МАТЕМАТИКА

Метод интервалов. Общий метод интервалов.

8 **класс**

«Метод интервалов. Общий метод интервалов.»

Курсы поступления в *9* класс лицея *134*

План лекции:

- Рациональные неравенства
- Метод интервалов
- Общий метод интервалов

Определение

Неравенство, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называют рациональным неравенством с неизвестным x

$$(5x+1)(3-2x)<0$$

$$\frac{(2x-3)^4(7-x)^3}{(2x-1)^2(3-x)}\geq 0$$

$$\frac{x^2-x-6}{x-1}\leq\frac{2}{x-5}-3$$

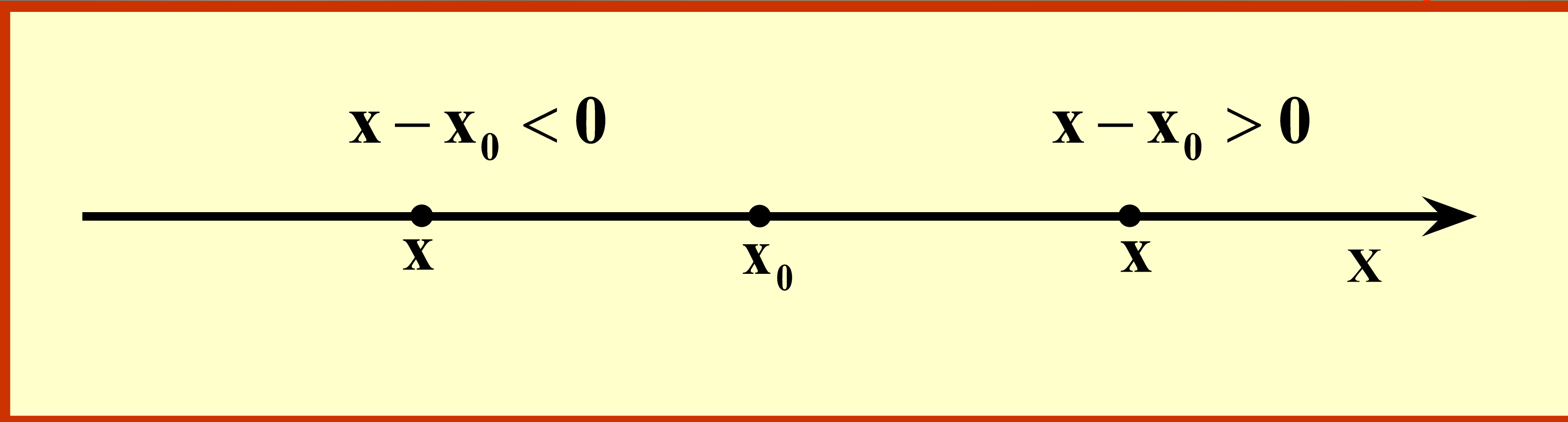
$$\frac{4x-6}{5-x}>2$$

$$(x^2-1)^2(3-2x)^3(4-x)<0$$

Определение

Решением неравенства с неизвестным x называют число, при подстановке которого в это неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или показать, что их нет.



Метод интервалов для решения неравенств вида $A(x) > 0$ и $A(x) < 0$ основан на следующем утверждении.

Точка x_0 делит ось O_x на две части:

1) **для любого x, находящегося справа от точки x_0, двучлен $x - x_0$ положителен;**

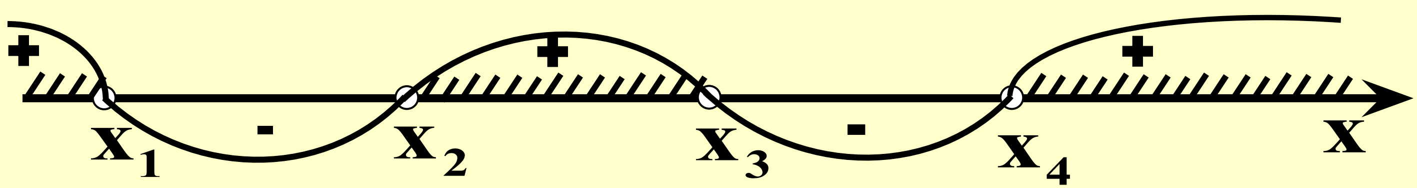
2) **для любого x, находящегося слева от точки x_0, двучлен $x - x_0$ отрицателен.**

