Лекция
Криволинейные интегралы. Теория поля.

Плоское векторное поле. Криволинейные интегралы в векторном поле (интегралы по координатам). Теорема Грина. Вычисление площади пластины с помощью криволинейного интеграла по её границе. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу.

Трёхмерное векторное поле. Поток вектора через поверхность. Дивергенция вектора. Теорема Остроградского-Гаусса. Циркуляция и ротор векторного поля. Теорема Стокса.

Плоское векторное поле

Определение 57.1. *Область S, в каждой точке которой задан вектор $\overline{F} = \overline{F}(x;y) = P(x;y)\overline{i} + Q(x;y)\overline{j}$, называется плоским векторным полем.*

$$\overline{\Delta l_i} = \overline{r_{i+1}} - \overline{r_i} = (x_{i+1} - x_i)\overline{i} + (y_{i+1} - y_i)\overline{j} = \Delta x_i \overline{i} + \Delta y_j \overline{j}.$$

$$F(\xi_i;\eta_i) \cdot \overline{\Delta l_i} = P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}(\xi_i;\eta_i)\overline{\Delta l_i} = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$$

$$\int\limits_L \overline{F}(x;y)\overline{dl} = \int\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy \quad \text{или} \tag{57.1}$$

$$\int\limits_{AB} \overline{F}(x;y)\overline{dl} = \int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy.$$

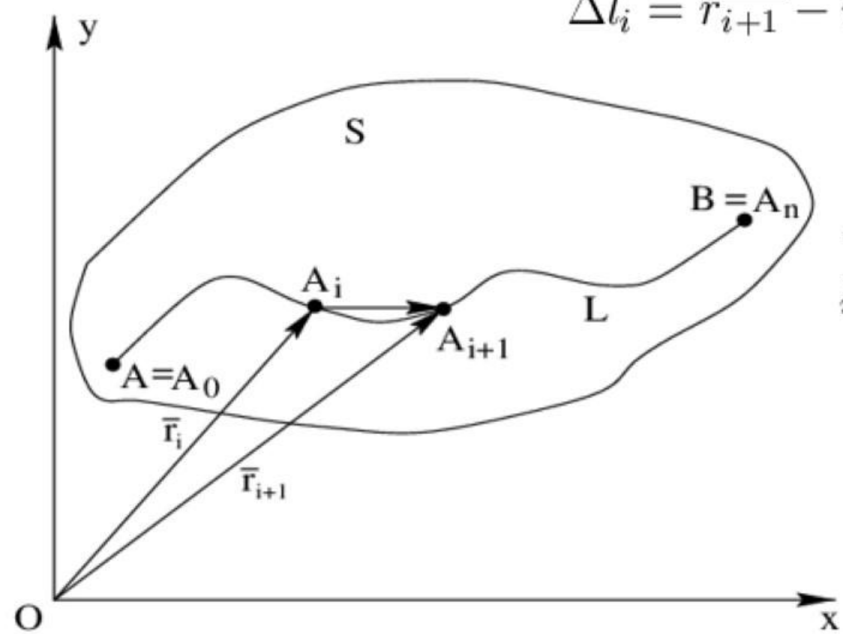


Рис. 113. *К определению криволинейного интеграла по координатам вдоль дуги L*

Определение 57.2. *Предел, к которому стремится n-ая интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}(\xi_i;\eta_i)\overline{\Delta l_i}$ при стремлении к нулю длин всех звеньев ломаной линии A_iA_{i+1}, называется криволинейным интегралом вдоль линии L по координатам и обозначается:*

При известном уравнении кривой L криволинейный интеграл вычисляется по формулам

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left(P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x)\right) dx \quad (57.2)$$

– для кривой L, заданной уравнением $y = y(x)$;

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{y_A}^{y_B} \left(P(x(y);y)x'(y) + Q(x(y);y)\right) dy \quad (57.3)$$

– для кривой L, заданной уравнением $x = x(y)$;

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)\right) dt \quad (57.4)$$

для кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\int_{AC} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + Qdy + \int_{BC} Pdx + Qdy$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy.$$

Если контур L – замкнутый, то криволинейный интеграл по этому контуру обозначается $\oint\limits_L Pdx + Qdy$, если он берется против часовой стрелки (так, чтобы область S, лежащая внутри контура L при обходе находилась слева) и $\oint\limits_{-L} Pdx + Qdy$ – если против.

Очевидно, что $\oint\limits_L Pdx + Qdy = -\oint\limits_{-L} Pdx + Qdy$.

Пример 57.1. *Вычислить криволинейный интеграл* $\oint\limits_L ydx + xdy$ *и* $\oint\limits_L ydx - xdy$ *вдоль границ прямоугольного треугольника* $OABO$ *(рис. 114)*

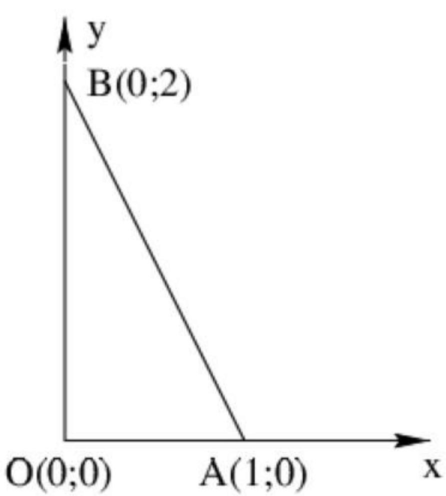


Рис. 114. *К примеру 57.1*

- уравнение прямой $OA: y = 0$ и, следовательно, $dy = 0$,

$$\int\limits_{OA} ydx + xdy = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{OA} ydx - xdy = 0;$$

