Физический факультет МГУ им. Ломоносова
кафедра математики

ОБОСНОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ОБРАТНОЙ КВАЗИМОНОТОННОСТИ

Петровская Е.С.
Левашова Н.Т.

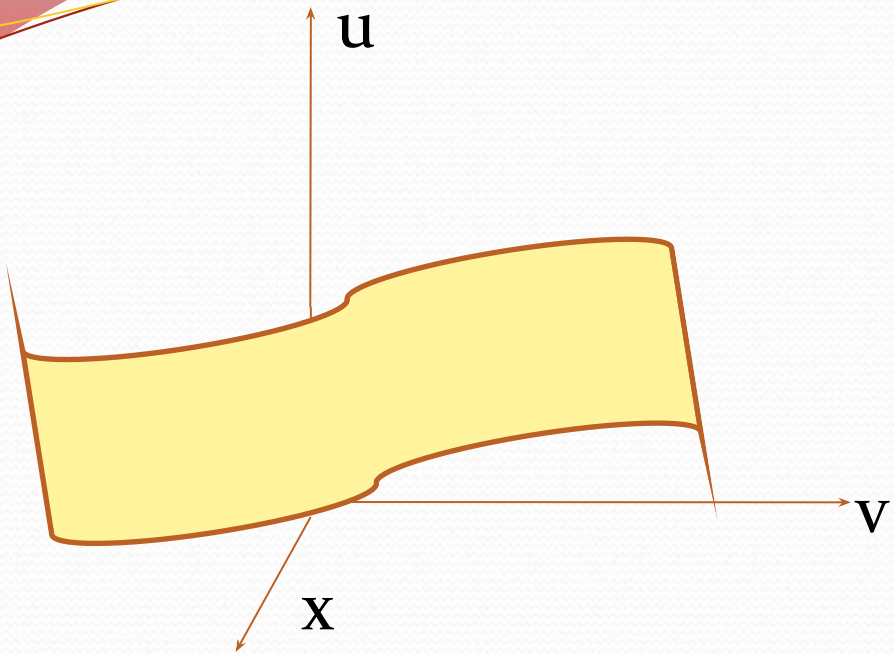
Москва
30.10.2013

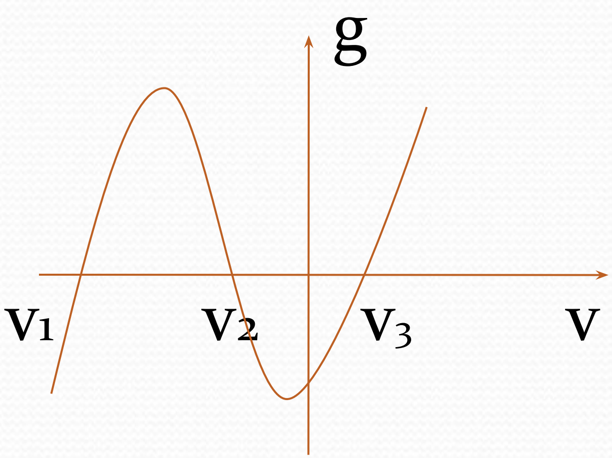
- Рассматривается краевая задача для системы двух уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon^4 u'' = f(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 v'' = g(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0, 1)$$

$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0.$$

- f и g – достаточно гладкие функции.





- **Условие А1:**

$$f(u,v,x,0)=0$$

$$u=\varphi(v,x),\quad f_u(\varphi(v,x),v,x,0)>0.$$

- **Условие А2:**

$$\Downarrow$$

$$g(u,v,x,0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$h(v,x):=g(\varphi(v,x),v,x,0)=0,$$

$$\Downarrow$$

$$v^i=v^i(x),\ i=1,2,3;$$

$$h_v(v^i(x),x)>0,\ i=1,3;$$

$$h_v(v^2(x),x)<0.$$

Обозначим $J(x) := \int\limits_{v^1(x)}^{v^3(x)} h(v,x)\,dv.$

Условие А3: Пусть существует $x_0 \in (0,1)$ – решение уравнения $J(x_0) = 0$, причем

