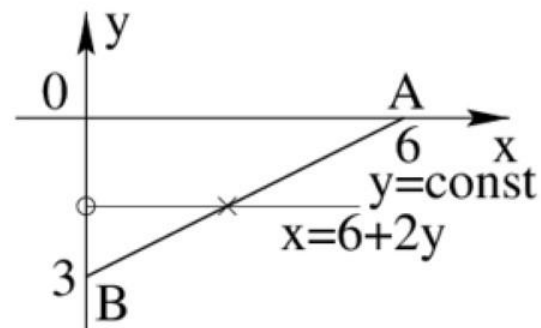
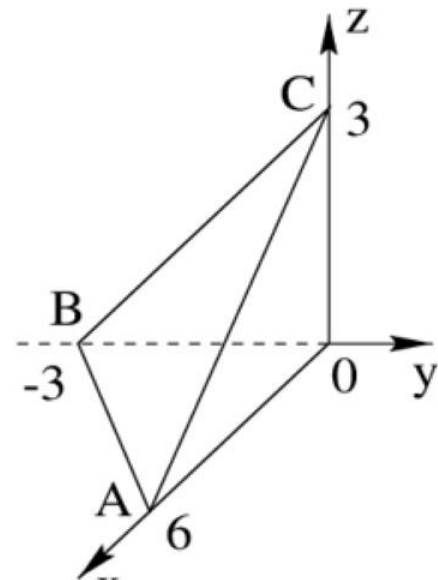


Рис. 126. плоскость $z = 0$

- На плоскости $ABC: x - 2y + 2z - 6 = 0$: нормальный вектор этой плоскости $\bar{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k} \Rightarrow \bar{n} = \frac{\bar{N}}{N} = \frac{\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$.

Таким образом, скалярное произведение векторов \bar{F} и \bar{n} равно: $\bar{F}\bar{n} = \frac{1}{3}(2x + z - 2y - 4z + 2z - 2y)$. Положив в этом выражении $z = 3 - \frac{x}{2} + y$ получим $\bar{F}\bar{n} = \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}y - 1$ и, учитывая, что в соответствии с формулой (54.2) $d\sigma = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dx dy = \frac{3}{2} dx dy$, найдем

$$\begin{aligned} \Phi_{ABC} &= \frac{3}{2} \iint_{AOB} \left(\frac{5}{6}x - \frac{5}{3}y - 1 \right) dx dy = \frac{3}{2} \int_{-3}^0 dy \int_0^{6+2y} \left(\frac{5}{6}x - \frac{5}{3}y - 1 \right) dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-3}^0 \left(\frac{5}{12}(6+2y)^2 - \frac{5}{3}(6+2y) - (6+2y) \right) dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-3}^0 \left(9 - 2y - \frac{5}{3}y^2 \right) dy = \frac{3}{2} \left(9y - y^2 - \frac{5}{3}y^3 \right) \Big|_{-3}^0 = 31,5. \end{aligned}$$



- Суммарный поток векторного поля через поверхность ограничивающую тетраэдр $OABC$ $\Phi_{\sigma} = \Phi_{BOC} + \Phi_{AOC} + \Phi_{AOB} + \Phi_{ABC} = -4,5 + 18 - 9 + 31,5 = 36$.

ПРИМЕР 58.4. Вычислить циркуляцию векторного поля \bar{F} по контуру $ACBA$ из примера 58.2 на основе теоремы Стокса и непосредственно.

Решение: Для заданного поля $P = 2x + z$, $Q = y + 2z$, $R = z - y$ и, следовательно, по формуле (58.13)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (-1 - 2)\bar{i} + (1 - 0)\bar{j} + (0 - 0)\bar{k} = -3\bar{i} + \bar{j}. \end{aligned}$$

Вектор \bar{n} найден в примере 58.2. Поток $\operatorname{rot} \bar{F}$ через грань ABC

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \bar{n} \operatorname{rot} \bar{F} d\sigma &= \iint_{ACB} \left(-1 - \frac{2}{3} \right) d\sigma = -\frac{5}{3} \iint_{ACB} d\sigma = -\frac{5}{3} d\sigma_{ACB} = \\ &= -\frac{5 S_{ABC}}{3 \cos \gamma} = -\frac{5 \frac{1}{2} OA \cdot OB}{3 \cdot \frac{2}{3}} = -\frac{5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2} = -22,5. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно формуле Стокса (58.14) циркуляция поля по контуру $ACBA$

$$\oint_{ACBA} \bar{F} d\bar{l} = \iint_{ACB} \bar{n} \operatorname{rot} \bar{F} d\sigma = -22,5.$$

Найдем теперь значение циркуляции $\oint_{ACBA} \overline{F}d\vec{l}$ вычисляя криволинейные интегралы от $Pdx + Qdy + Rdz$ по ребрам AC ; CB и BA :

- на ребре AC : $y = 0$ и $z = 3 - \frac{x}{2}$, откуда $dy = 0$ и $dz = -\frac{1}{2}dx$.

$$\text{Таким образом, } \int_{AB} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$$

$$\int_6^0 \left(\frac{7}{4}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left(\frac{7}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \right) \Big|_6^0 = -40,5.$$

- на ребре CB : $x = 0$ и $z = 3 + y$, откуда $dx = 0$ и $dz = dy$.

$$\text{Таким образом, } \int_{CB} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$$

$$\int_0^{-3} (9 + 3y) dy = \left(9y + \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_0^{-3} = -13,5.$$

- на ребре BA : $z = 0$ и $x = 6 + 2y$, откуда $dz = 0$ и $dx = 2dy$.

$$\text{Таким образом, } \int_{BA} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$$

$$\int_{-3}^0 (24 + 9y) dy = \left(24y + \frac{9y^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 = 31,5.$$

$$\text{В итоге } \oint_{ACBA} \overline{F}d\vec{l} = -40,5 - 13,5 + 31,5 = -22,5.$$

ПРИМЕР 58.5. Проверить, является ли поле $\bar{F} = (2xy + z^2)\bar{i} + (x^2 + z)\bar{j} + (y + 2xz)\bar{k}$ потенциальным и, если да, найти его потенциал.

Решение:

Для данного поля $P = 2xy + z^2$; $Q = x^2 + z$; $R = y + 2xz$. Проверим условие потенциальности (58.16)

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - 1 = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2z - 2z = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0,$$

следовательно, что $\text{rot } \bar{F} = 0$ и поле имеет потенциал. Найдем его по формуле (61.20), положив $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, поскольку никаких особенностей функции $P(x; y; z)$; $Q(x; y; z)$ и $R(x; y; z)$ не имеют.

$$u(x; y; z) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y x^2 dy + \int_0^z (y + 2xz) dz = x^2 y + yz + xz^2 + C.$$

Проверка: $P = \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z^2$; $Q = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + z$; $R = \frac{\partial u}{\partial z} = y + 2xz$.

Спасибо за внимание