- уравнение прямой $AB: y = -2x + 2$, поэтому $dy = -2dx$,

$$\int\limits_{AB} ydx + xdy = \int\limits_1^0 (-2x+2)dx - 2xdx = \left(-4\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_1^0 = 0,$$

$$\int\limits_{AB} ydx - xdy = \int\limits_1^0 (-2x+2)dx + 2xdx = 2\int\limits_1^0 dx = 2x|_1^0 = -2$$

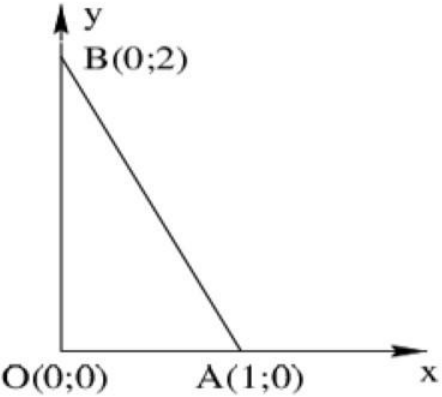


Рис. 114. *К примеру 57.1*

- уравнение прямой $OB: x = 0$ и, следовательно, $dx = 0$,

$$\int\limits_{BO} ydx + xdy = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{BO} ydx - xdy = 0.$$

Таким образом, $\oint\limits_L ydx + xdy = 0$, а $\oint\limits_L ydx - xdy = -2$.

Пример 57.2. *Вычислить интегралы из примера 57.1 вдоль эллипса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *(рис. 115).*

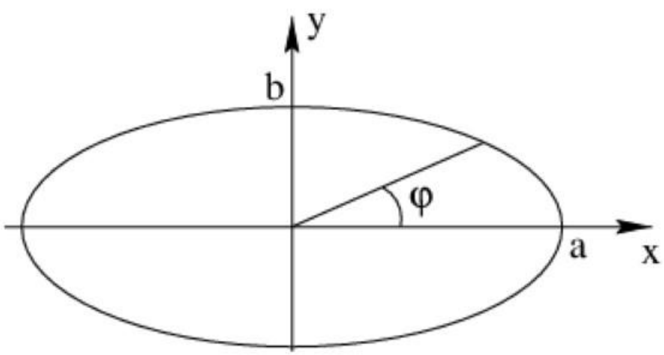


Рис. 115. *К примеру 57.2*

Уравнение эллипса в параметрическом виде $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$

следовательно $dx = -a\sin\varphi d\varphi, dy = b\cos\varphi d\varphi$

- $\oint\limits_L ydx + xdy = \int\limits_0^{2\pi} -ab\sin^2\varphi d\varphi + ab\cos^2\varphi d\varphi =$

$$= ab\int\limits_0^{2\pi}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{ab}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0;$$

- $\oint\limits_L ydx - xdy = \int\limits_0^{2\pi} -ab\sin^2\varphi d\varphi - ab\cos^2\varphi d\varphi =$

$$= -ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = -\,ab\varphi\Big|_0^{2\pi} = -2\pi ab.$$

Физический смысл криволинейного интеграла

Криволинейный интеграл в векторном поле имеет важное приложение в физике. Так, если $\overline{F}$ есть вектор силы, то его скалярное произведение на вектор перемещения $\overline{dl}$ есть элементарная работа силы F на пути dl. Очевидно, что работа, совершаемая в силовом поле $\overline{F} = \overline{F}(x;y) = (F_x(x;y); F_y(x;y))$ при перемещении какого-либо объекта из точки A в точку B вдоль пути L будет равна:

$$A = \int\limits_{AB} \overline{F}(x;y)\overline{dl} = \int\limits_{AB} F_x(x;y)dx + F_y(x;y)dy. \qquad (57.5)$$

Теорема Грина

Теорема 57.1. *Теорема Грина . Если функции $P = P(x;y)$ и $Q = Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой области S, ограниченной кривой L, то*

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \qquad (57.6)$$

Если в формуле Грина (57.6) взять P и Q такими, чтобы выполнялось равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, получим, что двойной интеграл в правой части формулы (57.5) будет равен площади области S. Это можно сделать различными способами и, в частности, положив $P = 0$, $Q = x$ или $P = -y$, $Q = 0$ или $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$. Таким образом, площадь S можно, в частности, определить по одной из следующих трёх формул

$$S = \oint\limits_L x dy = -\oint\limits_L y dx = \frac{1}{2} \oint\limits_L x dy - y dx. \qquad (57.7)$$

Пример 57.3. *Найти площади треугольника OAB (рис. 114) и эллипса (рис. 115) с помощью криволинейных интегралов по их границе.*

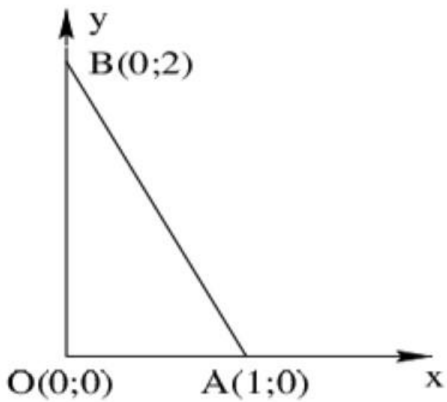


Рис. 114. *К примеру 57.1*

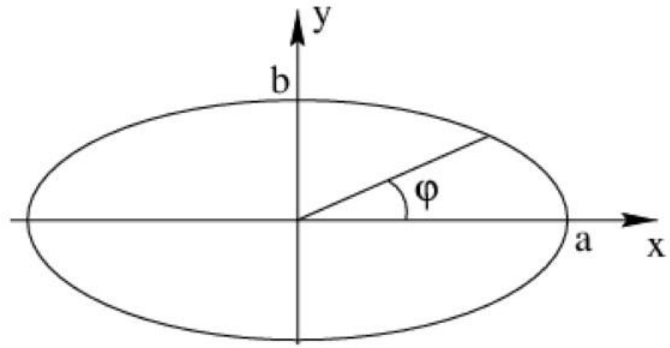


Рис. 115. *К примеру 57.2*

Воспользуемся третьей формулой (57.7) $S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx$.