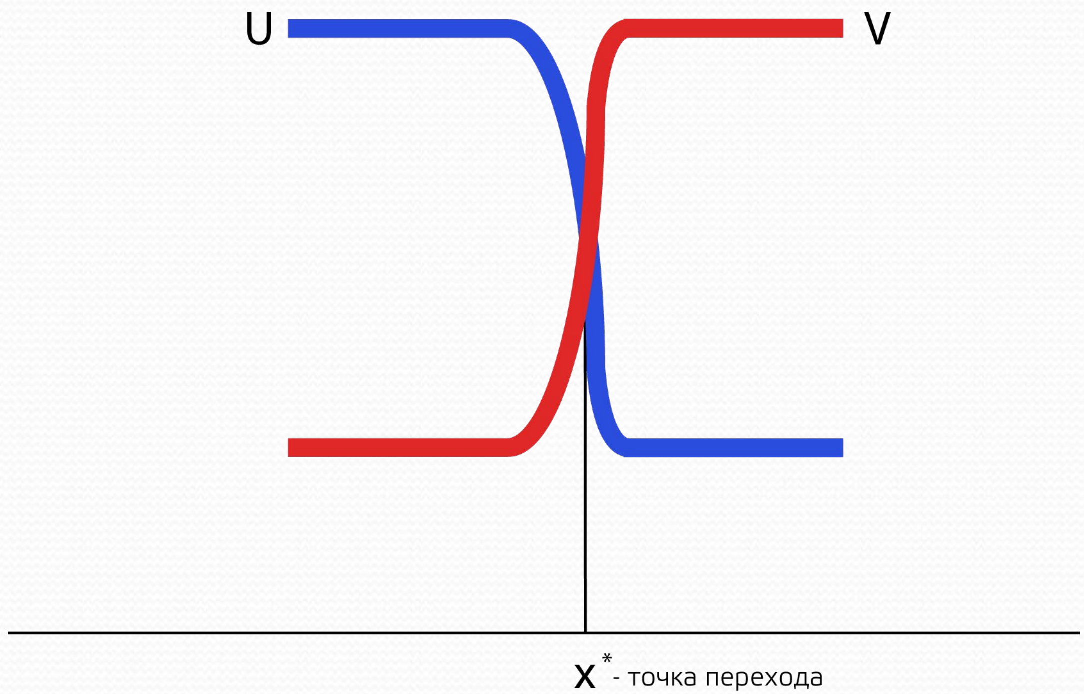
$$\frac{dJ}{dx}(x_0) < 0.$$

ОБРАТНАЯ КВАЗИМОНОТОННОСТЬ

- <u>Условие А4</u> $f_v(u,v,x,0) > 0, \quad g_u(u,v,x,0) > 0$

  всюду в области $(u,v,x) \in I_u \times I_v \times [0;1]$

КСТС



$$j_v\left(v,x\right) = -f_v^{-1}\left(j(v,x),v,x,0\right) f_u\left(j(v,x),v,x,0\right) < 0$$

Асимптотика

- Точка перехода: $$v\left(x^{*},\varepsilon\right)=v^{2}\left(x^{*}\right)$$ $$x^{*}(\varepsilon)=x_{0}+\varepsilon x_{1}+\varepsilon^{2}x_{2}+\ldots$$

- Асимптотика решения задачи строится отдельно справа и слева от точки перехода $:x^{*}(t,\varepsilon)$

$$U=\begin{cases}u^{(-)}, x\in[0,x^{*}]\\ u^{(+)}, x\in[x^{*},1]\end{cases}\qquad V=\begin{cases}v^{(-)}, x\in[0,x^{*}]\\ v^{(+)}, x\in[x^{*},1]\end{cases}$$

