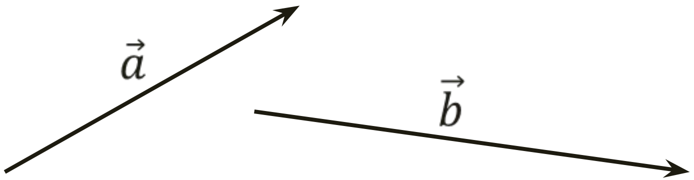
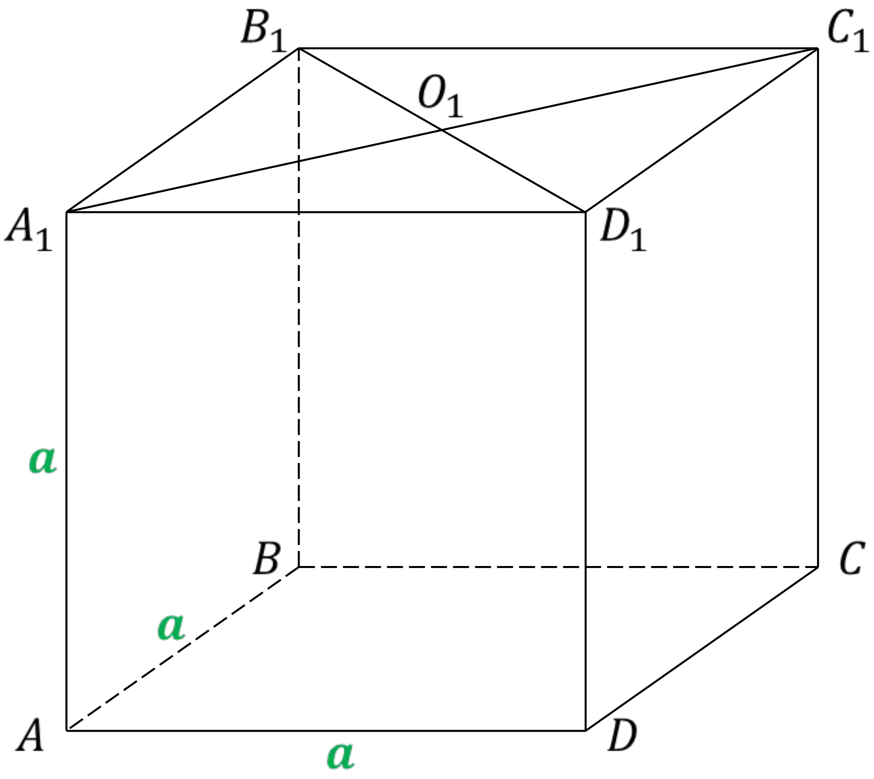
Скалярное произведение векторов

Определение. **Скалярным произведением** двух векторов называется произведение их *длин* на *косинус угла между ними*.