В примерах 57.1 и 57.2 был вычислен $\oint\limits_L y\,dx - x\,dy$, используя его значения для указанных контуров получим:

- площадь треугольника OAB :
  $S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx = -\frac{1}{2}\oint\limits_L y\,dx - x\,dy = -\frac{1}{2}\cdot(-2) = 1$, что очевидно.
- площадь эллипса:

  $S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx = -\frac{1}{2}\oint\limits_L y\,dx - x\,dy = -\frac{1}{2}\left(-2\pi ab\right) = \pi ab$, значение, которое мы получили ранее вычисляя двойной интеграл $\iint\limits_S dx\,dy$.

если интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования, то по замкнутому контуру он будет равен нулю.

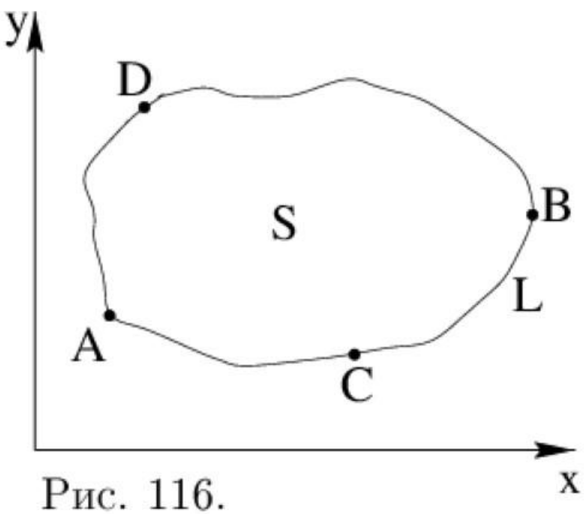


Рис. 116.

$$\oint\limits_{ACBDA} Pdx + Qdy = \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BDA} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy - \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy = 0.$$

Теорема 57.2. *Для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области D (см. лекцию 35), необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (57.8)$$

Пример 57.4. *Зависят ли от пути интегрирования криволинейные интегралы*

$$\int\limits_{AB} ydx + xdy \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{AB} ydx - xdy.$$

Р е ш е н и е: Для интеграла $\int\limits_{AB} ydx+xdy:$ $\quad P = y, Q = x, \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и данный интеграл не зависит от пути интегрирования, а по любому замкнутому контуру он будет равен нулю, что мы и видели в примерах 57.1 и 57.2.

В интеграле $\int\limits_{AB} ydx - xdy$: $\quad P = y,\ Q = -x,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ $\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ и данный интеграл зависит от пути интегрирования, а по замкнутому контуру он не равен нулю, что мы получили в примерах 57.1 и 57.2.

Пусть дано дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$, в котором функции $P = P(x;y)$ и $Q = Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области D. На вопрос при каких условиях это выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x;y)$ отвечает следующая теорема.

Теорема 57.3. *Для того, чтобы дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$ в односвязной области D было полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x;y)$, необходимо и достаточно выполнение в области D условия (57.8)*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Докажем только необходимость. Если $Pdx+Qdy$ есть полный дифференциал функции $U = U(x;y)$, то

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = Pdx + Qdy. \quad (57.9)$$

$\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ $\quad$ $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\quad$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Определение 57.3. *Функция $U = U(x;y)$, полный дифференциал которой равен дифференциальному выражению $Pdx + Qdy$, называется первообразной для этого выражения.*

$$U(x;y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(\xi;\eta)d\xi + Q(\xi;\eta)d\eta + C. \qquad (57.10)$$

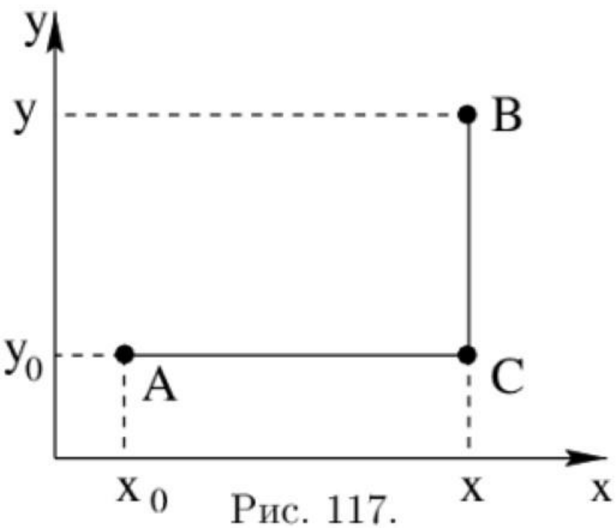


Рис. 117.

$$U(x;y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi;y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x;\eta)d\eta + C. \qquad (57.11)$$

Если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ не имеют особенностей на оси абсцисс, в формуле (57.11) целесообразно положить $x_0 = y_0 = 0$:

$$U(x;y) = \int\limits_{0}^{x} P(\xi;0)d\xi + \int\limits_{0}^{y} Q(x;\eta)d\eta + C. \qquad (57.12)$$

Пример 57.5. *Найти первообразную для дифференциального выражения $ydx + xdy$ из примера 57.1.*

Р е ш е н и е: В данном выражении в примере 57.4 мы показали, что для данного криволинейного интеграла выполняется условие 57.8 и, следовательно, $ydx + xdy$ является полным дифференциалом и имеет первообразную, которую можно найти по формуле (57.12), так как на оси абсцисс особенностей y подынтегрального выражения нет

$$U(x;y) = \int\limits_0^x 0d\xi + \int\limits_0^y xd\eta = xy + C.$$

Для проверки вычислим dU. Получим: $dU = d(xy+C) = ydx+xdy$.

