



Физический факультет МГУ им. Ломоносова
кафедра математики

**ОБОСНОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ СИСТЕМЫ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ
ОБРАТНОЙ КВАЗИМОНОТОННОСТИ**

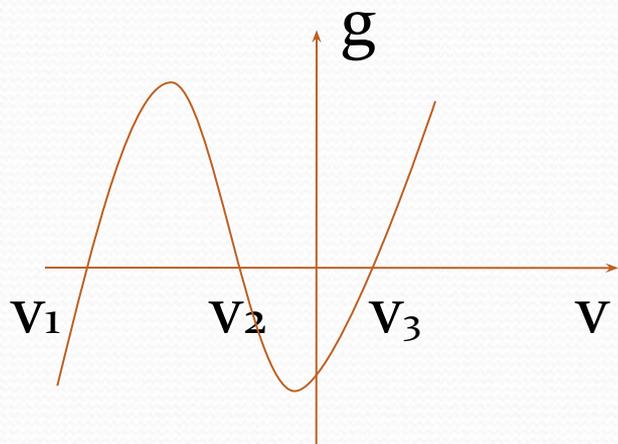
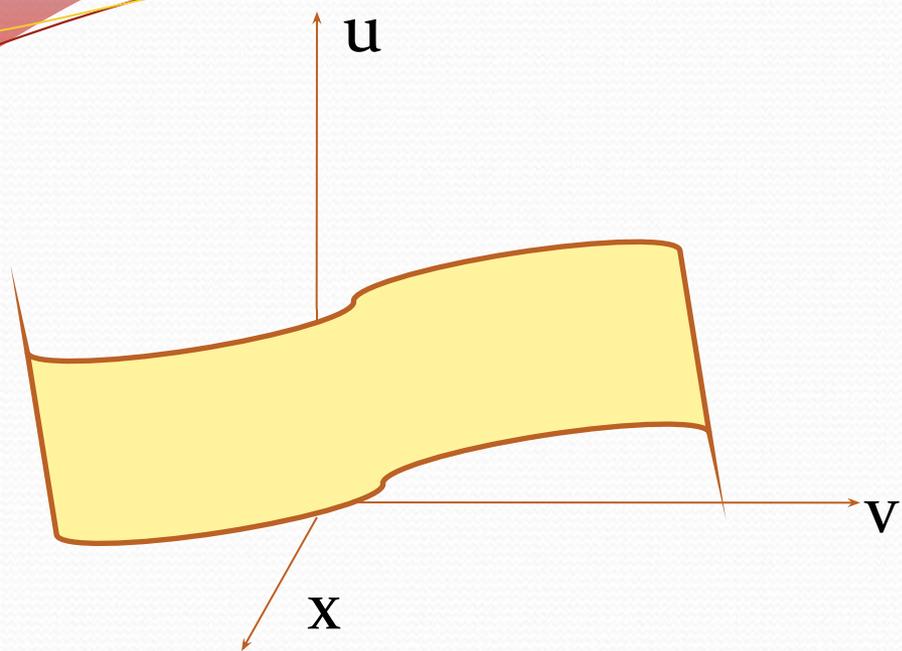
Петровская Е.С.
Левашова Н.Т.

Москва
30.10.2013

- Рассматривается краевая задача для системы двух уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon^4 u'' = f(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 v'' = g(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0, 1)$$
$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0.$$

- f и g – достаточно гладкие функции.



● **Условие A1:**

$$f(u, v, x, 0) = 0$$

$$u = \varphi(v, x), \quad f_u(\varphi(v, x), v, x, 0) > 0.$$

● **Условие A2:**

$$g(u, v, x, 0) = 0$$

↓

$$h(v, x) := g(\varphi(v, x), v, x, 0) = 0,$$

↓

$$v^i = v^i(x), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$h_v(v^i(x), x) > 0, \quad i = 1, 3;$$

$$h_v(v^2(x), x) < 0.$$

Обозначим $J(x) := \int_{v^1(x)}^{v^3(x)} h(v, x) dv$.

