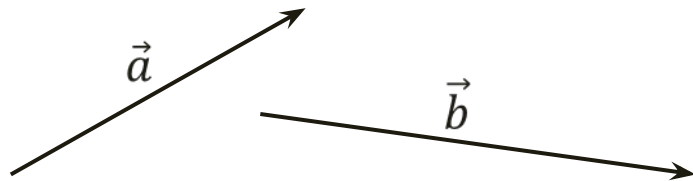


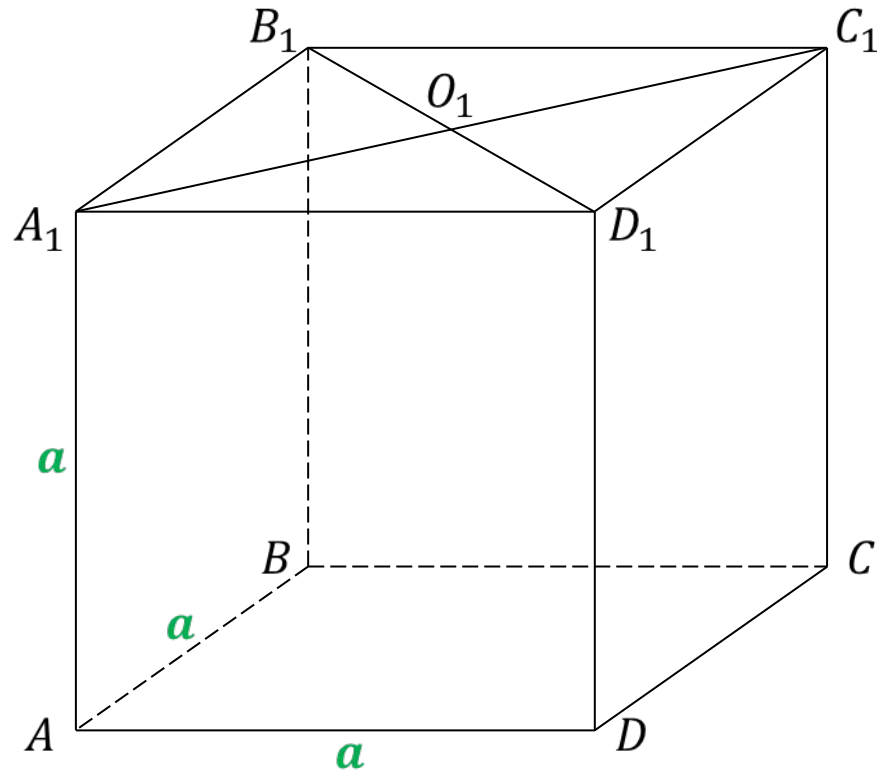
# Скалярное произведение векторов

**Определение. Скалярным произведением** двух векторов называется произведение их *длин* на *косинус* угла между ними.