Пример 57.6. *Проверить существует ли первообразная у дифференциального выражения* $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$, *и если да, найти её.*

Решение: $P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; $Q=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}$. Проверим выполнение условия (57.8): $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$. Следовательно $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ и данное выражение имеет первообразную, однако, в отличие от предыдущего примера вычислять её нужно по формуле (57.11), а не (57.12), так как при $x=0$ и $y=0$ функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ не определены. Положим в формуле (57.11) $x_0=y_0=1$:

$$U(x;y)=\int_1^x\left(\frac{1}{\xi}+1\right)d\xi+\int_1^y\left(\frac{2}{\eta}-\frac{x}{\eta^2}\right)d\eta=(\ln\xi+\xi)\Big|_1^x+\left(2\ln\eta+\frac{x}{\eta}\right)\Bigg|_1^y=$$

$$=\ln x+x-\ln 1-1+2\ln y+\frac{x}{y}-2\ln 1-x=\ln x+2\ln y+\frac{x}{y}+C.$$

Проверка: найдем $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$=P(x,y); $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}=Q(x,y)$.

Трёхмерное векторное поле

Определение 58.1. *Область D, в каждой точке которой определен вектор*

$$\overline{F} = \overline{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k} \qquad (58.1)$$

называется трёхмерным (пространственным) векторным полем.

Определение 58.2. *Линия L, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора $\overline{F} = (P;Q;R)$ в этой точке, называется векторной линией.*

Определение 58.3. *Множество всех векторных линий, проходящих через замкнутую кривую C, образуют поверхность, называемую векторной трубкой.*

Поток векторного поля

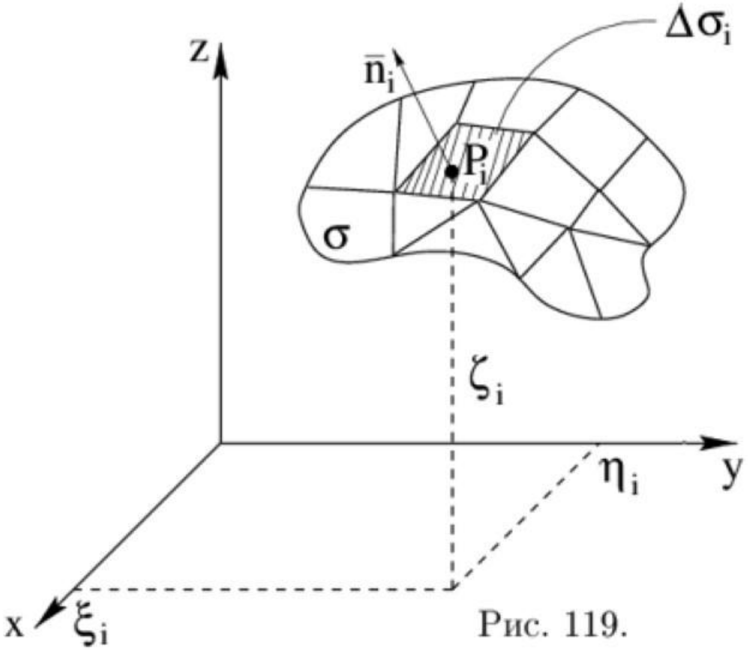


Рис. 119.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$$

$$\overline{F_i} = \overline{F}(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$$

$$\overline{n_i} = \overline{n}(\xi_i; \eta_i \zeta_i)$$

$$\overline{F_i} \cdot \overline{n_i} \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \cdot \overline{n_i} \cdot \Delta\sigma_i$$

Определение 58.4. *Предел n-ой интегральной суммы* $\Phi_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \cdot \overline{n_i} \cdot \Delta\sigma_i$ *при стягивании всех* $\Delta\sigma_i$ *в точки, и, следовательно, при* $n \to +\infty$, *называется потоком вектора* $\overline{F}$ *через поверхность* σ *и обозначается*

$$\Phi_\sigma = \iint \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma = \iint \overline{F}(x; y; z) \cdot \overline{n}(x; y; z) d\sigma. \qquad (58.2)$$

$$\Phi_\sigma = \oiint_\sigma \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma. \qquad (58.3)$$

Дивергенция векторного поля

Определение 58.5. *Дивергенцией (расходимостью) векторного поля* $\overline{F} = (P(x;y;z); Q(x;y;z);\ \ R(x;y;z))$ *в точке* $M(x;y;z) \in \Delta V$ *называется предел, к которому стремится отношение потока векторного поля* $\overline{F}$ *через замкнутую поверхность* σ, *являющуюся границей области* ΔV, *при стягивании этой области в точку* M, *и, следовательно, при* $\Delta V \to 0$.

$$\operatorname{div} \overline{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\!\oint_{\sigma} \overline{F}\overline{n} d\sigma \qquad (58.5)$$

Примем без доказательства формулы:

$$\operatorname{div} \overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \text{и} \qquad (58.6)$$

$$\Phi_\sigma = \oint\!\!\!\oint \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \overline{F} dV. \qquad (58.7)$$

Последняя формула называется формулой Остроградского-Гаусса.