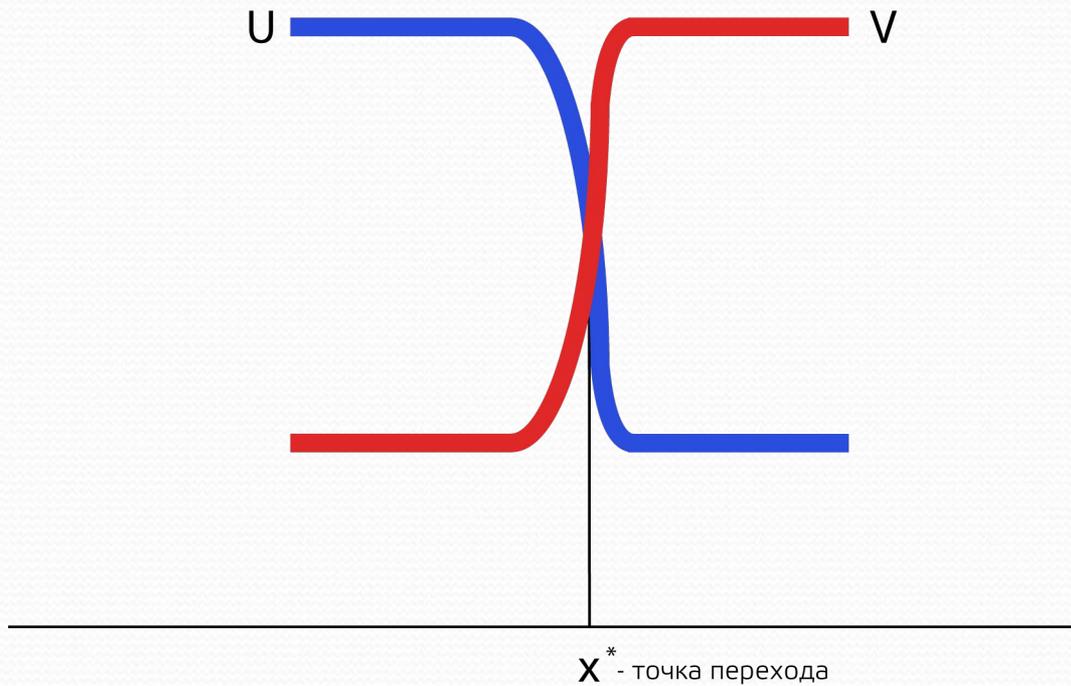
Условие Аз: Пусть существует $x_0 \in (0, 1)$ решение уравнения $J(x_0) = 0$ причем

$$\frac{dJ}{dx}(x_0) < 0.$$

ОБРАТНАЯ КВАЗИМОНОТОННОСТЬ

- Условие A4 $f_v(u, v, x, 0) > 0, g_u(u, v, x, 0) > 0$
всюду в области $(u, v, x) \in I_u \times I_v \times \mathbb{R}_+^1$

КСТС



$$j_v(v, x) = - f_v^{-1}(j(v, x), v, x, 0) f_u(j(v, x), v, x, 0) < 0$$

Асимптотика

- Точка перехода: $v(x^*, \varepsilon) = v^2(x^*)$
 $x^*(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$

- Асимптотика решения задачи строится отдельно справа и слева от точки перехода $x^*(t, \varepsilon)$

$$U = \begin{cases} u^{(-)}, x \hat{=} [0, x^*] \\ u^{(+)}, x \hat{=} [x^*, 1] \end{cases} \quad V = \begin{cases} v^{(-)}, x \hat{=} [0, x^*] \\ v^{(+)}, x \hat{=} [x^*, 1] \end{cases}$$

где

$$u^{(\boxtimes)} = \bar{u}^{(\boxtimes)}(x, \varepsilon) + Q^{(\boxtimes)} u(\tau, \varepsilon) + P u^{(\boxtimes)}(\zeta_{1,2}, \varepsilon) + R u^{(\boxtimes)}(\xi_{1,2}, \varepsilon), ;$$

$$v^{(\boxtimes)} = \bar{v}^{(\boxtimes)}(x, \varepsilon) + Q^{(\boxtimes)} v(\tau, \varepsilon) + P v^{(\boxtimes)}(\zeta_{1,2}, \varepsilon) + R v^{(\boxtimes)}(\xi_{1,2}, \varepsilon), ,$$

$$\tau = \frac{x - x^*}{\varepsilon} \quad \zeta_1 = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \zeta_2 = \frac{1 - x}{\varepsilon}, \quad \xi_1 = \frac{x}{\varepsilon^2}, \quad \xi_2 = \frac{1 - x}{\varepsilon^2}$$