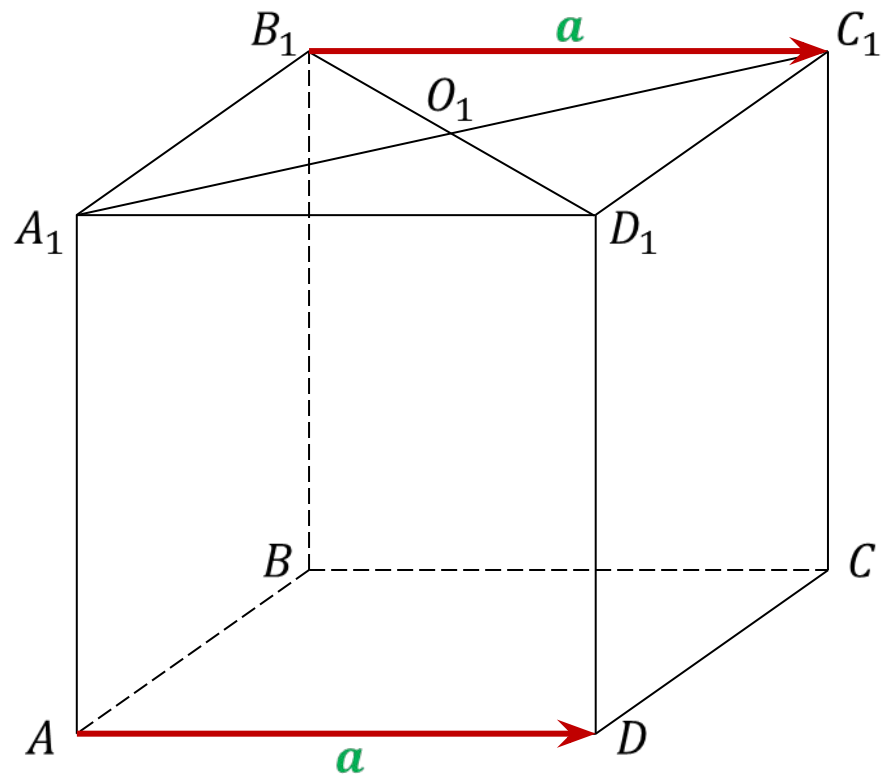


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a} \vec{b}}$$

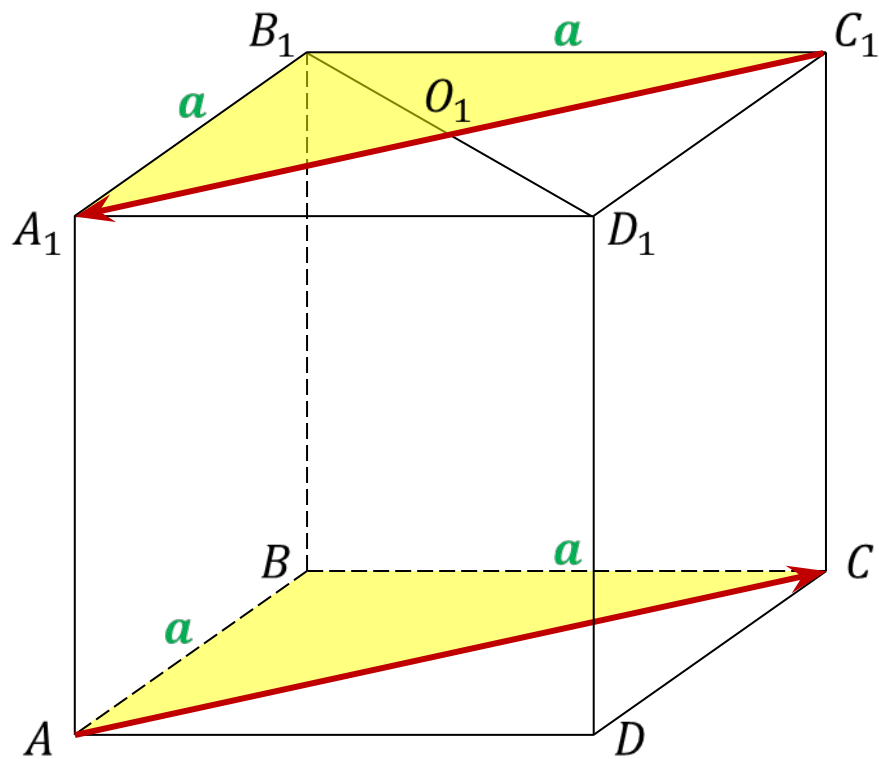
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб



a)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$



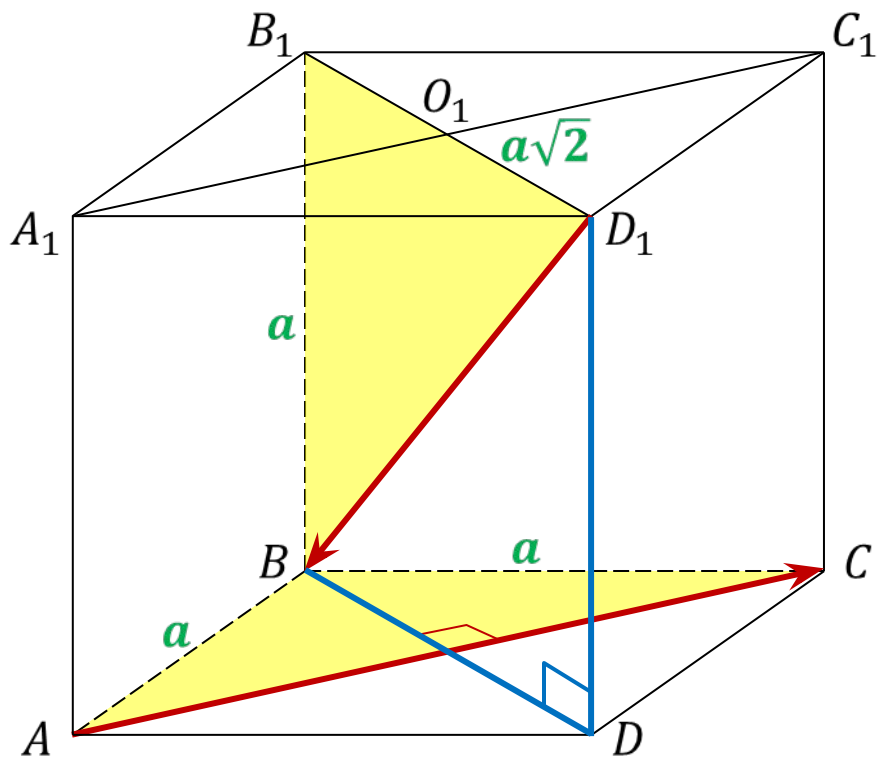
б)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$



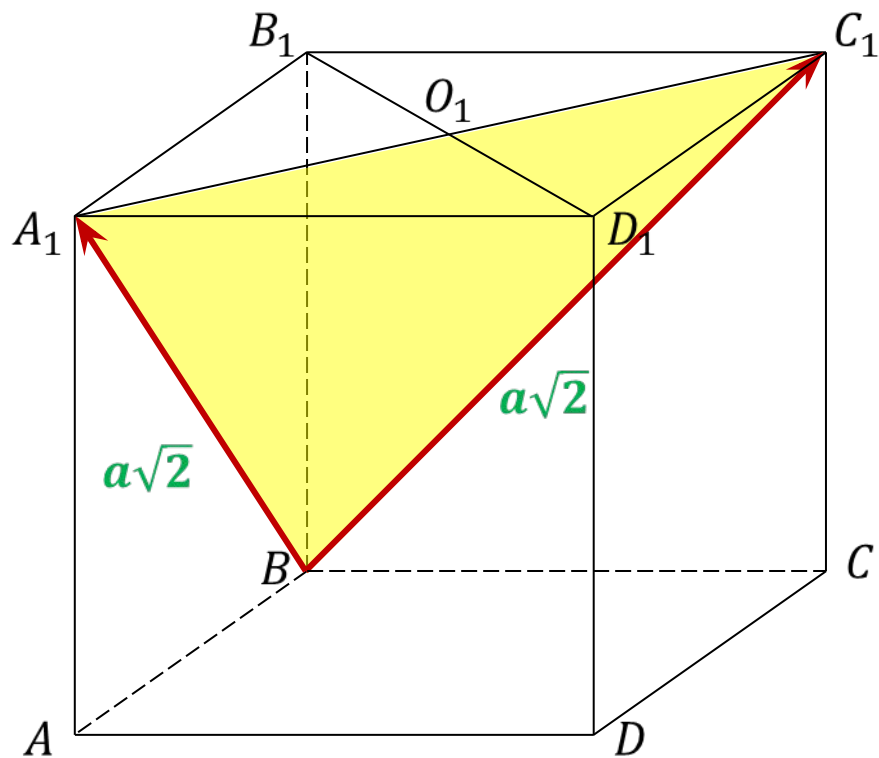
B)  $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$D_1B = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} =$$