Пусть требуется решить неравенство $(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)>0$

Не нарушая общности, положим $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)>0$

Тогда:

5). Аналогично рассуждая, получим, что $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)>0$ для x из интервалов $(x_4;\infty)$, $(x_2;x_3)$, $(-\infty;x_1)$ и $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)<0$ для x интерва $(x_3;x_4)$, $(x_1;x_2)$.



Замечание 1.

Сами числа x_1, x_2, x_3, x_4 не являются решением неравенства $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0$.

Замечание 2.

Множество решений неравенств вида $A(x) \geq 0$, и $A(x) \leq 0$, где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$, $n \geq 1, n \in N$, есть объединение множества всех решений неравенств $A(x) > 0$ и $A(x) < 0$ и множества всех решений уравнения $A(x) = 0$.

Метод интервалов для решения неравенств вида

$A(x) < 0 \quad A(x) > 0 \quad A(x) \le 0 \quad A(x) \ge 0$, , , ,

где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$, $x_1 < x_2 < ... < x_n$,

$n \ge 1, n \in N$, то есть все x_k различны.

1. Привести рациональное неравенство к одному из видов:

$A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \ge 0$, $A(x) \le 0$, где

$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$, $n \ge 1, n \in N$.

2. Найти нули множителей, стоящих в левой части неравенства, и расположить их на оси O_x в соответствующем порядке.

<u>Метод интервалов</u> для решения неравенств вида

$A(x) < 0$, $A(x) > 0$, где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$,

$n \geq 1, n \in N$, $x_1 < x_2 < ... < x_n$, то есть все x_k различны.

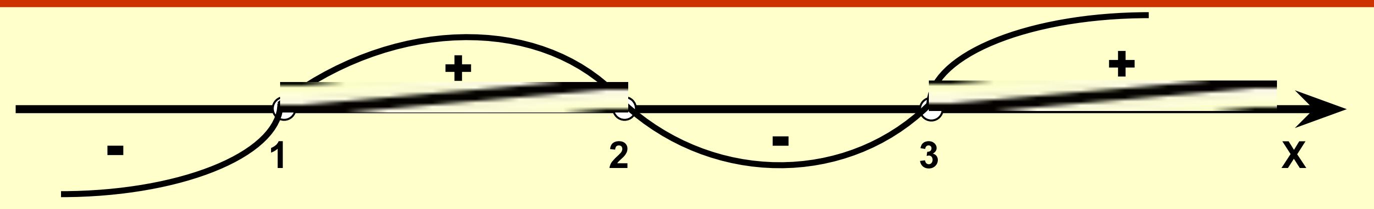
3. **Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный.**

Пример1

Решить неравенство $(x-1)(x-2)(x-3)>0$.

Решение

Нули множителей: $x=1$, $x=2$, $x=3$.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} 1<x<2, \\ x>3. \end{array}\right.$

Пример 2

Решить неравенство $(2-x)(x^2-4x+3)(x+1)>0$.