- Условия непрерывности асимптотического разложения v – компоненты решения в точке $x^*(t, \varepsilon)$
 $\bar{v}^{(-)}(x^*, \varepsilon) + Q^{(-)}v(0, \varepsilon) = v^2(x^*), \quad \bar{v}^{(+)}(x^*, \varepsilon) + Q^{(+)}v(0, \varepsilon) = v^2(x^*).$
- Условия непрерывности производных асимптотических разложений в точке $x^*(t, \varepsilon).$

$$\left. \frac{d\bar{v}^{(-)}}{dx} \right|_{x^*} + \left. \frac{1}{e} \frac{dQ^{(-)}v}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\bar{v}^{(+)}}{dx} \right|_{x^*} + \left. \frac{1}{e} \frac{dQ^{(+)}v}{dt} \right|_{t=0}$$

$$\left. \frac{d\bar{u}^{(-)}}{dx} \right|_{x^*} + \left. \frac{1}{e} \frac{dQ^{(-)}u}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\bar{u}^{(+)}}{dx} \right|_{x^*} + \left. \frac{1}{e} \frac{dQ^{(+)}u}{dt} \right|_{t=0}$$

Регулярные члены

асимптотики

- Для функций $\bar{u}_0^{(\pm)}, \bar{v}_0^{(\pm)}$ получается вырожденная система:

$$\bar{f}(x) \equiv f(\bar{u}_0^{(\pm)}, \bar{v}_0^{(\pm)}, x, 0) = 0 \quad \bar{g}(x) \equiv g(\bar{u}_0^{(\pm)}, \bar{v}_0^{(\pm)}, x, 0) = 0$$

- Из условий U_1 и U_2 получаем:

$$\bar{v}_0^{(-)} = v^1(x),$$

$$\bar{v}_0^{(+)} = v^3(x),$$

$$\bar{u}_0^{(-)} = j(v^1(x), x) =: j^{-1}(x)$$

$$\bar{u}_0^{(+)} = j(v^3(x), x) =: j^{-3}(x)$$

Система уравнений для функций переходного слоя

$$f\left(j^{-3,1}(x^*) + Q_0^{(\pm)}u(t), v^{3,1}(x^*) + Q_0^{(\pm)}v(t), x^*, 0\right) = 0, \quad (1)$$

$$j^{-1,3}(x^*) + Q_0^{(m)}u(t) = j\left(v^{1,3}(x^*) + Q_0^{(m)}v(t), x^*\right)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q_0^{(\pm)} v}{dt^2} = h\left(v^{3,1}(x^*) + Q_0^{(\pm)}v(t), x^*\right), \\ v^{3,1}(x^*) + Q_0^{(\pm)}v(0) = v^2(x^*); \quad v^{3,1}(x^*) + Q_0^{(\pm)}v(\pm\infty) = v^{3,1}(x^*). \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{v^1(x_0)}^{v^2(x_0)} h(v, x_0) dv = \int_{v^3(x_0)}^{v^2(x_0)} h(v, x_0) dv \quad \text{и} \quad J(x_0) = 0$$