Теорема Остроградского - Гаусса

Теорема 58.1. *(Остроградского-Гаусса). Если функции* $P = P(x;y;z)$, $Q = Q(x;y;z)$ *и* $R = R(x;y;z)$, *являющиеся проекциями вектора* $\overline{F}$ *на оси координат* $F_x = P$, $F_y = Q$, $F_z = R$, *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в ограниченной замкнутой области, имеющей объём* V, *то поток вектора* $\overline{F}$ *через замкнутую поверхность* σ, *ограничивающую* V, *равен тройному интегралу от дивергенции этого вектора по объёму* V.

Выясним физический смысл формулы Остроградского-Гаусса (58.7). Пусть нам задано поле скоростей $\overline{W}$ движущейся жидкости. Расход жидкости через любую замкнутую поверхность, ограничивающую объём V, расположенную в этом поле, в соответствии с (58.4) и (58.7) будет

$$Q = \gamma \oiint_{\sigma} \overline{W} \cdot \overline{n} d\sigma = \gamma \iiint_{V} \operatorname{div} \overline{W} dV. \qquad (58.8)$$

Определение 58.6. *Точка векторного поля, в которой* $\operatorname{div} F > 0$, *называется источником, а точка, в которой* $\operatorname{div} \overline{F} < 0$ *– стоком.*

Определение 58.7. *Векторное поле, в каждой точке которого* $\operatorname{div} \overline{F} = 0$, *называется соленоидальным (или трубчатым).*

Циркуляция и ротор векторного поля

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\overline{\Delta l_i} = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta z_i$$

Определение 58.8. *Предел, к которому стремится n-я интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\overline{\Delta l_i}$, при стремлении к нулю длин всех звеньев ломаной линии, вписанной в дугу AB, и, следовательно, при $n \to +\infty$, называется криволинейным интегралом по координатам и обозначается*

$$\int\limits_L \overline{F}(x;y;z)\overline{dl} = \int\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz \qquad (58.9)$$

или

$$\int\limits_{AB} \overline{F}(x;y;z)\overline{dl} = \int\limits_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz.$$

Как и в двумерном случае (57.5) криволинейный интеграл в силовом поле $\overline{F} = \overline{F}(x;y;z) = (F_x(x;y;z); F_y(x;y;z); F_z(x;y;z))$ определяет работу, совершаемую при перемещении какого-либо объекта из точки A в точку B вдоль линии L

$$A = \int\limits_{AB} \overline{F}(x;y;z)\overline{dl} = \int\limits_{AB} F_x(x;y;z)dx + F_y(x;y;z)dy + F_z(x;y;z)dz. \qquad (58.11)$$

Определение 58.9. *Криволинейный интеграл (58.9) по замкнутому контуру L называется циркуляцией векторного поля $\overline{F}$ по замкнутому контуру L и обозначается*

$$\oint\limits_L \overline{F d l} = \oint\limits_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz. \tag{58.12}$$

В формуле (58.12) обход поверхности, границей которой является контур L совершается таким образом, чтобы при обходе эта поверхность находилась слева. При изменении направления обхода знак циркуляции меняется на противоположный.

Определение 58.10. *Ротором (или вихрем) векторного поля* $\overline{F} = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k}$ *называется вектор обозначаемый* $\operatorname{rot}\overline{F}$ *и равный*

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{58.13}$$

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Теорема 58.2. *(Теорема Стокса)* . *Если функции* $P = P(x;y;z)$, $Q = Q(x;y;z)$, $R = R(x;y;z)$, *являющиеся проекциями вектора* $\overline{F} = \overline{F}(x;y;z)$, *и их первые производные непрерывны на поверхности* σ, *ограниченной замкнутым контуром* L, *то циркуляция вектора* $\overline{F}$ *по контуру* L *равна потоку ротора этого вектора через поверхность* σ:

$$\oint\limits_L \overline{F d l} = \iint\limits_\sigma \overline{n} \operatorname{rot} \overline{F} d\sigma. \qquad (58.14)$$

Формула (58.14) позволяет установить физический смысл ротора векторного поля. Если мы рассматриваем движение жидкости, то циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру L определяется движением (вращением) частиц жидкости по этому контуру, а по формуле (58.14) она равна потоку $\operatorname{rot} \overline{V}$ через поверхность, ограниченную L. Отсюда ясен смысл названия ротор, или иначе вихрь.

Покажем, что формула Грина (57.6) является частным случаем формулы Стокса (58.14). Действительно, если $P = P(x;y)$; $Q = Q(x;y)$, а $R = 0$, то согласно (58.13) $\operatorname{rot} \overline{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \overline{k}$. Если, кроме того, кривая L и область σ расположены в плоскости Oxy, то $\overline{n} = \overline{k}$. Поставив эти значения $\operatorname{rot} \overline{F}$ и $\overline{n}$ в (58.14) получаем (57.6).

Определение 58.11. *Векторное поле* $\overline{F} = (P(x;y;z);\ Q(x;y;z);\ R(x;y;z))$ *называется безвихревым, если во всех его точках* $\operatorname{rot}\overline{F} = 0$.

Определение 58.12. *Функция* $U = U(x;y;z)$, *градиент которой равен вектору* $\overline{F} = \overline{F}(x;y;z)$, *называется потенциальной функцией (или просто потенциалом) поля* $\overline{F} = \overline{F}(x;y;z)$.