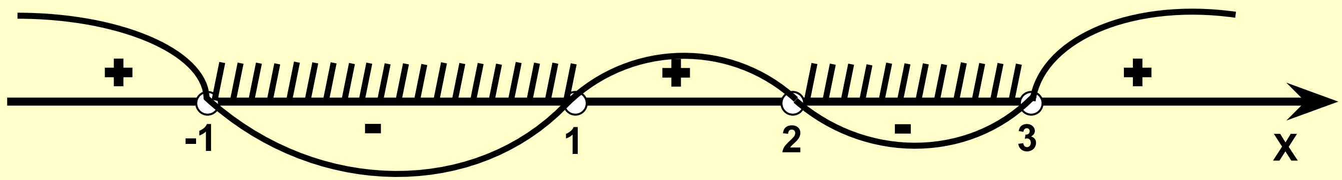
Решение

$(2-x)(x^2-4x+3)(x+1)>0,$

умножив неравенство на *-1* **и разложив квадратный трёхчлен на множители, получим неравенство равносильное данному**

$(x-2)(x-1)(x-3)(x+1)<0.$

Нули множителей: $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$;



Ответ: $\left[\begin{array}{l} -1<x<1, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$

Пример 3

Решить неравенство $(x^2-6x)(16-x^2)\ge 0$.

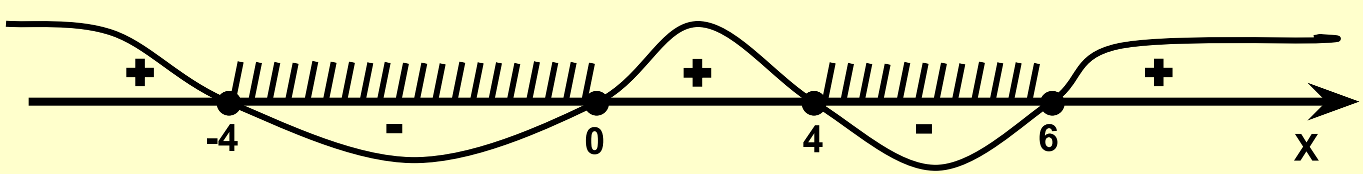
Решение

$$(x^2-6x)(16-x^2)\ge 0$$

умножив неравенство на *-1* и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим неравенство равносильное данному

$$x(x-6)(x-4)(x+4)\le 0$$

Нули множителей: $x=-4$, $x=0$, $x=4$, $x=6$



Ответ: $\left[\begin{array}{l} -4\le x\le 0, \\ 4\le x\le 6. \end{array}\right.$

Пример 4

Решить неравенство $\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2+x+1\right)\left(49-x^2\right)\left(5x-x^2\right)\ge 0$

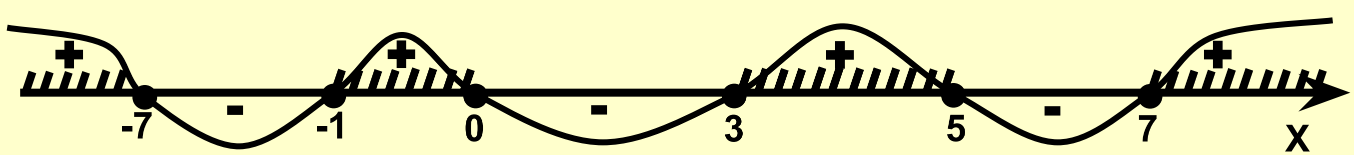
Решение

$\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2+x+1\right)\left(49-x^2\right)\left(5x-x^2\right)\ge 0,$

умножив неравенство 2 раза на -1, разложив квадратные трёхчлены на множители и учитывая, что $x^2+x+1>0$ при $x\in R$, получим неравенство равносильное данному

$$\left(x-3\right)\left(x+1\right)\left(x-7\right)\left(x+7\right)x\left(x-5\right)\ge 0$$

Нули множителей: $x=-7$, $x=-1$, $x=0$, $x=3$, $x=5$, $x=7$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x\le -7,\\ -1\le x\le 0,\\ 3\le x\le 5,\\ x\ge 7. \end{array}\right.$$

Общий метод интервалов для решения неравенств вида $A(x) > 0$ $A(x) < 0$ $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$, ,

, где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$ $n \geq 1, n \in N$

$x_1, x_2, ..., x_n$,

если не все различны

1. Привести рациональное неравенство к одному из видов*:*

$A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$

, где

$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$, $n \geq 1, n \in N$

если не все $x_1, x_2, ..., x_n$ различны, то произведение одинаковых двучленов записывают в виде степени этого двучлена

$A(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot ... \cdot (x - x_n)^{k_n}$ $k_m \geq 1; k_m \in N$, .