где

$$u^{(\pm)}=\bar{u}^{(\pm)}\left(x,\varepsilon\right)+Q^{(\pm)}u\left(\tau,\varepsilon\right)+Pu^{(\pm)}\left(\varsigma_{1,2},\varepsilon\right)+Ru^{(\pm)}\left(\xi_{1,2},\varepsilon\right),;$$

$$v^{(\pm)}=\bar{v}^{(\pm)}\left(x,\varepsilon\right)+Q^{(\pm)}v\left(\tau,\varepsilon\right)+Pv^{(\pm)}\left(\varsigma_{1,2},\varepsilon\right)+Rv^{(\pm)}\left(\xi_{1,2},\varepsilon\right),,$$

$$\tau=\frac{x-x^{*}}{\varepsilon}\qquad \varsigma_{1}=\frac{x}{\varepsilon},\quad \varsigma_{2}=\frac{1-x}{\varepsilon},\quad \xi_{1}=\frac{x}{\varepsilon^{2}},\quad \xi_{2}=\frac{1-x}{\varepsilon^{2}}$$

- Условия непрерывности асимптотического разложения v – компоненты решения в точке $x^*(t,\varepsilon)$

$$\bar{v}^{(-)}(x^*, e) + Q^{(-)}v(0,e) = v^2\left(x^*\right), \quad \bar{v}^{(+)}(x^*, e) + Q^{(+)}v(0,e) = v^2\left(x^*\right).$$

- Условия непрерывности производных асимптотических разложений в точке $x^*(t,\varepsilon)$.

$$\left.\frac{d\bar{v}^{(-)}}{dx}\right|_{x^*} + \left.\frac{1}{e}\frac{dQ^{(-)}v}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\bar{v}^{(+)}}{dx}\right|_{x^*} + \left.\frac{1}{e}\frac{dQ^{(+)}v}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\left.\frac{d\bar{u}^{(-)}}{dx}\right|_{x^*} + \left.\frac{1}{e}\frac{dQ^{(-)}u}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\bar{u}^{(+)}}{dx}\right|_{x^*} + \left.\frac{1}{e}\frac{dQ^{(+)}u}{dt}\right|_{t=0}$$

Регулярные члены асимптотики

- Для функций $\bar{u}_0^{(\pm)}, \bar{v}_0^{(\pm)}$ получается вырожденная система:

$$\bar{f}\left(x\right) \equiv f(\bar{u}_0^{(\pm)}, \bar{v}_0^{(\pm)}, x, 0) = 0 \quad \bar{g}\left(x\right) \equiv g(\bar{u}_0^{(\pm)}, \bar{v}_0^{(\pm)}, x, 0) = 0$$

- Из условий У1 и У2 получаем:

$$\bar{v}_0^{(-)} = v^1(x), \qquad \bar{v}_0^{(+)} = v^3(x),$$

$$\bar{u}_0^{(-)} = \varphi(v^1(x), x) =: \bar{\varphi}^1\left(x\right) \qquad \bar{u}_0^{(+)} = \varphi(v^3(x), x) =: \bar{\varphi}^3\left(x\right)$$

Система уравнений для функций переходного слоя

$$f\left(\varphi^{3,1}\left(x^*\right) + Q_0^{(\pm)}u\left(t\right), v^{3,1}\left(x^*\right) + Q_0^{(\pm)}v\left(t\right), x^*, 0\right) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi^{1,3}\left(x^*\right) + Q_0^{(\mp)}u\left(t\right) = \varphi\left(v^{1,3}\left(x^*\right) + Q_0^{(\mp)}v\left(t\right), x^*\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Q_0^{(\pm)}v}{dt^2} = h\left(v^{3,1}\left(x^*\right) + Q_0^{(\pm)}v\left(t\right), x^*\right), \\ v^{3,1}\left(x^*\right) + Q_0^{(\pm)}v\left(0\right) = v^2\left(x^*\right); \; v^{3,1}\left(x^*\right) + Q_0^{(\pm)}v\left(\pm\infty\right) = v^{3,1}\left(x^*\right). \end{cases} \quad (2)$$

$$\left[2\int\limits_{v^1(x_0)}^{v^2(x_0)} h\left(v, x_0\right)dv\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\int\limits_{v^3(x_0)}^{v^2(x_0)} h\left(v, x_0\right)dv\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow J(x_0) = 0$$

