

Численные методы

Метод итераций. Метод Зейделя

Абсолютная величина и норма матрицы

Абсолютной величиной (модулем) матрицы A понимается матрица $[A]$, где все элементы a_{ij} — это модули элементов матрицы A .

Норма матрицы A — действительное число $\|A\|$

Есть 3 нормы:

- 1) $\|A\|_1$ — максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам
- 2) $\|A\|_2$ — максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам
- 3) $\|A\|_3$ — корень из суммы квадратов модулей всех элементов матрицы

Абсолютная величина и норма матрицы

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ Вычислить $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_3$

Решение:

$$\|A\|_1 = \max(2+1+4, 5+3+2, 6+7+3) = \max(7, 10, 16) = 16$$

$$\|A\|_2 = \max(2+5+6, 1+3+7, 4+2+3) = \max(13, 11, 9) = 13$$

$$\|A\|_3 = \sqrt{2^2+1^2+4^2+5^2+3^2+2^2+6^2+7^2+3^2} = \sqrt{153} = 12,2$$

Абсолютная величина и норма матрицы

$$2) X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ вектор-столбец}$$

$$\|A\|_1 = \max(1, 2, 3, 5) = 5$$

$$\|A\|_2 = \max(1+2+3+5) = 11$$

$$\|A\|_3 = \sqrt{1^2+2^2+3^2+5^2} = \sqrt{39} = 6,2$$

Приближённые методы решения СЛУ

Методы позволяют получить значения корней с заданной точностью.

Процесс построения последовательности решений - **итерационный** (повторяющийся).

Эффективность итерационных методов зависит от:

- 1) удачного выбора начального вектора решений;
- 2) быстроты сходимости процесса.

Метод итераций

Пусть дана СЛУ в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Запишем систему в нормальном виде

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}$$

В ходе выполнения итераций

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}^{(k)}$$

Условие сходимости итерационного процесса

Если сумма модулей элементов строк или сумма модулей элементов столбцов меньше 1, то процесс итераций сходится к единственному решению.

Метод итераций

Решить СЛУ методом итераций

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4 \end{cases}$$

Приведём СЛУ к нормальному виду:

$$\begin{cases} 10x_1 = 1,9 + 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3 \\ 10x_2 = 9,7 - 2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3 \\ 10x_3 = -1,4 + 1,3x_1 - 0,2x_2 + 4,2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 \\ x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 \end{cases}$$

Метод итераций

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 \\ x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку на сходимость итерационного процесса:

$$\|A\|_1 = \max(0,53; 0,75; 0,57) = 0,75 < 1$$

Метод итераций

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 \\ x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0,19$; $x_2^{(0)} = 0,97$; $x_3^{(0)} = -0,14$ $B = \begin{pmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{pmatrix}$

Строим итерации:

$$x_1^{(1)} = 0,19 + 0,24 \cdot 0,19 - 0,05 \cdot 0,97 - 0,24 \cdot (-0,14) = 0,2207$$

$$x_2^{(1)} = 0,97 - 0,22 \cdot 0,19 + 0,09 \cdot 0,97 - 0,44 \cdot (-0,14) = 1,0771$$

$$x_3^{(1)} = -0,14 + 0,13 \cdot 0,19 - 0,02 \cdot 0,97 + 0,42 \cdot (-0,14) = -0,1935$$

Первое приближение $x_1^{(1)} = 0,2207$; $x_2^{(1)} = 1,0771$; $x_3^{(1)} = -0,1935$

Метод итераций

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 \\ x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0,19$; $x_2^{(0)} = 0,97$; $x_3^{(0)} = -0,14$

Первое приближение $x_1^{(1)} = 0,2207$; $x_2^{(1)} = 1,0771$; $x_3^{(1)} = -0,1935$