Общий метод интервалов для решения неравенств вида $A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$, ,

где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ $n \geq 1, n \in N$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$,

если не все различны

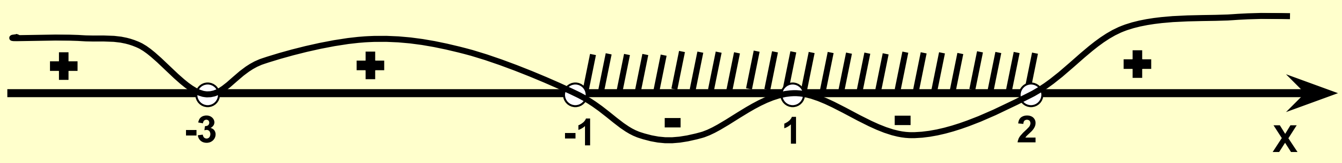
3. Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный, если соответствующий этому нулю двучлен возведён в нечётную степень, и сохранить знак, если соответствующий этому нулю двучлен возведён в чётную степень

Пример 1

Решить неравенство $(x+3)^2(x+1)^3(x-1)^4(x-2)<0$.

Решение

Нули множителей: $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} -1<x<1, \\ 1<x<2. \end{array}\right.$

Пример 1

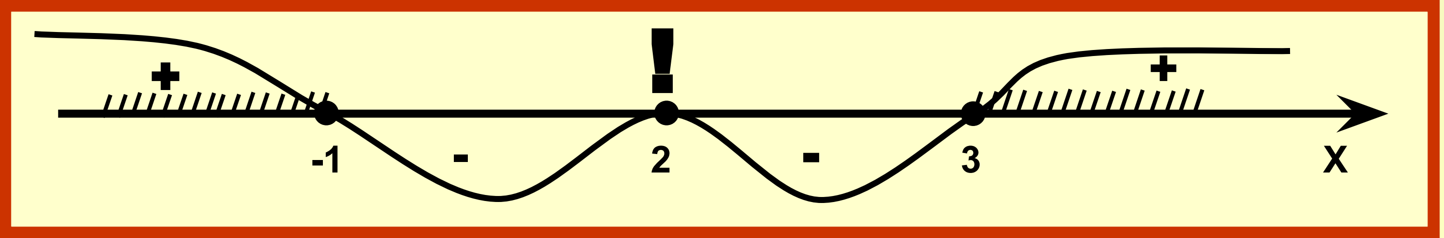
Решить неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \le 0$.

Решение

$$(x+1)(3-x)(x-2)^2 \le 0,$$

$$(x+1)(x-3)(x-2)^2 \ge 0$$

Нули множителей: $x=-1$, $x=2$, $x=3$.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x = 2, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$

Метод интервалов для решения неравенств вида $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ и $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в

Замечани

разных двучленов вида $x - x_0$

Неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ равносильно неравенству $A(x) \cdot B(x) > 0$,

неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ равносильно неравенству $A(x) \cdot B(x) < 0$.

Пример 1

Решить неравенство

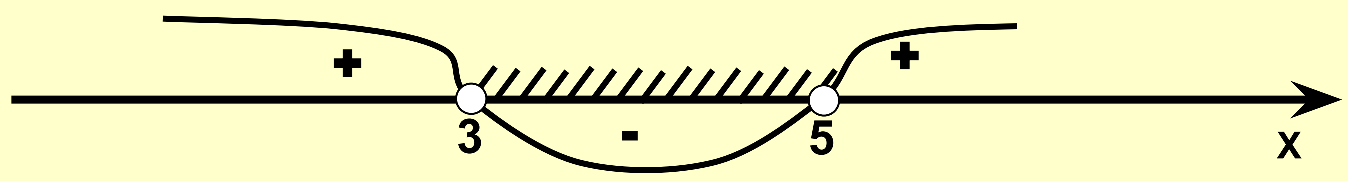
$$\frac{x-3}{x-5}<0$$

Решение

$$\frac{x-3}{x-5}<0,$$

$$(x-3)(x-5)<0.$$

Нули множителей: $x=3$, $x=5$



Ответ: $3<x<5.$

Пример 2

Решить неравенство $$\frac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7}>0$$