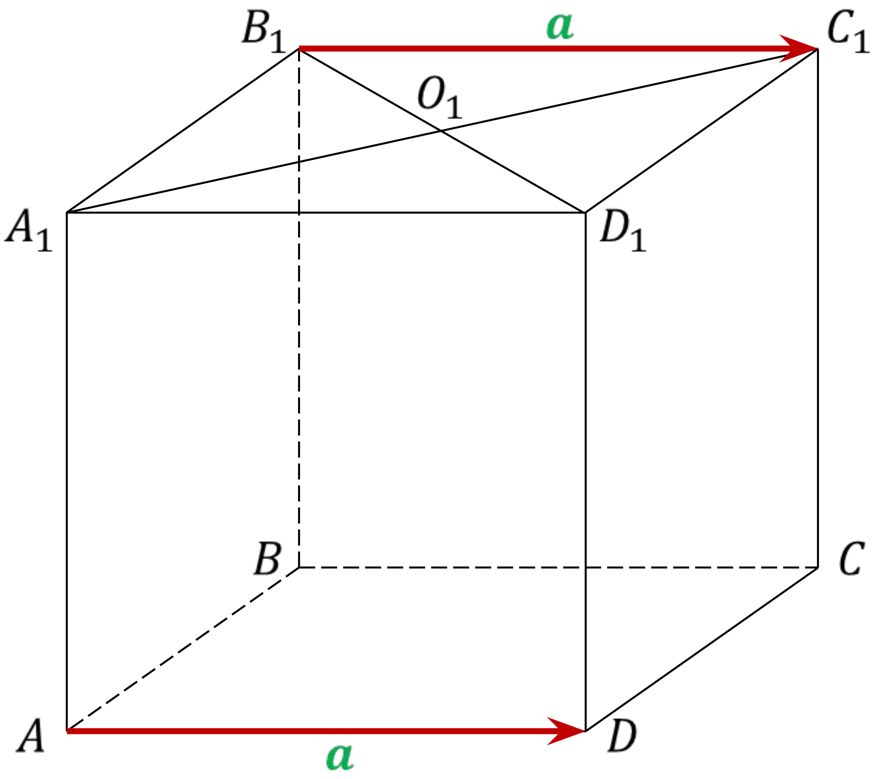


$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}}$$

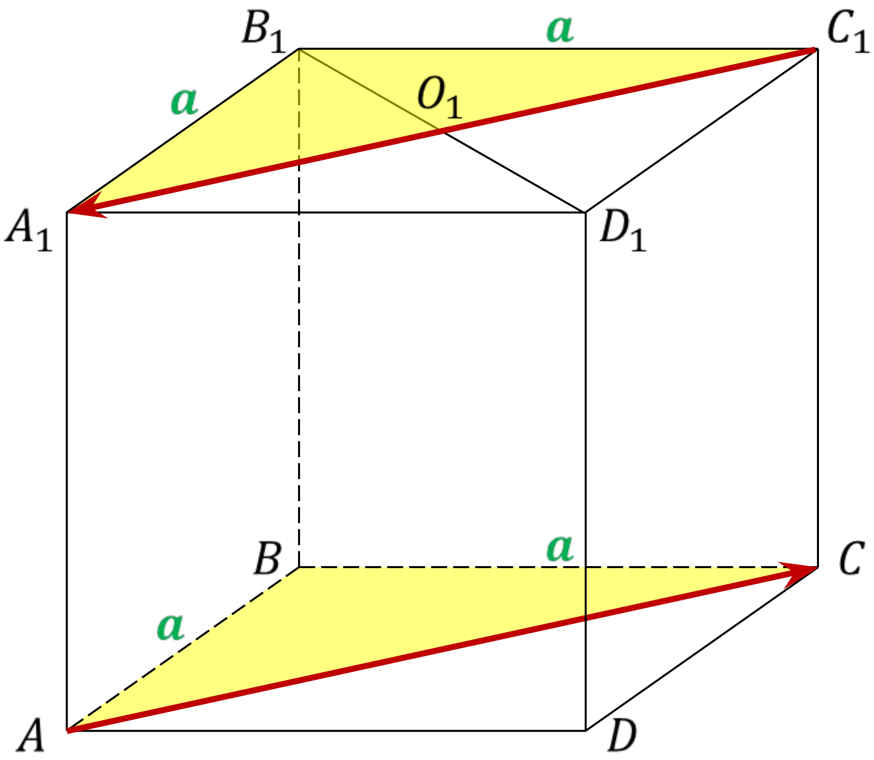
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб



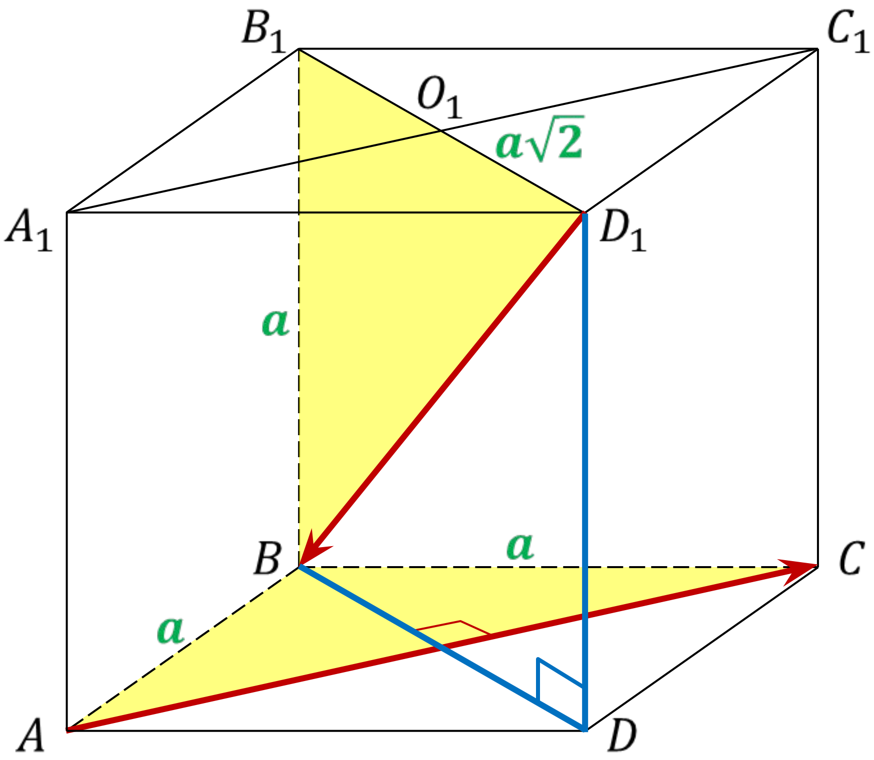
а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$



б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$



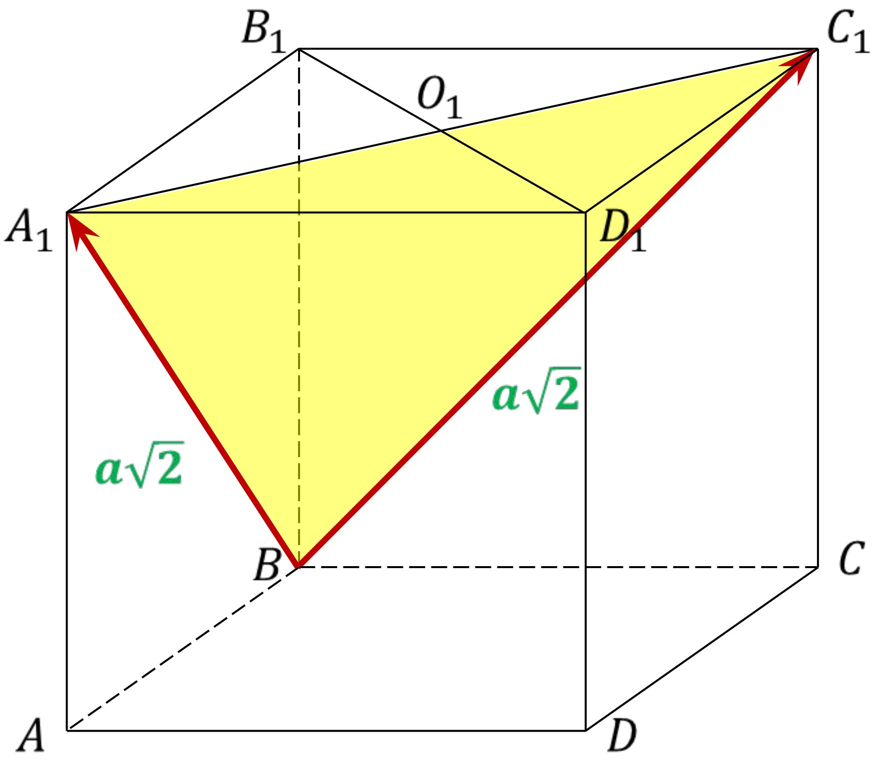
в) $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$