Строим итерации:

$$x_1^{(2)} = 0,19 + 0,24 \cdot 0,2207 - 0,05 \cdot 1,0771 - 0,24 \cdot (-0,1935) = 0,235553$$

$$x_2^{(2)} = 0,97 - 0,22 \cdot 0,2207 + 0,09 \cdot 1,0771 - 0,44 \cdot (-0,1935) = 1,103525$$

$$x_3^{(2)} = -0,14 + 0,13 \cdot 0,2207 - 0,02 \cdot 1,0771 + 0,42 \cdot (-0,1935) = -0,214121$$

Второе приближение $x_1^{(2)} = 0,235553$; $x_2^{(2)} = 1,103525$; $x_3^{(2)} = -0,214121$

Метод итераций

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 \\ x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0,19$; $x_2^{(0)} = 0,97$; $x_3^{(0)} = -0,14$

Первое приближение $x_1^{(1)} = 0,2207$; $x_2^{(1)} = 1,0771$; $x_3^{(1)} = -0,1935$

Второе приближение $x_1^{(2)} = 0,235553$; $x_2^{(2)} = 1,103525$; $x_3^{(2)} = -0,214121$

№ итерации	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	-0,14
1	0,2207	1,0771	-0,1935
2	0,235553	1,103525	-0,214121

Метод Зейделя

Решить СЛУ с точностью до 10^{-3}

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 \\ x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0,19$; $x_2^{(0)} = 0,97$; $x_3^{(0)} = -0,14$

Строим итерации по методу Зейделя:

$$x_1^{(1)} = 0,19 + 0,24 \cdot 0,19 - 0,05 \cdot 0,97 - 0,24 \cdot (-0,14) = 0,2207$$

$$x_2^{(1)} = 0,97 - 0,22 \cdot 0,2207 + 0,09 \cdot 0,97 - 0,44 \cdot (-0,14) = 1,0703$$

$$x_3^{(1)} = -0,14 + 0,13 \cdot 0,2207 - 0,02 \cdot 1,0703 + 0,42 \cdot (-0,14) = -0,1915$$

Первое приближение $x_1^{(1)} = 0,2207$; $x_2^{(1)} = 1,0703$; $x_3^{(1)} = -0,1915$

Метод Зейделя

СЛУ в нормальном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0,19 + 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 \\ x_2 = 0,97 - 0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 \\ x_3 = -0,14 + 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 \end{cases}$$

Начальное решение $x_1^{(0)} = 0,19$; $x_2^{(0)} = 0,97$; $x_3^{(0)} = -0,14$

Первое приближение $x_1^{(1)} = 0,2207$; $x_2^{(1)} = 1,0703$; $x_3^{(1)} = -0,1915$

Вторые приближения:

$$x_1^{(2)} = 0,19 + 0,24 \cdot 0,2207 - 0,05 \cdot 1,0703 - 0,24 \cdot (-0,1915) = 0,2354$$

$$x_2^{(2)} = 0,97 - 0,22 \cdot 0,2354 + 0,09 \cdot 1,0703 - 0,44 \cdot (-0,1915) = 1,0988$$

$$x_3^{(2)} = -0,14 + 0,13 \cdot 0,2354 - 0,02 \cdot 1,0988 + 0,42 \cdot (-0,1915) = -0,2118$$

Метод Зейделя

Решение примера приведено в таблице:

№ итерации	x1	x2	x3
0	0,19	0,97	-0,14
1	0,2207	1,0703	-0,1915
2	0,2354	1,0988	-0,2118
3	0,2424	1,1088	-0,2196
4	0,2454	1,1124	-0,2226
5	0,2467	1,1138	-0,2237
6	0,2472	1,1143	-0,2241
7	0,2474	1,1145	-0,2243

Построение итераций заканчивается, когда с заданной степенью точности получаются одинаковые значения в двух последних итерациях. У нас это итерации 6 и 7.

Окончательный ответ: $x_1 \approx 0,247$; $x_2 \approx 1,114$; $x_3 \approx -0,224$;

Объявления

- 1) ПР «Погрешности» (в СДО)
- 2) ПР «Точное решение СЛУ»
- по вариантам (в СДО)
- 3) ПР «Метод итераций. Метод Зейделя»
- (будет на аудиторном занятии или в СДО)
- **Спасибо за внимание**