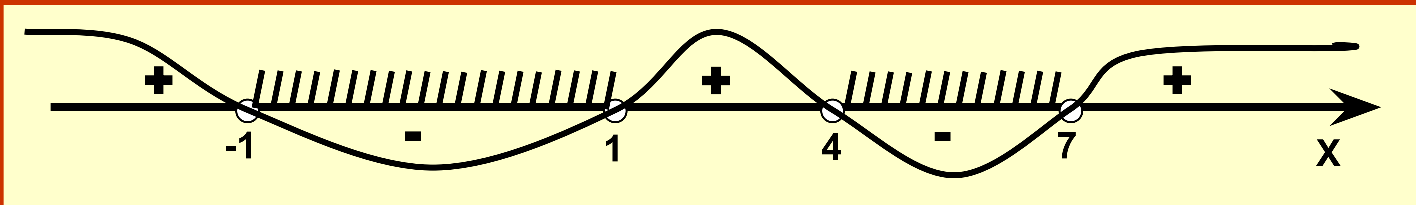
Решение

$$\frac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7}>0,$$

умножив неравенство на *-1* **и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим неравенство** $$\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-7)}<0,$$ **равносильное данному**

$$(x-1)(x-4)(x+1)(x-7)<0.$$

Нули множителей: $x=-1$, $x=1$, $x=4$, $x=7$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l}-1<x<1,\\ 4<x<7.\end{array}\right.$$

Пример3

Решить неравенство $\dfrac{x}{2x+3} > \dfrac{1}{x}$

Решение

$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x},$$

$$\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0,$$

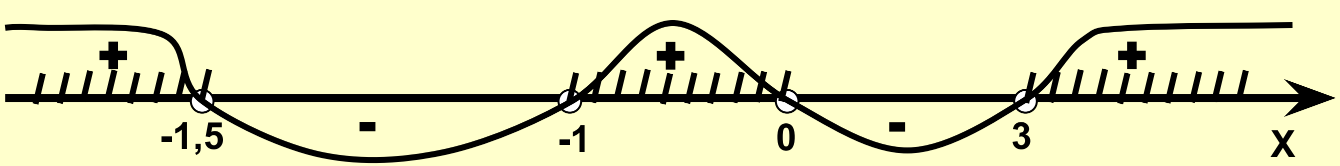
$$\frac{x^2-(2x+3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x(2x+3)} > 0,$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$(x+1)(x-3)x(2x+3) > 0.$$

Нули множителей: $x=-1{,}5$, $x=-1$, $x=0$, $x=3$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x < -1{,}5, \\ -1 < x < 0, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Метод интервалов для решения неравенств вида $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ и $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в произведения двучленов $x - x_0$, где в числителе и знаменателе дроби

Не нарушая общности положим, что неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ имеет вид

$$\frac{(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}{(x - x_1)^{k_2}(x - x_2')\cdot\ldots\cdot(x - x_m')} > 0$$

тогда его можно представить в виде

$$\frac{(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}{(x - x_1)^{k_1+k_2}(x - x_2')\cdot\ldots\cdot(x - x_m')} > 0.$$

Пример 1

Решить неравенство

$$\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x-2}<\frac{5x}{(x+3)(x-2)}$$