Теорема 58.3. *Для того, чтобы векторное поле* $\overline{F} = \overline{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k}$ *было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е., чтобы во всех точках векторного поля выполнялось условие*

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \qquad (58.15)$$

Поскольку, если вектор равен нулю, равны нулю и его проекции, следовательно, выполняются условия

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \qquad (58.16)$$

Докажем только необходимость. Пусть поле $\overline{F} = \overline{F}(x;y;z)$ имеет потенциал $U = U(x;y;z)$, и, следовательно, согласно определению (58.12) и выражению градиента (39.7)

$$\overline{F} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k}$$

откуда $$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (58.17)$$

Подставляя (58.15) в (58.14) мы получаем следующую теорему:

Теорема 58.4. *Если векторное поле является потенциальным, то циркуляция вектора $\overline{F}$ по любому замкнутому контуру, расположенному в этом поле, равна нулю и, следовательно, криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \overline{Fdl}$ в этом поле не зависит от пути интегрирования.*

Учитывая, что для потенциального поля $\overline{F} = (P; Q; R)$ выполняются условия (58.17), а полным дифференциалом функции $U = U(x; y; z)$ является выражение $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$, имеем

$$\int\limits_{AB} \overline{Fdl} = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \int\limits_{A}^{B} dU = U(B) - U(A). \quad (58.18)$$

58.5. Нахождение потенциала по заданному векторному полю

Если векторное поле является потенциальным, то согласно определению (58.12) $\overline{F}(x; y; z) = \operatorname{grad} U(x; y; z)$ и нашей задачей является определение функции $U = U(x; y; z)$ по заданному векторному полю $\overline{F} = \overline{F}(x; y; z)$.

Это можно сделать с помощью формулы (58.18).

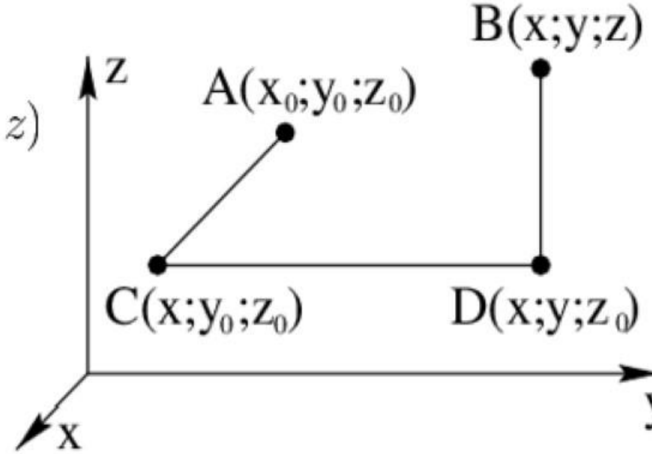


Рис. 122. *Путь интегрирования вдоль ломаной L со звеньями, являющимися координатными линиями*

Возьмём в качестве точки A (рис. 122) фиксированную точку $(x_0; y_0; z_0)$, а в качестве B – произвольную точку $(x; y; z)$. И поскольку криволинейный интеграл в (58.18) не зависит от пути интегрирования из (58.18) получим

$$U(x; y; z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} P(\xi; \eta; \zeta)d\xi + Q(\xi; \eta; \zeta)d\eta + R(\xi; \eta; \zeta)d\zeta + C, \quad (58.19)$$

$$U(x; y; z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi; y_0; z_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x; \eta; z_0)d\eta + \int\limits_{z_0}^{z} R(x; y; \zeta)d\zeta + C. \quad (58.20)$$

Пример 58.1. *Найти поток векторного поля $\overline{F} = k\overline{r} = kx\overline{i} + ky\overline{j} + kz\overline{k}$ через сферу радиуса R с центром в начале координат непосредственно и с помощью теоремы Остроградского-Гаусса.*

Решение: Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вектор единичной внешней нормали к ней $\overline{n} = \frac{1}{R}\overline{R}$, векторное поле на поверхности сферы $\overline{F} = k\overline{R}$, скалярное произведение $\overline{F}\overline{n} = k\overline{R} \cdot \frac{1}{R}\overline{R} = \frac{k}{R}R^2 = kR$ и, следовательно, поток поля $\overline{F} = k\overline{r}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, определяется по формуле (58.8)

$$\Phi_\sigma = \oiint\limits_\sigma \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{F} dV. \qquad (58.7)$$

$$\Phi_\sigma = \iint\limits_\sigma \overline{F}\overline{n} d\sigma = kR \iint\limits_\sigma d\sigma = kR4\pi R^2 = 4\pi k R^3.$$

Найдем дивергенцию заданного векторного поля. Поскольку для заданного поля $P = kx$; $Q = ky$; $R = kz$ по формуле (58.6) находим $\operatorname{div} \overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial kx}{\partial x} + \frac{\partial ky}{\partial y} + \frac{\partial kz}{\partial z} = 3k$. По формуле Остроградского-Гаусса (58.7) находим

$$\Phi_\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{F} dV = 3k \iiint\limits_V dV = 3k \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi k R^3.$$

Пример 58.2. *Вычислить поток векторного поля* $\overline{F} = (2x+z)\overline{i} + (y+2z)\overline{j} + (z-y)\overline{k}$ *через тетраэдр, ограниченный плоскостями* $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ *и* $x - 2y + 2z - 6 = 0$, *используя формулу Остроградского-Гаусса и непосредственно.*

Р е ш е н и е: Тетраэдр, ограниченный заданными плоскостями, изображен на рис. 123. Определим дивергенцию векторного поля $\overline{F}$. Поскольку в нашем примере $P = 2x+z$; $Q = y+2z$; $R = z-y$, получим

$$\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial(2x+z)}{\partial x} + \frac{\partial(y+2z)}{\partial y} + \frac{\partial(z-y)}{\partial z} = 2+1+1 = 4$$

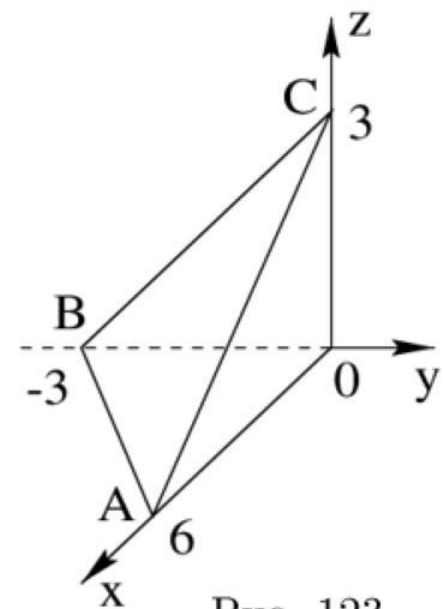


Рис. 123.