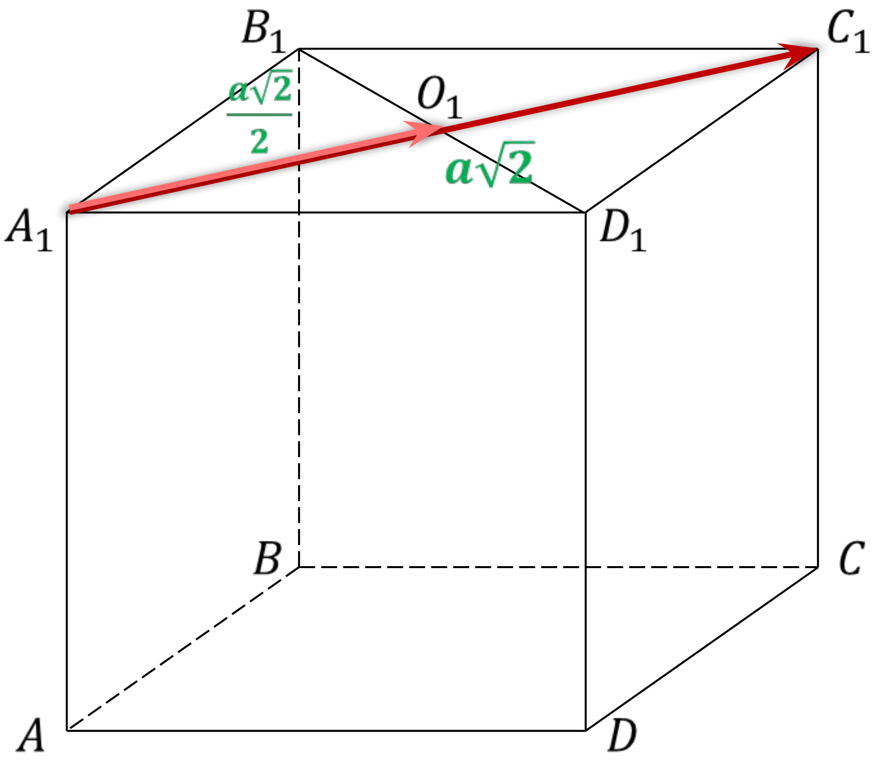
$$D_1B = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

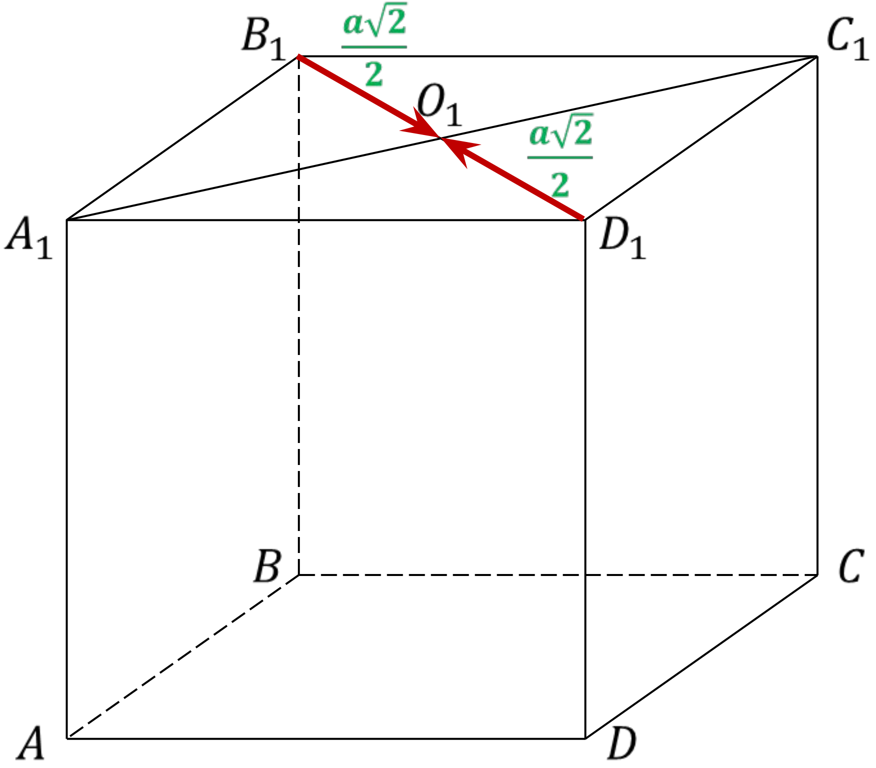
г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$