Решение

$$\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x-2}<\frac{5x}{(x+3)(x-2)},$$

$$\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x-2}-\frac{5x}{(x+3)(x-2)}<0,$$

$$\frac{x(x-2)+2(x+3)-5x}{(x+3)(x-2)}<0,$$

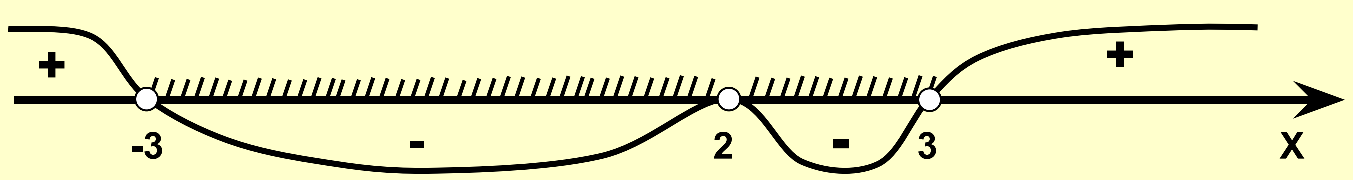
$$\frac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-2)}<0,$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-2)}<0,$$

$$\frac{x-3}{(x+3)(x-2)^2}<0,$$

$$(x-3)(x+3)(x-2)^2<0.$$

Нули множителей: $x=-3$, $x=2$, $x=3$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} -3<x<2, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

Замечание.

Множество решений неравенств вида $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$, $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ есть объединение множества всех решений неравенств $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ и множества всех решений уравнения $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Приме р 1

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых решений неравенства

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \ge \frac{1}{x^2-x-2}$$

Решен ие

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \ge \frac{1}{x^2-x-2},$$

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \ge 0,$$

$$\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \ge 0,$$

$$\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \ge 0,$$

$$\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \ge 0,$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \le 0,$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \le 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \ne 0. \end{cases}$$

Пример1

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых решений неравенства

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \ge \frac{1}{x^2-x-2}$$

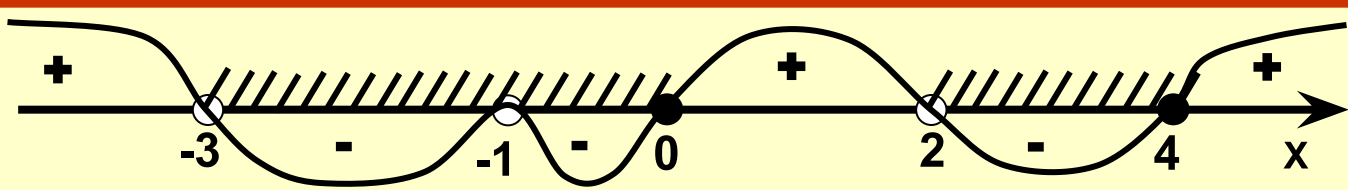
Решение

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \le 0$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \le 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \ne 0. \end{cases}$$

Нули числителя: $x = 0$, $x = 4$

Нули знаменателя: $x = -3$, $x = -1$, $x = 2$



Итак

$$\left[\begin{array}{l} -3 < x < -1, \\ -1 < x \le 0, \\ 2 < x \le 4. \end{array}\right.$$

Целые решения: $x = -2; 0; 3; 4.$

Ответ: 4 целых решения.

Домашнее

19.18. Решите методом интервалов неравенство:

1) $\dfrac{(x^2-7x-8)\cdot(x-8)^2}{(x+2)^2(5-x)} \leqslant 0$;

2) $\dfrac{(x^2-6x+8)\cdot(x^2-4)}{2(x^3-8)} \geqslant 0$;

3) $\dfrac{(2x^2+4x)\cdot(3x-x^2)}{(2x+5)^2} \leqslant 0$;

4) $\dfrac{(x+4)^4\cdot(x+3)^3}{2(x^2+x-2)} \geqslant 0$;

5) $\dfrac{3x+7}{5-x^2}\cdot(x-3)^2 > 0$;

6) $\dfrac{2x-7}{9-x^2}\cdot(x-4)^2 < 0$;

7) $\dfrac{2x-9}{7-x^2}\cdot(4x-3)^2 \leqslant 0$;

8) $\dfrac{5-2x}{4-x^2}\cdot(x-3)^2 \geqslant 0$;

9) $\dfrac{3x+7}{4-x^2}\cdot(x+6)\cdot(x-3)^2 > 0$;

10) $\dfrac{5x-8}{16-x^2}\cdot(x+2)\cdot(x-5)^2 < 0$.