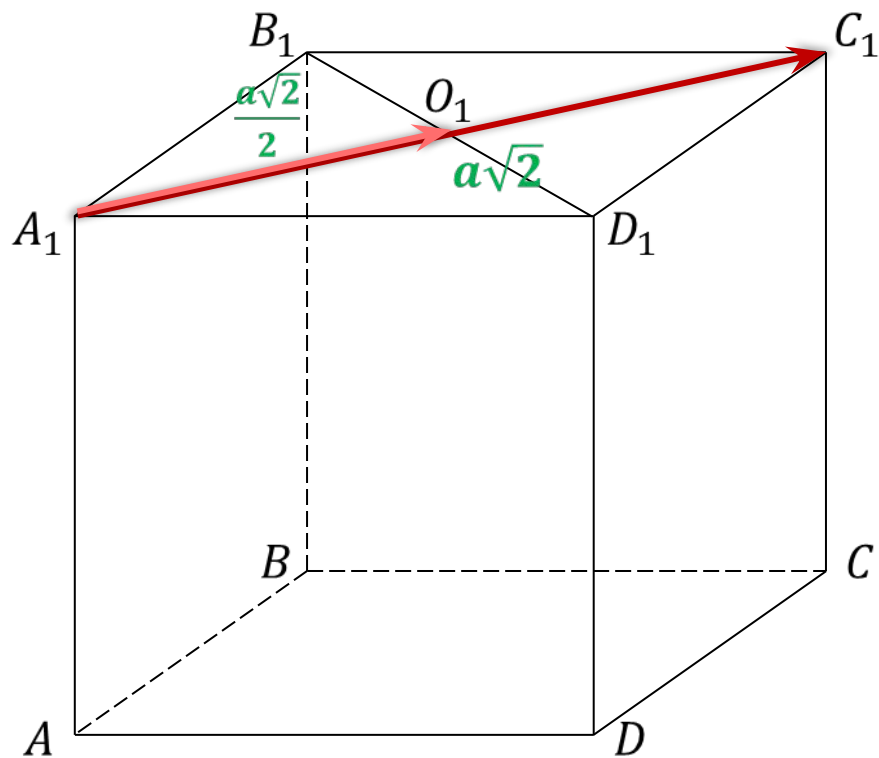
$$= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$