и, следовательно, по формуле (58.7)

$$\Phi_\sigma = \oiint_\sigma \overline{F}\cdot\overline{n}d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\overline{F}dV. \quad (58.7)$$

$$\Phi_\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\overline{F}dV = 4\iiint_V dV =$$

$$= 4\cdot\tfrac{1}{6}OA\cdot BO\cdot OC = 4\tfrac{1}{6}\cdot 6\cdot 3\cdot 3 = 36.$$

Перейдем теперь к непосредственному вычислению потока векторного поля через четыре грани BOC; AOC; AOB и ABC тетраэдра $OABC$.

- На грани BOC (рис. 124): $x=0$, $\overline{n}=-\overline{i}$, $\overline{F}\overline{n}=-z$, $\Phi_{BOC}=$
$= -\iint\limits_{BOC} z\,dz\,dy = -\int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{0}^{3+y} z\,dz = -\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{0} z^2\Big|_0^{3+y} dy = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-3}(9+6y+$
$+y^2)dy = -\frac{1}{2}\left(9y+3y^2+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{-3} = -\frac{1}{2}(-27+27-9) = -4{,}5.$

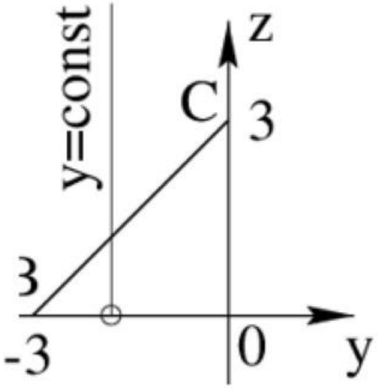


Рис. 124. *К примеру 58.2; плоскость* $x=0$

- На грани AOC (рис. 125): $y=0$, $\overline{n}=\overline{j}$, $\overline{F}\overline{n}=2z$, $\Phi_{AOC}=$
$= 2\iint\limits_{AOC} z\,dx\,dz = 2\int\limits_{0}^{3} z\,dz \int\limits_{0}^{6-2z} dx = 2\int\limits_{0}^{3} z(6-2z)dz =$
$= 2\left(3z^2-\frac{2}{3}z^3\right)\Big|_0^3 = 2(27-8) = 18.$

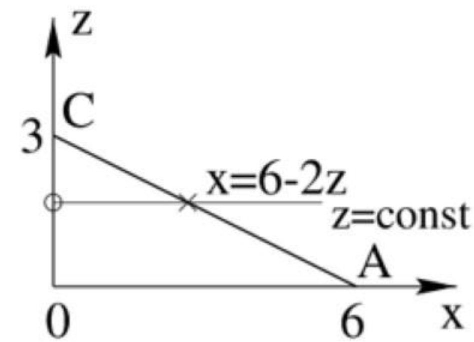


Рис. 125. *плоскость* $y=0$

- На грани AOB (рис. 126): $z=0$, $\overline{n}=-\overline{k}$, $\overline{F}\overline{n}=y$,
$\Phi_{AOB} = \iint\limits_{AOB} y\,dx\,dy = \int\limits_{-3}^{0} y\,dy \int\limits_{0}^{6+2y} dx = \int\limits_{-3}^{0} y(6+2y)dy =$
$= \left(3y^2+\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_{-3}^{0} = -27+18 = -9.$

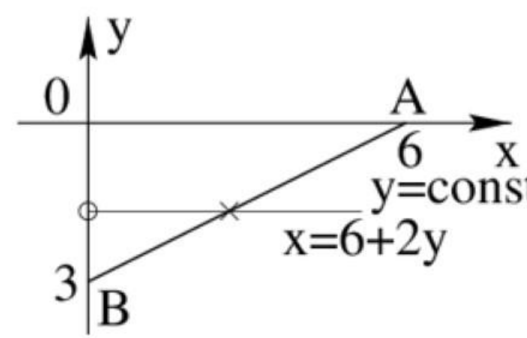
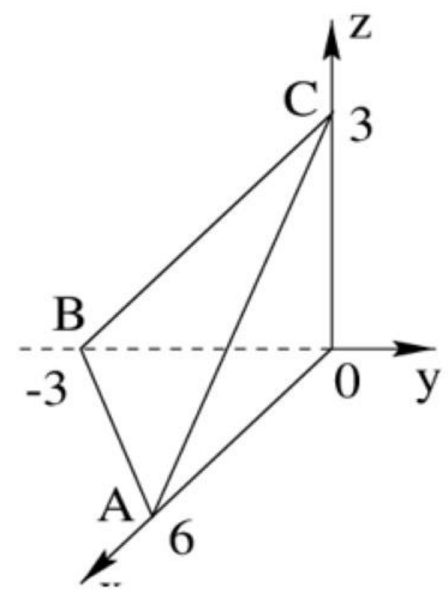


Рис. 126. *плоскость* $z=0$

- На плоскости $ABC: x-2y+2z-6=0$; нормальный вектор этой плоскости $\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k} \Rightarrow \overline{n} = \dfrac{\overline{N}}{N} =$
$= \dfrac{\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{1}{3}\overline{i} - \dfrac{2}{3}\overline{j} + \dfrac{2}{3}\overline{k}.$