- ответы

$\cup(-2; 2)\cup(4; +\infty)$. 19.18. 1) $[-1; 5)\cup[8; +\infty)$; 2) $[-2; 2)\cup[4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2{,}5)\cup(-2{,}5; -2]\cup[3; +\infty)\cup\{0\}$;

4) $[-3; -2)\cup(1; +\infty)\cup\{-4\}$; 5) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right)\cup(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$; 6) $(-3; 3)\cup(3{,}5; 4)\cup(4; +\infty)$; 7) $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})\cup$

$\cup[4{,}5; +\infty)$; 8) $(-2; 2)\cup[2{,}5; +\infty)$; 9) $\left(-6; -2\frac{1}{3}\right)\cup(-2; 2)$; 10) $(-\infty; -4)\cup(-2; 1{,}6)\cup(4; 5)\cup(5; +\infty)$.

579. 1) $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$;

2) $\frac{x-1}{x+5} \geqslant 2$;

3) $\frac{x^2-36}{x^2+6x} < 0$;

4) $\frac{x-1}{x+3} > 3$.

580. 1) $\frac{(x-2)(x+1)}{x+2} > 0$;

2) $\frac{(2x-3)(3x-17)}{(x+1)(x+4)} \leqslant 0$;

3) $\frac{(1-x)(x+1)}{x(5x+1)} \geqslant 0$;

4) $\frac{(2-x)(3+2x)}{x(1-x)} < 0$.

581. 1) $\frac{2x^2+16x-3}{x^2+8x} > 2$;

2) $\frac{2x^2+x-1}{5x-x^2+7} > 0$;

3) $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6} < 0$;

4) $\frac{x^4+x^3+3}{-x^2+x+2} > 0$.

582. 1) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0$; 2) $\frac{(x^3-64)(-x^2-1)}{x^3+1}\geqslant 0$;

3) $\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2-x+1}\leqslant 0$; 4) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4}\geqslant 0$.

583. 1) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}\geqslant\frac{1}{x}$; 2) $\frac{(x-2)^2(x+4)}{x+7}\leqslant 0$;

3) $1+\frac{x^2}{(1+x)^2}\geqslant\frac{5}{4}$; 4) $\frac{(x+6)^3(x-4)}{(2-x)^6}\geqslant 0$.

B

584. 1) $\frac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x^2)}>0$; 2) $\frac{(x-1)^3}{(5x+10)^2(-1-3x)}<0$;

3) $\frac{x^2(6-x)^3(x+3)}{(x+7)^5}\geqslant 0$; 4) $\frac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}\leqslant 0$.

§ 3. 576. 1) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [3; +\infty)$; 5) $[-1; 6]$. **577.** 2) $(-\infty; 2) \cup (10; +\infty)$; 3) $[-7; +3)$. **578.** 1) $[0; 3) \cup (3; 6]$; 4) $(-4; 3)$. **579.** 2) $[-11; -5)$; 3) $(0; 6)$. **580.** 1) $(-2; -1) \cup (2; +\infty)$; 4) $(-1,5; 0) \cup (1; 2)$. **581.** 2) $(-1; 0,5)$; 4) $(-1; 2)$. **582.** 1) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$; 4) $[-2; -1) \cup \{0\} \cup [2; 3] \cup (3; +\infty)$. **583.** 2) $(-7; -4]$; 3) $(-\infty; -1] \cup (-1; -\frac{1}{3}] \cup [1; +\infty)$. **584.** 1) $(-3; -2) \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$; 4) $(-\infty; 0,5] \cup \{1,5\} \cup (2,5; +\infty)$. **585.** 2) $(0; 1) \cap (2; 4)$; 3) $(-2;$