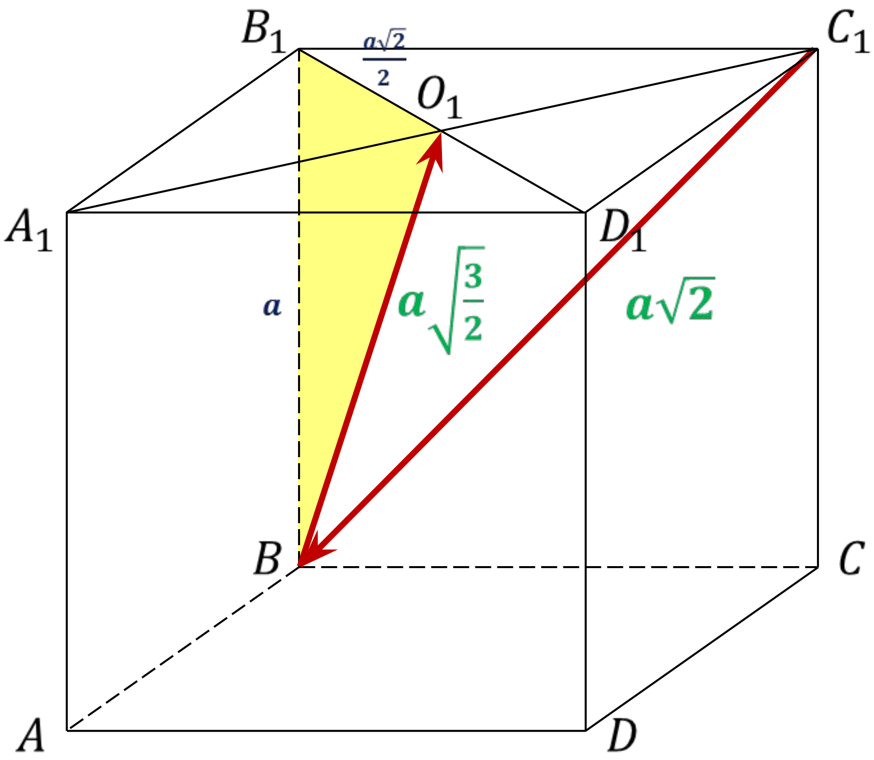
д) $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$