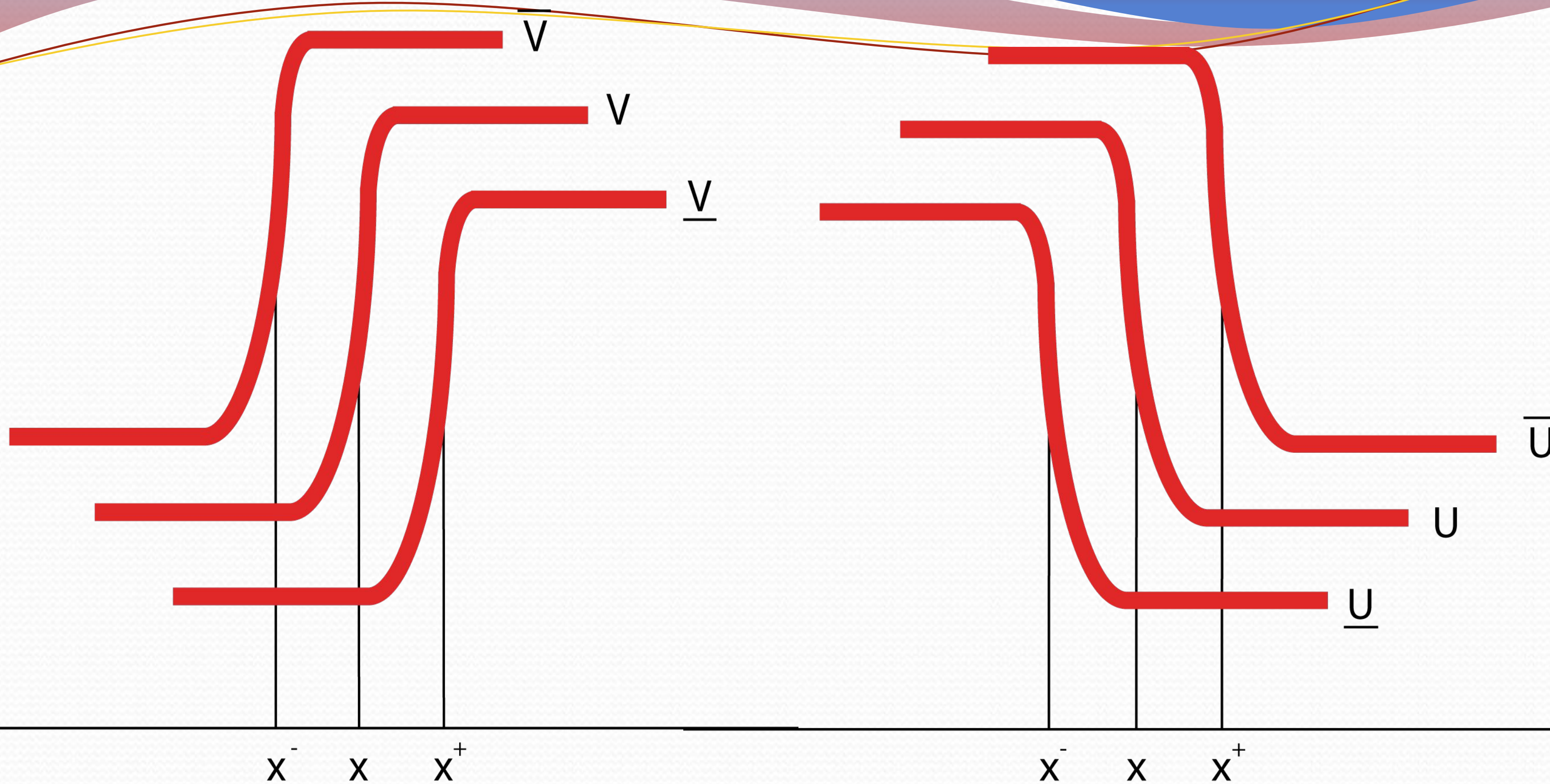
$$\frac{d}{dx}J\left(x\right)\Big|_{x=x_0} x_1 = \frac{dv^3}{dx}\Big|_{x_0} - \frac{dv^1}{dx}\Big|_{x_0} + \left(\frac{dQ_1^{(+)}v}{dt} - \frac{dQ_1^{(-)}v}{dt}\right)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dx}J\left(x\right)\Big|_{x=x_0} x_k = S_k\left(x_0\right)$$