Таким образом, скалярное произведение векторов $\overline{F}$ и $\overline{n}$ равно: $\overline{F}\overline{n} = \frac{1}{3}(2x+z-2y-4z+2z-2y)$. Положив в этом выражении $z = 3 - \frac{x}{2} + y$ получим $\overline{F}\overline{n} = \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}y - 1$ и, учитывая, что в соответствии с формулой (54.2) $d\sigma = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy =$
$= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}\,dxdy = \frac{3}{2}dxdy$, найдем

$$\Phi_{ABC} = \frac{3}{2}\iint\limits_{AOB}\left(\frac{5}{6}x - \frac{5}{3}y - 1\right)dxdy = \frac{3}{2}\int\limits_{-3}^{0}dy\int\limits_{0}^{6+2y}\left(\frac{5}{6}x - \frac{5}{3}y - 1\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_{-3}^{0}\left(\frac{5}{12}(6+2y)^2 - \frac{5}{3}(6+2y) - (6+2y)\right)dy =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_{-3}^{0}\left(9 - 2y - \frac{5}{3}y^2\right)dy = \frac{3}{2}\left(9y - y^2 - \frac{5}{3}y^3\right)\Big|_{-3}^{0} = 31{,}5.$$

- Суммарный поток векторного поля через поверхность ограничивающую тетраэдр $OABC$ $\Phi_\sigma = \Phi_{BOC} + \Phi_{AOC} + \Phi_{AOB} +$
$+ \Phi_{ABC} = -4{,}5 + 18 - 9 + 31{,}5 = 36.$

Пример 58.4. *Вычислить циркуляцию векторного поля $\overline{F}$ по контуру $ACBA$ из примера 58.2 на основе теоремы Стокса и непосредственно.*

Р е ш е н и е: Для заданного поля $P = 2x + z$, $Q = y + 2z$, $R = z - y$ и, следовательно, по формуле (58.13)

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k} =$$

$$= (-1-2)\overline{i} + (1-0)\overline{j} + (0-0)\overline{k} = -3\overline{i} + \overline{j}.$$

Вектор $\overline{n}$ найден в примере 58.2. Поток $\operatorname{rot}\overline{F}$ через грань ABC

$$\iint\limits_{\sigma} \overline{n}\operatorname{rot}\overline{F}d\sigma = \iint\limits_{ACB} (-1 - \frac{2}{3})d\sigma = -\frac{5}{3}\iint\limits_{ACB} d\sigma = -\frac{5}{3}d\sigma_{ACB} =$$

$$= -\frac{5}{3}\frac{S_{ABC}}{\cos\gamma} = -\frac{5}{3}\frac{\frac{1}{2}OA\cdot OB}{2/3} = -\frac{5}{3}\frac{3}{2}\frac{6\cdot 3}{2} = -22{,}5.$$

Таким образом, согласно формуле Стокса (58.14) циркуляция поля по контуру $ACBA$

$$\oint\limits_{ACBA} \overline{Fdl} = \iint\limits_{ACB} \overline{n}\operatorname{rot}\overline{F}d\sigma = -22{,}5.$$

Найдем теперь значение циркуляции $\oint\limits_{ACBA} \overline{Fdl}$ вычисляя криволинейные интегралы от $Pdx + Qdy + Rdz$ по ребрам AC; CB и BA:

- на ребре AC: $y = 0$ и $z = 3 - \frac{x}{2}$, откуда $dy = 0$ и $dz = -\frac{1}{2}dx$.
  Таким образом, $\int\limits_{AB} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$

  $$\int\limits_6^0 \left(\tfrac{7}{4}x + \tfrac{3}{2}\right) dx = \left(\tfrac{7}{8}x^2 + \tfrac{3}{2}x\right)\Big|_6^0 = -40{,}5.$$

- на ребре CB: $x = 0$ и $z = 3 + y$, откуда $dx = 0$ и $dz = dy$.
  Таким образом, $\int\limits_{CB} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$

  $$\int\limits_0^{-3} (9 + 3y)\, dy = \left(9y + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{-3} = -13{,}5.$$

- на ребре BA: $z = 0$ и $x = 6 + 2y$, откуда $dz = 0$ и $dx = 2dy$.
  Таким образом, $\int\limits_{BA} (2x + y)dx + (y + 2z)dy + (z - y)dz =$

  $$\int\limits_{-3}^0 (24 + 9y)\, dy = \left(24y + \frac{9y^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^0 = 31{,}5.$$

В итоге $\oint\limits_{ACBA} \overline{Fdl} = -40{,}5 - 13{,}5 + 31{,}5 = -22{,}5.$

Пример 58.5. *Проверить, является ли поле* $\overline{F} = (2xy + z^2)\overline{i} + (x^2 + z)\overline{j} + (y + 2xz)\overline{k}$ *потенциальным и, если да, найти его потенциал.*

Р е ш е н и е:

Для данного поля $P = 2xy + z^2$; $Q = x^2 + z$; $R = y + 2xz$. Проверим условие потенциальности (58.16)

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - 1 = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2z - 2z = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0,$$

следовательно, что $\operatorname{rot}\overline{F} = 0$ и поле имеет потенциал. Найдем его по формуле (61.20), положив $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, поскольку никаких особенностей функции $P(x;y;z)$; $Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$ не имеют.

$$u(x;y;z) = \int_0^x 0dx + \int_0^y x^2 dy + \int_0^z (y + 2xz)dz = x^2y + yz + xz^2 + C.$$

Проверка: $P = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z^2$; $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + z$; $R = \dfrac{\partial u}{\partial z} = y + 2xz$.

Спасибо за внимание