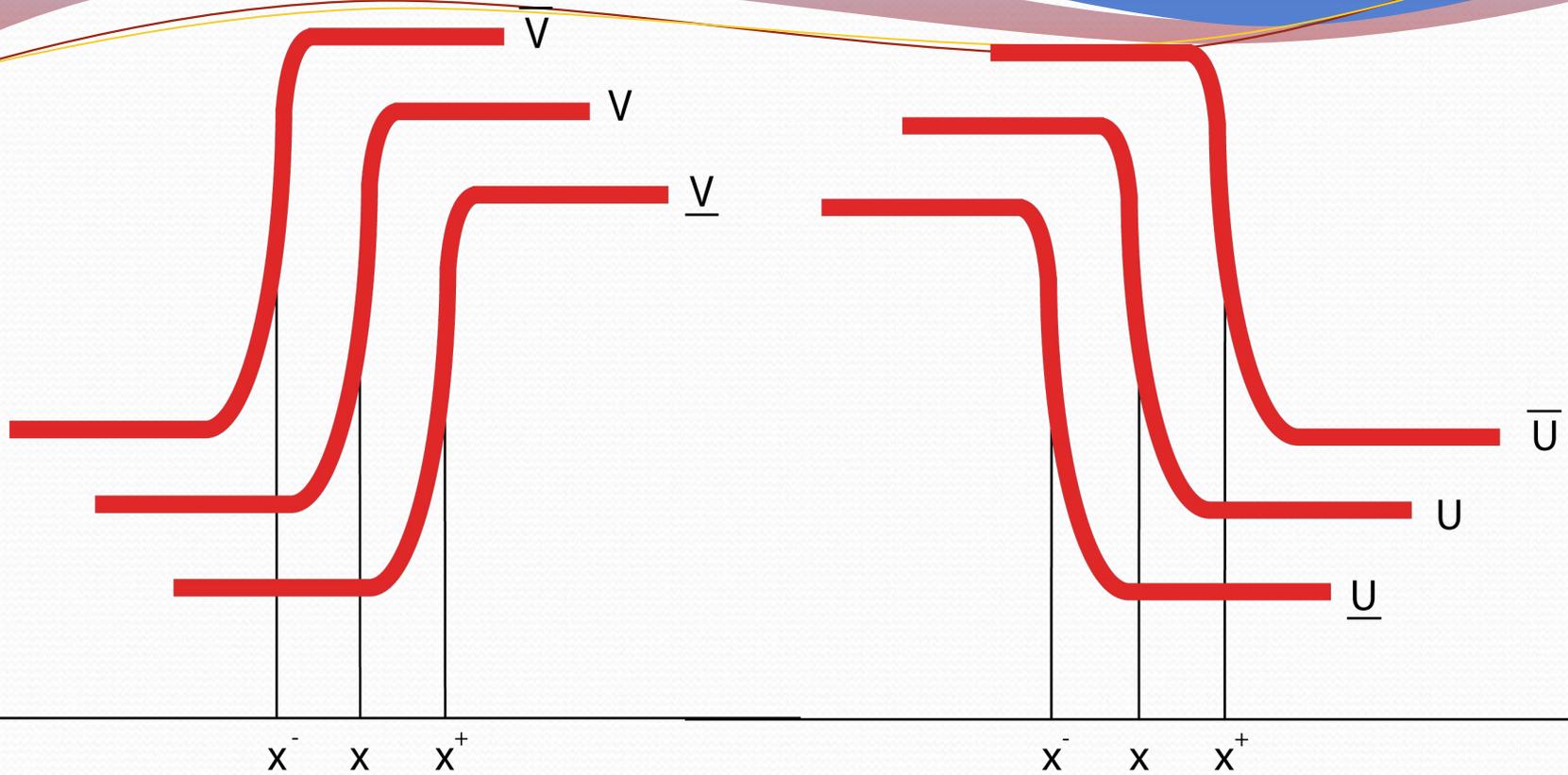
$$\frac{d}{dx} J(x) \Big|_{x=x_0} x_1 = \frac{dv^3}{dx} \Big|_{x_0} - \frac{dv^1}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{dQ_1^{(+)} v}{dt} - \frac{dQ_1^{(-)} v}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dx} J(x) \Big|_{x=x_0} x_k = S_k(x_0)$$

Обоснование асимптотики

- **Теорема.** При выполнении условий A1-A4 для достаточно малого $\epsilon > 0$ существует решение $u(x, \epsilon), v(x, \epsilon)$ задачи, для которого функции $U_n(x, \epsilon), V_n(x, \epsilon)$ являются равномерным на $[0;1]$ асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\epsilon^{n+1})$