Обоснование асимптотики

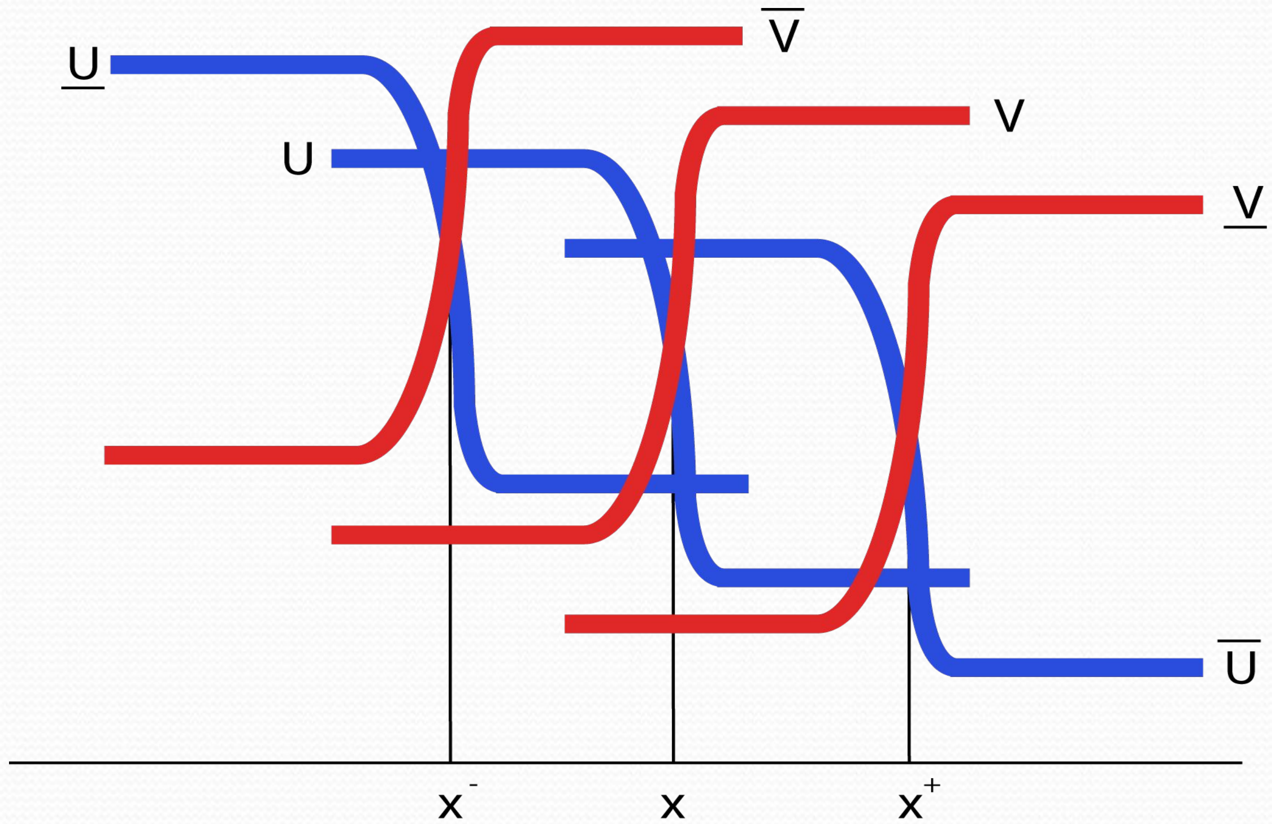
- **<u>Теорема.</u>** При выполнении условий А1-А4 для достаточно малого $e > 0$ существует решение $u(x,e),\ v(x,e)$ задачи , для которого функции $U_n(x,e),\ V_n(x,e)$ являются равномерным на [0;1] асимптотическим приближением с точностью порядка $O(e^{n+1})$