е) $\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$



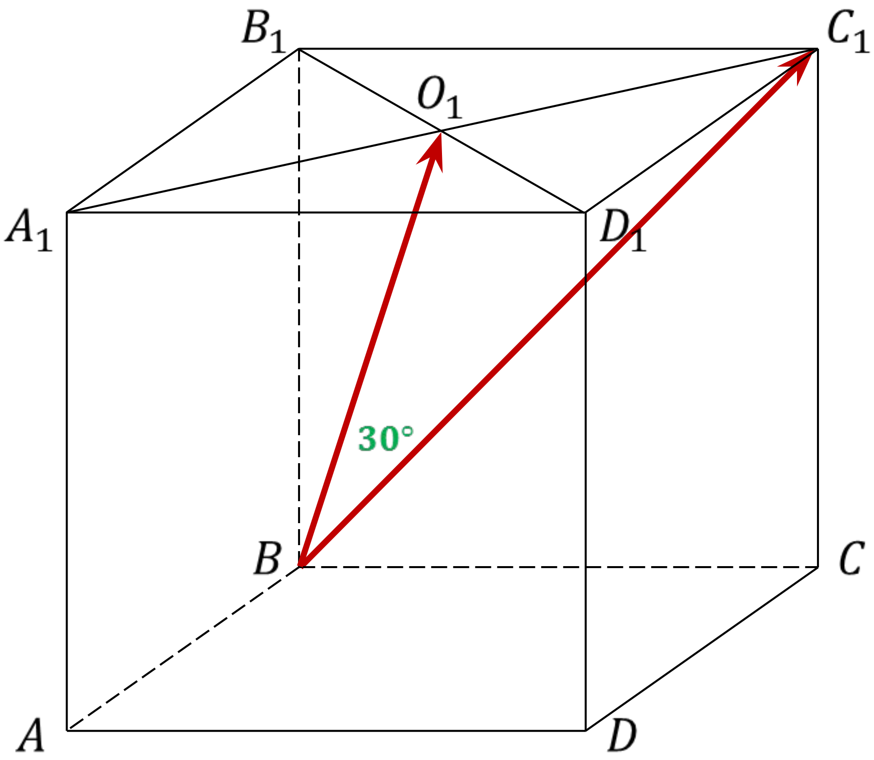
ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$



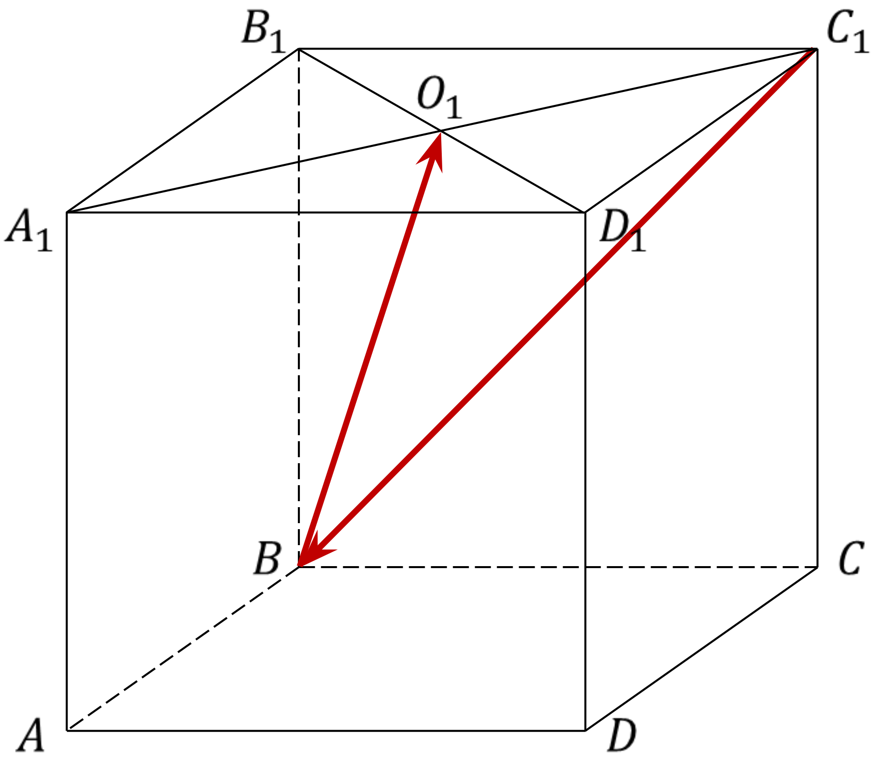
$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \left|\overrightarrow{BO_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C_1B}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{BO_1}\ \overrightarrow{C_1B}} = a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\sqrt{2}$



ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \left|\overrightarrow{BO_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C_1B}\right| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{BO_1}\ \overrightarrow{C_1B}} = a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\sqrt{2}$