$U_n(x, \epsilon), V_n(x, \epsilon)$ - построенная асимптотика n-ого порядка

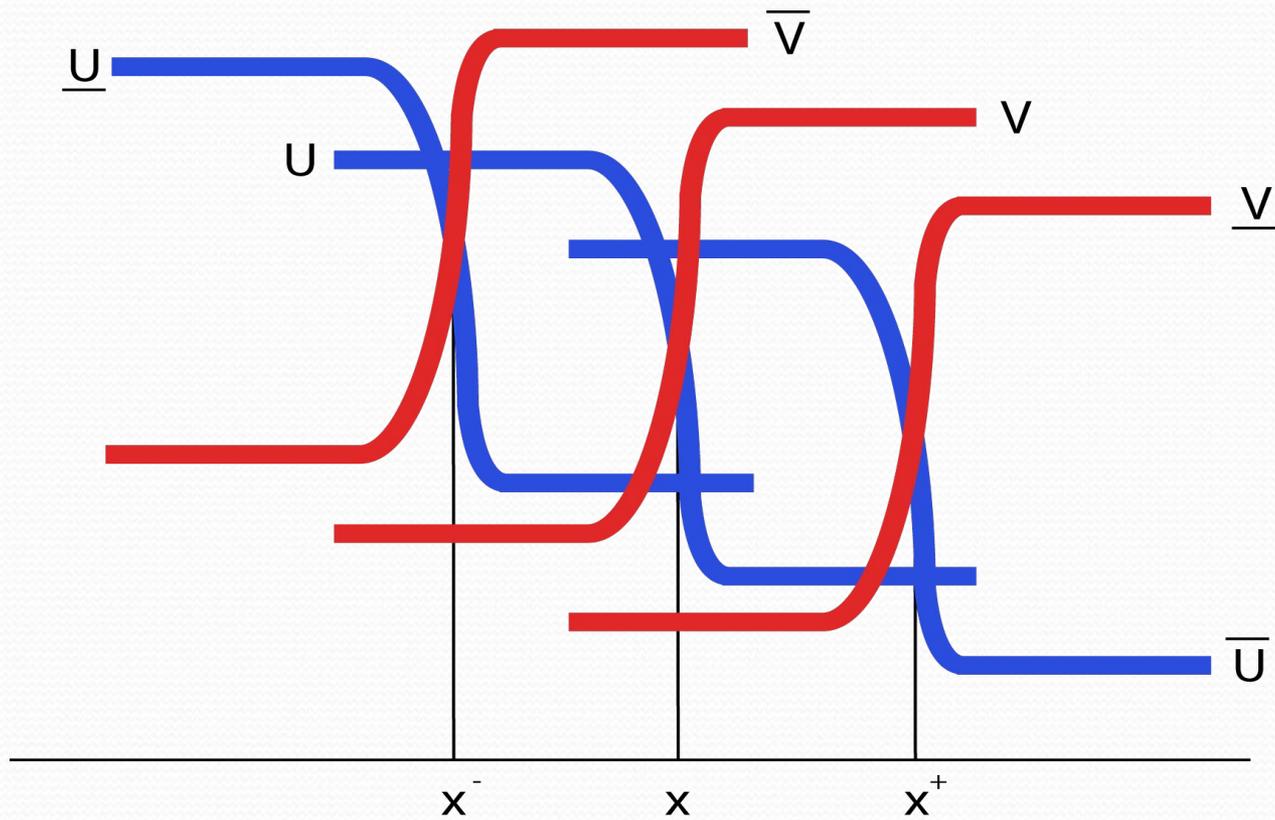


$$x^-(e) = x_0 + ex_1 + e^2x_2 + \dots + e^{n+1}(x_{n+1} - d) = X_{n+1} - e^{n+1}d,$$

$$x^+(e) = x_0 + ex_1 + e^2x_2 + \dots + e^{n+1}(x_{n+1} + d) = X_{n+1} + e^{n+1}d.$$

$$\bar{V}^{(-)}(\bar{x}, e) = \bar{V}^{(+)}(\bar{x}, e) = v^2(\bar{x})$$

$$\bar{U}^{(-)}(\bar{x}, e) = \bar{U}^{(+)}(\bar{x}, e) = j(v^2(\bar{x}), \bar{x})$$



$$\bar{U}(x^+, e) = \underline{V}(x^+, e), \quad \underline{U}(x^-, e) = \bar{V}(x^-, e)$$

Дифференциальные неравенства

$$U \in \bar{U}; \quad V \in \bar{V}, \quad x \in \hat{\Omega}, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$L_{1e}(\bar{U}, \bar{V}) := e^{\lambda \bar{U}} - f(\bar{U}, \bar{V}, x, e) < 0, \quad x \in \hat{\Omega}, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$L_{2e}(\underline{U}, \bar{V}) := e^{\lambda \bar{V}} - g(\underline{U}, \bar{V}, x, e) < 0, \quad x \in \hat{\Omega}, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\frac{d\bar{U}^{(-)}}{dx} - \frac{d\bar{U}^{(+)}}{dx} > 0, \quad \frac{d\bar{V}^{(-)}}{dx} - \frac{d\bar{V}^{(+)}}{dx} < 0,$$

Верхние и нижние решения

$$\begin{aligned} \underline{U}^{(+)} &= U_{n+1}^{(+)} \Big|_{t^-} + e^{n+1} \left(-a^{(+)}(x) + \underline{Q}^{(+)} u(t^-) \right) + e^{n+2} \left(\underline{P}_{n+2}^{(+)} u(V_2) + \underline{R}_{n+2}^{(+)} u(x_2) \right) + e^{n+3} \underline{R}_{n+3}^{(+)} u(x_2), \\ \underline{V}^{(+)} &= V_{n+1}^{(+)} \Big|_{t^+} + e^{n+1} \left(-b^{(+)}(x) + \underline{Q}^{(+)} v(t^+) \right) + e^{n+2} \underline{P}_{n+2}^{(+)} v(V_2); \\ \bar{U}^{(+)} &= U_{n+1}^{(+)} \Big|_{t^+} + e^{n+1} \left(a^{(+)}(x) + \bar{Q}^{(+)} u(t^+) \right) + e^{n+2} \left(\bar{P}_{n+2}^{(+)} u(V_2) + \bar{R}_{n+2}^{(+)} u(x_2) \right) + e^{n+3} \bar{R}_{n+3}^{(+)} u(x_2), \\ \bar{V}^{(+)} &= V_{n+1}^{(+)} \Big|_{t^-} + e^{n+1} \left(b^{(+)}(x) + \bar{Q}^{(+)} v(t^-) \right) + e^{n+2} \bar{P}_{n+2}^{(+)} v(V_2); \end{aligned}$$