$U_n(x,e),\ V_n(x,e)$ - построенная асимптотика n-ого порядка



$$x^-(e) = x_0 + ex_1 + e^2x_2 + \dots + e^{n+1}\left(x_{n+1} - d\right) = X_{n+1} - e^{n+1}d,$$
$$x^+(e) = x_0 + ex_1 + e^2x_2 + \dots + e^{n+1}\left(x_{n+1} + d\right) = X_{n+1} + e^{n+1}d.$$

$$\overline{V}^{(-)}\left(\overline{x}, e\right) = \overline{V}^{(+)}\left(\overline{x}, e\right) = v^2\left(\overline{x}\right) \qquad \overline{U}^{(-)}\left(\overline{x}, e\right) = \overline{U}^{(+)}\left(\overline{x}, e\right) = j\left(v^2\left(\overline{x}\right), \overline{x}\right)$$



$$\overline{U}\left(x^{+}, e\right) = \underline{V}\left(x^{+}, e\right), \quad \underline{U}\left(x^{-}, e\right) = \overline{V}\left(x^{-}, e\right)$$

Дифференциальные неравенства

$$\underline{U} \le \overline{U};\quad \underline{V} \le \overline{V},\quad x \in [0,1]$$

$$L_{1\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) := \varepsilon^4 \overline{U}'' - f(\overline{U},\underline{V},x,\varepsilon) < 0,\quad x \in [0;1]$$

$$L_{2\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) := \varepsilon^2 \overline{V}'' - g(\underline{U},\overline{V},x,\varepsilon) < 0;\quad x \in [0;1]$$

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx} - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx} > 0,\qquad \frac{d\underline{V}^{(-)}}{dx} - \frac{d\underline{V}^{(+)}}{dx} < 0,$$

Верхние и нижние решения

$$\underline{U}^{(+)} = U_{n+1}^{(+)}\Big|_{t^-} + \varepsilon^{n+1}\left(-a^{(+)}(x) + \underline{Q}^{(+)}u(t^-)\right) + \varepsilon^{n+2}\left(\tilde{P}_{n+2}^{(+)}u(V_2) + \tilde{R}_{n+2}^{(+)}u(x_2)\right) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(+)}u(x_2),$$

$$\underline{V}^{(+)} = V_{n+1}^{(+)}\Big|_{t^+} + \varepsilon^{n+1}\left(-b^{(+)}(x) + \underline{Q}^{(+)}v(t^+)\right) + \varepsilon^{n+2}\tilde{P}_{n+2}^{(+)}v(V_2);$$

$$\overline{U}^{(+)} = U_{n+1}^{(+)}\Big|_{t^+} + \varepsilon^{n+1}\left(a^{(+)}(x) + \overline{Q}^{(+)}u(t^+)\right) + \varepsilon^{n+2}\left(\tilde{P}_{n+2}^{(+)}u(V_2) + \tilde{R}_{n+2}^{(+)}u(x_2)\right) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(+)}u(x_2),$$

$$\overline{V}^{(+)} = V_{n+1}^{(+)}\Big|_{t^-} + \varepsilon^{n+1}\left(b^{(+)}(x) + \overline{Q}^{(+)}v(t^-)\right) + \varepsilon^{n+2}\tilde{P}_{n+2}^{(+)}v(V_2);$$

$$\tau^+ = \frac{x - x^+}{\varepsilon}; \quad \tau^- = \frac{x - x^-}{\varepsilon}$$

$$a^{(-)}(x^{+}) + \bar{Q}^{(-)}u(t^{+}) = j_{v}\left(\tilde{v}\left(t^{+}, x^{+}\right), x^{+}\right)\left(-b^{(-)}(x^{+}) + \underline{Q}^{(-)}v(t^{+})\right) + \frac{A}{f_{u}(t^{+})}$$

$$-a^{(-)}\left(x^{-}\right) + \underline{Q}^{(-)}u\left(t^{-}\right) = j_{v}\left(\tilde{v}\left(t^{-}, x^{-}\right), x^{-}\right)\left(b^{(-)}\left(x^{-}\right) + \bar{Q}^{(-)}v\left(t^{-}\right)\right) - \frac{A}{f_{u}\left(t^{-}\right)}$$

