Численные методы

Метод итераций. Метод Зейделя

Абсолютная величина и норма матрицы

Абсолютной величиной (модулем) матрицы А понимается матрица [A], где все элементы a_{ij} – это модули элементов матрицы А.

Норма матрицы А — действительное число $\| A \|$

Есть 3 нормы:

1) $\| A \|_1$ — максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам
2) $\| A \|_2$ — максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам
3) $\| A \|_3$ — корень из суммы квадратов модулей всех элементов матрицы

Абсолютная величина и норма матрицы

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ Вычислить $\| A \|_1$, $\| A \|_2$, $\| A \|_3$

Решение:

$\| A \|_1 = \max(2+1+4, 5+3+2, 6+7+3) = \max(7, 10, 16) = 16$

$\| A \|_2 = \max(2+5+6, 1+3+7, 4+2+3) = \max(13,11,9) = 13$

$\| A \|_3 = \sqrt{2^2+1^2+4^2+5^2+3^2+2^2+6^2+7^2+3^2} = \sqrt{153} = 12{,}2$

Абсолютная величина и норма матрицы

2) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ вектор-столбец

$\| A \|_1 = \max (1, 2, 3, 5) = 5$

$\| A \|_2 = \max(1+2+3+5) = 11$

$\| A \|_3 = \sqrt{1^2+2^2+3^2+5^2} = \sqrt{39} = 6{,}2$

Приближённые методы решения СЛУ

Методы позволяют получить значения корней
с заданной точностью.
Процесс построения последовательности решений -
итерационный (повторяющийся).

Эффективность итерационных методов зависит от:
1) удачного выбора начального вектора решений;
2) быстроты сходимости процесса.

Метод итераций

Пусть дана СЛУ в матричном виде $\mathbf{A \cdot X = B}$

Запишем систему в нормальном виде $\mathbf{X = \beta + \alpha \cdot X}$

В ходе выполнения итераций $\mathbf{X^{(к+1)} = \beta + \alpha \cdot X^{(к)}}$

Условие сходимости итерационного процесса

Если сумма модулей элементов строк или сумма модулей элементов столбцов меньше 1, то процесс итераций сходится к единственному решению.

Метод итераций

Решить СЛУ методом итераций

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4 \end{cases}$$

Приведём СЛУ к нормальному виду:

$$\begin{cases} 10x_1 = 1{,}9 + 2{,}4x_1 — 0{,}5x_2 — 2{,}4x_3 \\ 10x_2 = 9{,}7 — 2{,}2x_1 + 0{,}9\, x_2 — 4{,}4x_3 \\ 10x_3 = -1{,}4 + 1{,}3x_1 — 0{,}2x_2 + 4{,}2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 — 0{,}05x_2 — 0{,}24x_3 \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 — 0{,}44x_3 \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 — 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3 \end{cases}$$

Метод итераций

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 — 0{,}05x_2 — 0{,}24x_3 \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 — 0{,}44x_3 \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 — 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}24 & -0{,}05 & -0{,}24 \\ -0{,}22 & 0{,}09 & -0{,}44 \\ 0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}42 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}97 \\ -0{,}14 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку на сходимость итерационного процесса:
$||A||_1 = \max(0{,}53; 0{,}75; 0{,}57) = 0{,}75 < 1$

Метод итераций

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}24x_3 \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 - 0{,}44x_3 \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 - 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0{,}19$; $x_2^{(0)} = 0{,}97$; $x_3^{(0)} = -0{,}14$ $B = \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}97 \\ -0{,}14 \end{pmatrix}$

Строим итерации:

$x_1^{(1)} = 0{,}19 + 0{,}24 \cdot 0{,}19 - 0{,}05 \cdot 0{,}97 - 0{,}24 \cdot (-0{,}14) = 0{,}2207$

$x_2^{(1)} = 0{,}97 - 0{,}22 \cdot 0{,}19 + 0{,}09 \cdot 0{,}97 - 0{,}44 \cdot (-0{,}14) = 1{,}0771$

$x_3^{(1)} = -0{,}14 + 0{,}13 \cdot 0{,}19 - 0{,}02 \cdot 0{,}97 + 0{,}42 \cdot (-0{,}14) = -0{,}1935$

Первое приближение $x_1^{(1)} = 0{,}2207$; $x_2^{(1)} = 1{,}0771$; $x_3^{(1)} = -0{,}1935$

Метод итераций

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}24x_3 \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 - 0{,}44x_3 \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 - 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0{,}19$; $x_2^{(0)} = 0{,}97$; $x_3^{(0)} = -0{,}14$

Первое приближение $x_1^{(1)} = 0{,}2207$; $x_2^{(1)} = 1{,}0771$; $x_3^{(1)} = -0{,}1935$

Строим итерации:

$x_1^{(2)} = 0{,}19 + 0{,}24 \cdot 0{,}2207 - 0{,}05 \cdot 1{,}0771 - 0{,}24 \cdot (-0{,}1935) = 0{,}235553$

$x_2^{(2)} = 0{,}97 - 0{,}22 \cdot 0{,}2207 + 0{,}09 \cdot 1{,}0771 - 0{,}44 \cdot (-0{,}1935) = 1{,}103525$

$x_3^{(2)} = -0{,}14 + 0{,}13 \cdot 0{,}2207 - 0{,}02 \cdot 1{,}0771 + 0{,}42 \cdot (-0{,}1935) = -0{,}214121$

Второе приближение $x_1^{(2)} = 0{,}235553$; $x_2^{(2)} = 1{,}103525$; $x_3^{(2)} = -0{,}214121$

Метод итераций

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 — 0{,}05x_2 — 0{,}24x_3 \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 — 0{,}44x_3 \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 — 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0{,}19$; $x_2^{(0)} = 0{,}97$; $x_3^{(0)} = -0{,}14$
Первое приближение $x_1^{(1)} = 0{,}2207$; $x_2^{(1)} = 1{,}0771$; $x_3^{(1)} = -0{,}1935$
Второе приближение $x_1^{(2)} = 0{,}235553$; $x_2^{(2)} = 1{,}103525$; $x_3^{(2)} = -0{,}214121$

№ итерации	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	-0,14
1	0,2207	1,0771	-0,1935
2	0,235553	1,103525	-0,214121

Метод Зейделя

Решить СЛУ с точностью до 10^{-3}

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}24x_3 \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 - 0{,}44x_3 \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 - 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0{,}19$; $x_2^{(0)} = 0{,}97$; $x_3^{(0)} = -0{,}14$

Строим итерации по методу Зейделя:

$x_1^{(1)} = 0{,}19 + 0{,}24 \cdot 0{,}19 - 0{,}05 \cdot 0{,}97 - 0{,}24 \cdot (-0{,}14) = 0{,}2207$

$x_2^{(1)} = 0{,}97 - 0{,}22 \cdot 0{,}2207 + 0{,}09 \cdot 0{,}97 - 0{,}44 \cdot (-0{,}14) = 1{,}0703$

$x_3^{(1)} = -0{,}14 + 0{,}13 \cdot 0{,}2207 - 0{,}02 \cdot 1{,}0703 + 0{,}42 \cdot (-0{,}14) = -0{,}1915$

Первое приближение $x_1^{(1)} = 0{,}2207$; $x_2^{(1)} = 1{,}0703$; $x_3^{(1)} = -0{,}1915$

Метод Зейделя

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 — 0{,}05x_2 — 0{,}24x_3 \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 — 0{,}44x_3 \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 — 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3 \end{cases}$$

<u>Начальное решение</u> $x_1^{(0)} = 0{,}19$; $x_2^{(0)} = 0{,}97$; $x_3^{(0)} = -0{,}14$

<u>Первое приближение</u> $x_1^{(1)} = 0{,}2207$; $x_2^{(1)} = 1{,}0703$; $x_3^{(1)} = -0{,}1915$

<u>Вторые приближения:</u>

$x_1^{(2)} = 0{,}19 + 0{,}24 \cdot 0{,}2207 — 0{,}05 \cdot 1{,}0703 — 0{,}24 \cdot (-0{,}1915) = 0{,}2354$

$x_2^{(2)} = 0{,}97 - 0{,}22 \cdot 0{,}2354 + 0{,}09 \cdot 1{,}0703 — 0{,}44 \cdot (-0{,}1915) = 1{,}0988$

$x_3^{(2)} = -0{,}14 + 0{,}13 \cdot 0{,}2354 — 0{,}02 \cdot 1{,}0988 + 0{,}42 \cdot (-0{,}1915) = - 0{,}2118$

Метод Зейделя

Решение примера приведено в таблице:

№ итерации	x1	x2	x3
0	0,19	0,97	-0,14
1	0,2207	1,0703	-0,1915
2	0,2354	1,0988	-0,2118
3	0,2424	1,1088	-0,2196
4	0,2454	1,1124	-0,2226
5	0,2467	1,1138	-0,2237
6	0,2472	1,1143	-0,2241
7	0,2474	1,1145	-0,2243

Построение итераций заканчивается, когда с заданной степенью точности получаются одинаковые значения в двух последних итерациях. У нас это итерации 6 и 7.

Окончательный ответ: $x_1 \approx 0,247$; $x_2 \approx 1,114$; $x_3 \approx -0,224$;

Объявления

- 1) ПР «Погрешности» (в СДО)
- 2) ПР «Точное решение СЛУ»
- по вариантам (в СДО)
- 3) ПР «Метод итераций. Метод Зейделя»
- (будет на аудиторном занятии или в СДО)
- **Спасибо за внимание**