$$\tau^+ = \frac{x - x^+}{\varepsilon}; \quad \tau^- = \frac{x - x^-}{\varepsilon}$$

$$a^{(-)}(x^+) + \bar{Q}^{(-)}u(t^+) = j_v \left(\frac{g}{v}(t^+, x^+), x^+ \right) \left(-b^{(-)}(x^+) + \underline{Q}^{(-)}v(t^+) \right) + \frac{A}{f_u(t^+)}$$

$$-a^{(-)}(x^-) + \underline{Q}^{(-)}u(t^-) = j_v \left(\frac{g}{v}(t^-, x^-), x^- \right) \left(b^{(-)}(x^-) + \bar{Q}^{(-)}v(t^-) \right) - \frac{A}{f_u(t^-)}$$

$$\frac{d^2 \bar{Q}^{(-)}v}{dt^{-2}} = g_u(t^-) \left(-a^{(-)}(x^-) + \underline{Q}^{(-)}u(t^-) \right) + g_v(t^-) \left(b^{(-)}(x^-) + \bar{Q}^{(-)}v(t^-) \right) - B$$

$$\frac{d^2 \underline{Q}^{(-)}v}{dt^{+2}} = g_u(t^+) \left(a^{(-)}(x^+) + \bar{Q}^{(-)}u(t^+) \right) + g_v(t^+) \left(-b^{(-)}(x^+) + \underline{Q}^{(-)}v(t^+) \right) + B$$

- Определим функции $a^{(\pm)}(x)$, $b^{(\pm)}(x)$ как решения систем

уравнений $\bar{f}_u^{(\pm)}(x)a^{(\pm)} - \bar{f}_v^{(\pm)}(x)b^{(\pm)} = A$, $-\bar{g}_u^{(\pm)}(x)a^{(\pm)} + \bar{g}_v^{(\pm)}(x)b^{(\pm)} = B$,
 где A и B – положительные числа.

Запишем решение системы:

$$a^{(\pm)}(x) = \frac{\bar{g}_v^{(\pm)}(x)A + \bar{f}_v^{(\pm)}(x)B}{D^{(\pm)}(x)} \quad b^{(\pm)}(x) = \frac{\bar{f}_u^{(\pm)}(x)B - \bar{g}_u^{(\pm)}(x)A}{D^{(\pm)}(x)},$$

где $D^{(\pm)}(x) = \bar{f}_u \bar{g}_v - \bar{g}_u \bar{f}_v = \bar{h}_v + \bar{g}_u \frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u} \bar{f}_u - \bar{g}_u \bar{f}_v = \bar{h}_v \bar{f}_u > 0$

Проверка диф.неравенств

$$L_{1e}(\bar{U}, \bar{V}) = -e^{n+1}A + O(e^{n+2}), \quad L_{2e}(\underline{U}, \underline{V}) = -e^{n+1}B + O(e^{n+2}),$$

$$\begin{aligned} & \frac{dV^{(-)}}{dx}(x^+, e) - \frac{dV^{(+)}}{dx}(x^+, e) = \\ & = e^n d \frac{1}{F(0)} \frac{dJ}{dx}(x_0) + e^n \frac{1}{F(0)} \dot{F}(t^+) \frac{g_u(t^+)A}{f_u(t^+)} - B \dot{t}^+ + O(e^{n+1}) < 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{U}^{(-)}}{dx}(x^+, e) - \frac{d\bar{U}^{(+)}}{dx}(x^+, e) = j_v(v^2, x_0) \frac{dV^{(-)}}{dx}(x^+, e) - \frac{dV^{(+)}}{dx}(x^+, e) + O(e^{n+1}) > 0.$$

$$j_v(v^2, x_0) = -f_v^{-1}(0) f_u(0) < 0$$

Спасибо за внимание



Желаем Вам успехов!