г)  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

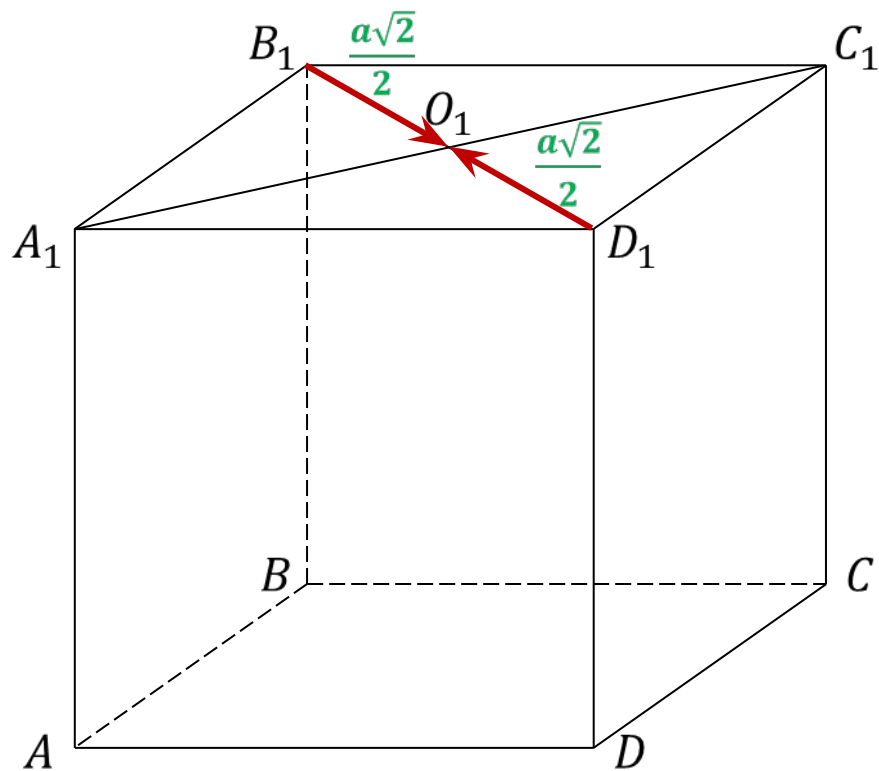


$$\text{д) } \overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$$





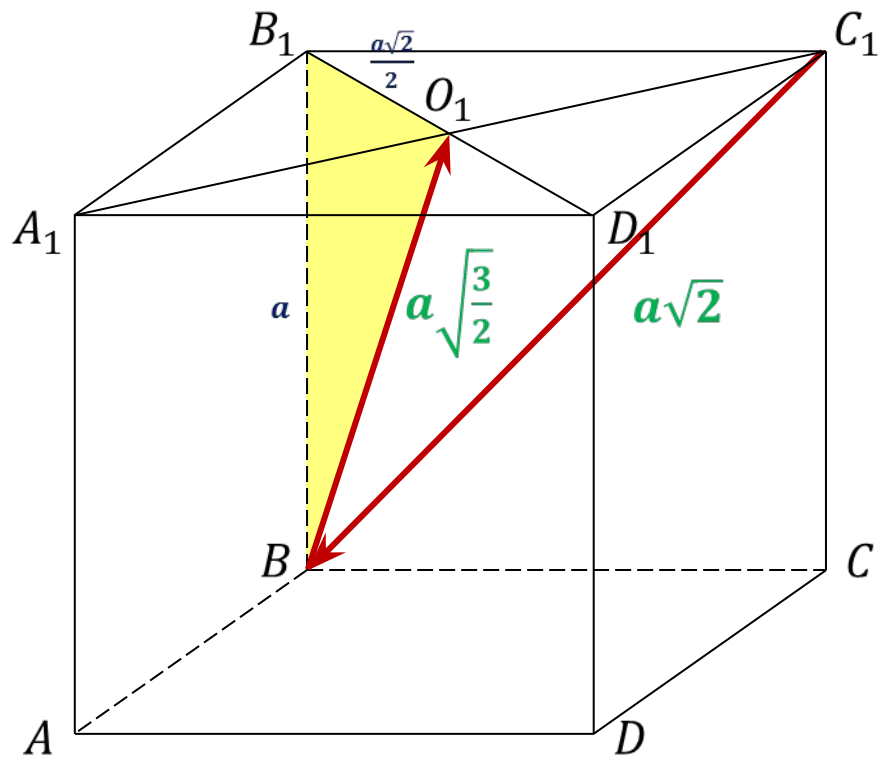
e)  $\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$