а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}| \cdot \cos\widehat{\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{B_1C_1}} = a \cdot a \cdot \cos 0° = a \cdot a \cdot 1 = a^2$

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{C_1A_1}| \cdot \cos\widehat{\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{C_1A_1}} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 180° = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot (-1) = -2a^2$

в) $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{D_1B}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\widehat{\overrightarrow{D_1B}\ \overrightarrow{AC}} = a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 90° = a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot 0 = 0$

г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = |\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}| \cdot \cos\widehat{\overrightarrow{BA_1}\ \overrightarrow{BC_1}} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60° = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = a^2$

д) $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = |\overrightarrow{A_1O_1}| \cdot |\overrightarrow{A_1C_1}| \cdot \cos\widehat{\overrightarrow{A_1O_1}\ \overrightarrow{A_1C_1}} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 0° = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = a^2$

е) $\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = |\overrightarrow{D_1O_1}| \cdot |\overrightarrow{B_1O_1}| \cdot \cos\widehat{\overrightarrow{D_1O_1}\ \overrightarrow{B_1O_1}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180° = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) = -\frac{a^2}{2}$

ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = |\overrightarrow{BO_1}| \cdot |\overrightarrow{C_1B}| \cdot \cos\widehat{\overrightarrow{BO_1}\ \overrightarrow{C_1B}} = a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 150° = a^2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}a^2$

Скалярное произведение векторов **в координатах**

$\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$

$\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

Скалярное произведение векторов **в координатах**

$\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

$\boldsymbol{\vec{a}\,\{1; -1; 2\}}$ $\boldsymbol{\vec{b}\,\{-1; 1; 1\}}$ $\boldsymbol{\vec{c}\,\{5; 6; 2\}}$

$\vec{a} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \cdot \vec{a}$

$\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$

Задача. Пользуясь координатами векторов $\vec{a}\,\{3; -1; 1\}$, $\vec{b}\,\{-5; 1; 0\}$, $\vec{c}\,\{-1; -2; 1\}$, выяснить, каким является угол между парами векторов: острым, прямым или тупым.

а) $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$ б) $\widehat{\vec{b}\ \vec{c}}$ в) $\widehat{\vec{a}\ \vec{c}}$

Решение.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

б) $\vec{b} \cdot \vec{c}$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} > 0$$

в) $\vec{a} \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \boldsymbol{\cos \alpha}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\boldsymbol{\cos \alpha} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\boldsymbol{\cos \alpha} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

выражается формулой: $\boldsymbol{\cos \alpha} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$.

$$\cos\alpha = \frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}$$

Задача. Найти величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

а) $\vec{a}\,\{2; -2; 0\}$, $\vec{b}\,\{3; 0; -3\}$

$$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{2\cdot3+(-2)\cdot0+0\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 60^\circ$$

б) $\vec{a}\,\{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$, $\vec{b}\,\{-3; -3; 0\}$

$$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{\sqrt{2}\cdot(-3)+\sqrt{2}\cdot(-3)+2\cdot0}{\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 135^\circ$$

Задача. Найти величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Решение.

в) $\vec{a}\,\{0; 5; 0\}$, $\vec{b}\,\{0; -\sqrt{3}; 1\}$

$$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{0 \cdot 0 + 5 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 150°$$

г) $\vec{a}\,\{-2{,}5; 2{,}5; 0\}$, $\vec{b}\,\{-5; 5; 5\sqrt{2}\}$

$$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{(-2{,}5) \cdot (-5) + 2{,}5 \cdot 5 + 0 \cdot 5\sqrt{2}}{\sqrt{(-2{,}5)^2 + 2{,}5^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (5\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 45°$$

Задача. Найти величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

Решение.

д) $\vec{a}\,\{-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -2\}$, $\vec{b}\,\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right\}$

$$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{(-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + (-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + (-2)\cdot(-1)}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-1)^2}} = 0$$

$$\cos 90^\circ = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^\circ$$

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2 \neq 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон)

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон)

4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон)

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}$$