$$\frac{d^{2}\bar{Q}^{(-)}v}{dt^{-2}} = g_{u}\left(t^{-}\right)\left(-a^{(-)}\left(x^{-}\right) + \underline{Q}^{(-)}u\left(t^{-}\right)\right) + g_{v}\left(t^{-}\right)\left(b^{(-)}\left(x^{-}\right) + \bar{Q}^{(-)}v\left(t^{-}\right)\right) - B$$

$$\frac{d^{2}\underline{Q}^{(-)}v}{dt^{+2}} = g_{u}\left(t^{+}\right)\left(a^{(-)}\left(x^{+}\right) + \bar{Q}^{(-)}u\left(t^{+}\right)\right) + g_{v}\left(\underline{t}\right)\left(-b^{(-)}\left(x^{+}\right) + \underline{Q}^{(-)}v\left(t^{+}\right)\right) + B$$

- Определим функции $a^{(\pm)}(x),\ b^{(\pm)}(x)$ как решения систем

уравнений $\bar{f}_u^{(\pm)}(x)a^{(\pm)} - \bar{f}_v^{(\pm)}(x)b^{(\pm)} = A, \quad -\bar{g}_u^{(\pm)}(x)a^{(\pm)} + \bar{g}_v^{(\pm)}(x)b^{(\pm)} = B,$
где A и B – положительные числа.

Запишем решение системы:

$$a^{(\pm)}(x) = \frac{\bar{g}_v^{(\pm)}(x)A + \bar{f}_v^{(\pm)}(x)B}{\Delta^{(\pm)}(x)} \qquad b^{(\pm)}(x) = \frac{\bar{f}_u^{(\pm)}(x)B - \bar{g}_u^{(\pm)}(x)A}{\Delta^{(\pm)}(x)},$$

где

$$\Delta^{(\pm)}(x) = \bar{f}_u\bar{g}_v - \bar{g}_u\bar{f}_v = \Bigg(\underbrace{\bar{h}_v + \bar{g}_u\frac{\bar{f}_v}{\bar{f}_u}}_{\bar{g}_v}\Bigg)\bar{f}_u - \bar{g}_u\bar{f}_v = \bar{h}_v\bar{f}_u > 0$$

Проверка диф.неравенств

$$L_{1\varepsilon}\left(\bar{U},\underline{V}\right) = -\varepsilon^{n+1}A + O\left(\varepsilon^{n+2}\right),\quad L_{2\varepsilon}\left(\underline{U},\bar{V}\right) = -\varepsilon^{n+1}B + O\left(\varepsilon^{n+2}\right),$$

$$\left(\frac{d\underline{V}^{(-)}}{dx}\left(x^{+},\varepsilon\right) - \frac{d\underline{V}^{(+)}}{dx}\left(x^{+},\varepsilon\right)\right) =$$
$$= \varepsilon^{n}\delta\frac{1}{\Phi(0)}\frac{d\vartheta}{dx}\left(x_{0}\right) + \varepsilon^{n}\frac{1}{\Phi(0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\tau)\left(\frac{g_{u}(\tau^{+})A}{f_{u}(\tau^{+})} - B\right)d\tau^{+} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) < 0$$

$$\frac{d\bar{U}^{(-)}}{dx}\left(x^{+},\varepsilon\right) - \frac{d\bar{U}^{(+)}}{dx}\left(x^{+},\varepsilon\right) = \varphi_{v}\left(v^{2},x_{0}\right)\left(\frac{d\underline{V}^{(-)}}{dx}\left(x^{+},\varepsilon\right) - \frac{d\underline{V}^{(+)}}{dx}\left(x^{+},\varepsilon\right)\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) > 0.$$

$$\varphi_{v}\left(v^{2},x_{0}\right) = -f_{v}^{-1}(0)\,f_{u}(0) < 0$$

Спасибо за внимание

Желаем Вам успехов!