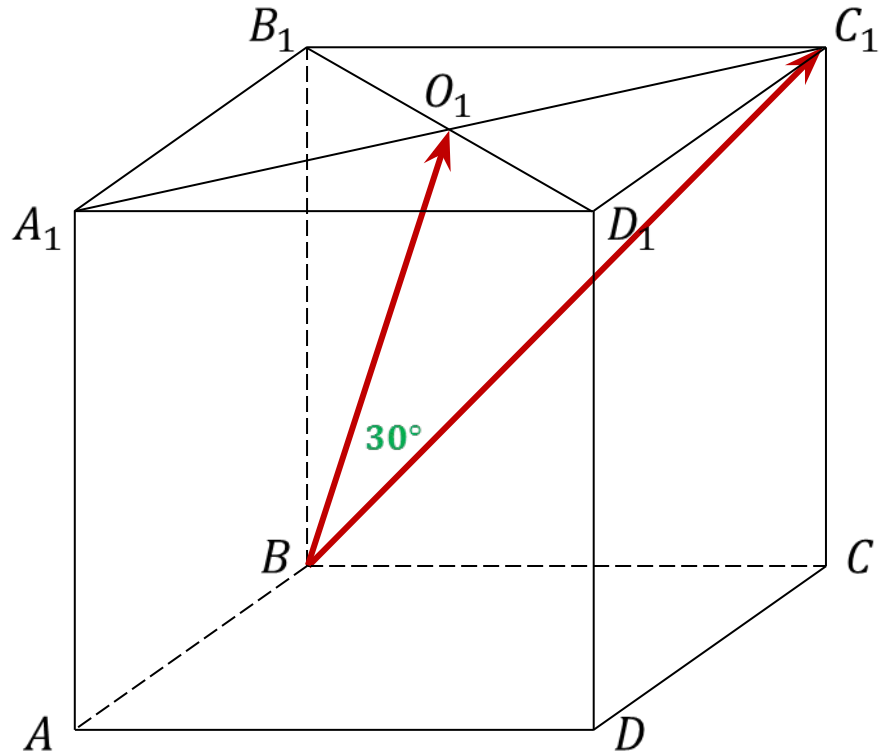
$$\text{ж) } \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$$

$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

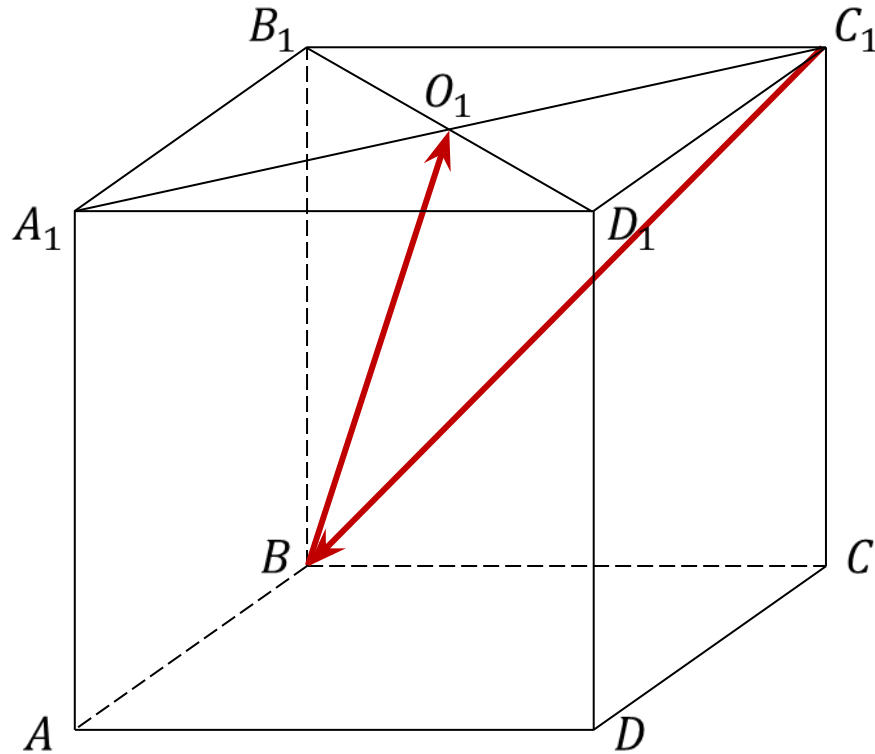
$$= \sqrt{\frac{3}{2}a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$



$$\text{ж) } \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = |\overrightarrow{BO_1}| \cdot |\overrightarrow{C_1B}| \cdot \cos \widehat{BO_1 C_1B} = a \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\sqrt{2}$$



$$\text{ж) } \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = |\overrightarrow{BO_1}| \cdot |\overrightarrow{C_1B}| \cdot \cos \widehat{BO_1 C_1B} = a \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\sqrt{2}$$



$$\text{a) } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{B_1C_1}| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{AD} \overrightarrow{B_1C_1}} = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a \cdot a \cdot 1 = a^2$$

$$\text{б) } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{C_1A_1}| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{AC} \overrightarrow{C_1A_1}} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 180^\circ = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot (-1) = -2a^2$$

$$\text{в) } \overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{D_1B}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{D_1B} \overrightarrow{AC}} = a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 90^\circ = a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot 0 = 0$$

$$\text{г) } \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = |\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{BA_1} \overrightarrow{BC_1}} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = a^2$$

$$\text{д) } \overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = |\overrightarrow{A_1O_1}| \cdot |\overrightarrow{A_1C_1}| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{A_1O_1} \overrightarrow{A_1C_1}} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 0^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = a^2$$

$$\text{е) } \overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = |\overrightarrow{D_1O_1}| \cdot |\overrightarrow{B_1O_1}| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{D_1O_1} \overrightarrow{B_1O_1}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) = -\frac{a^2}{2}$$

$$\text{ж) } \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = |\overrightarrow{BO_1}| \cdot |\overrightarrow{C_1B}| \cdot \cos \widehat{\overrightarrow{BO_1} \overrightarrow{C_1B}} = a\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 150^\circ = a^2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}a^2$$

## Скалярное произведение векторов в координатах

$$\vec{a} \{x_1; y_1\}$$

$$\vec{b} \{x_2; y_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

## Скалярное произведение векторов в координатах

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\vec{a} \{1; -1; 2\}$$

$$\vec{b} \{-1; 1; 1\}$$

$$\vec{c} \{5; 6; 2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$$

**Задача.** Пользуясь координатами векторов  $\vec{a} \{3; -1; 1\}$ ,  $\vec{b} \{-5; 1; 0\}$ ,  $\vec{c} \{-1; -2; 1\}$ , выяснить, каким является угол между парами векторов: острым, прямым или тупым.

а)  $\widehat{\vec{a} \vec{b}}$

б)  $\widehat{\vec{b} \vec{c}}$

в)  $\widehat{\vec{a} \vec{c}}$

**Решение.**

а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

б)  $\vec{b} \cdot \vec{c}$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} > 0$$

в)  $\vec{a} \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Косинус угла  $\alpha$  между ненулевыми векторами  $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$

выражается формулой:  $\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ .

**Задача.** Найти величину угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**Решение.**

а)  $\vec{a} \{2; -2; 0\}$ ,  $\vec{b} \{3; 0; -3\}$

$$\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 60^\circ$$

б)  $\vec{a} \{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$ ,  $\vec{b} \{-3; -3; 0\}$

$$\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (-3) + \sqrt{2} \cdot (-3) + 2 \cdot 0}{\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 135^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

**Задача.** Найти величину угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**Решение.**

в)  $\vec{a} \{0; 5; 0\}$ ,  $\vec{b} \{0; -\sqrt{3}; 1\}$

$$\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = \frac{0 \cdot 0 + 5 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 150^\circ$$

г)  $\vec{a} \{-2,5; 2,5; 0\}$ ,  $\vec{b} \{-5; 5; 5\sqrt{2}\}$

$$\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = \frac{(-2,5) \cdot (-5) + 2,5 \cdot 5 + 0 \cdot 5\sqrt{2}}{\sqrt{(-2,5)^2 + 2,5^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (5\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 45^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

**Задача.** Найти величину угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**Решение.**

$$\text{д) } \vec{a} \{-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -2\}, \vec{b} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 \right\}$$

$$\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} = \frac{(-\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = 0$$

$$\cos 90^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 90^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

## Свойства скалярного произведения векторов:

1.  $\vec{a}^2 \geq 0$ ;  $\vec{a}^2 \neq 0$ , если  $\vec{a} \neq \vec{0}$

2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (переместительный закон)

3.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  (распределительный закон)

4.  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$  (сочетательный закон)

# Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{a b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$