

МАТЕМАТИКА

**Метод
интервалов.
Общий метод
интервалов.**

8 класс

***«Метод интервалов.
Общий метод
интервалов.»***

Курсы поступления в 9 класс лицея

134

План

лекции:

- Рациональные неравенства**
- Метод интервалов**
- Общий метод интервалов**

Определе

ние

Неравенство, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x , называют рациональным неравенством с неизвестным x .

$$(5x + 1)(3 - 2x) < 0$$

$$\frac{(2x - 3)^4(7 - x)^3}{(2x - 1)^2(3 - x)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} \leq \frac{2}{x - 5} - 3$$

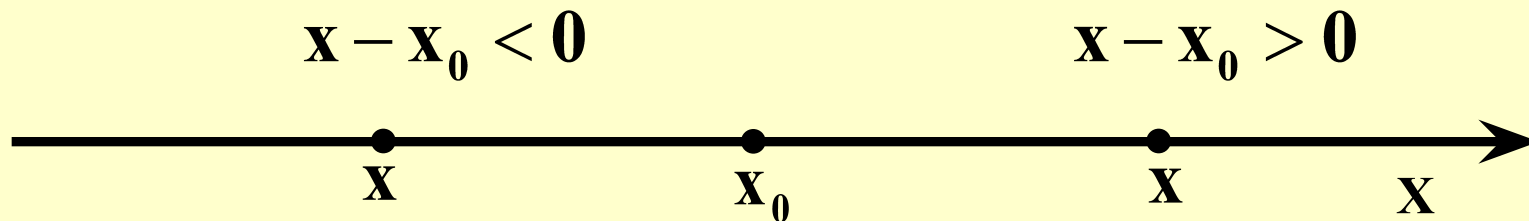
$$\frac{4x - 6}{5 - x} > 2$$

$$(x^2 - 1)^2(3 - 2x)^3(4 - x) < 0$$

Определе ние

Решением неравенства с неизвестным
называют число, при подстановке
которого в это неравенство вместо
получается верное числовое
неравенство.

Решить неравенство – значит найти все
его решения или показать, что их нет.



Метод интервалов для решения
 неравенств вида $A(x) > 0$ на следующем

$$A(x) < 0$$

утверждении.
 Точка x_0 делит ось x на две части:

1) для любого x , находящегося справа от
 точки x_0 , двучлен

положителен;

2) для любого x , находящегося слева от x_0

точки x_0 , двучлен

отрицателен.

Пусть требуется решить

неравенство
 $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) > 0$

Не нарушая общности,

положим
 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) > 0$

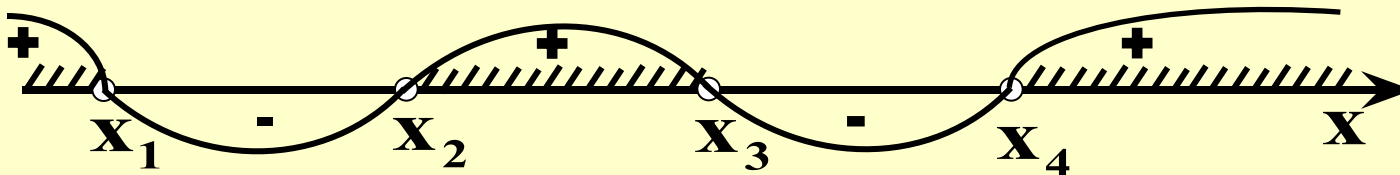
Тогда:

5). Аналогично рассуждая,

получим, что $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) > 0$ для x интерва

$(x_4; \infty)$, $(x_2; x_3)$, $(-\infty; x_1)$ и **из** $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) < 0$ **лов**

для x интерва $(x_3; x_4)$, $(x_1; x_2)$.



Замечани

Сами числа x_1, x_2, x_3, x_4 не являются решением неравенства $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0$

Замечание

2.
Множество решений неравенств $A(x) \geq 0$ и $A(x) \leq 0$ где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, есть объединение множества всех решений неравенств $A(x) > 0$ и $A(x) < 0$ и множества всех решений уравнения $A(x) = 0$

Метод интервалов для решения

неравенств вида

$$A(x) < 0 \quad A(x) > 0 \quad A(x) \leq 0 \quad A(x) \geq 0$$

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad , \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

где

$$n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_k$$

, то есть все различны.

1. Привести рациональное неравенство к одному из видов:

$$A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \geq 0, A(x) \leq 0$$

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad , \quad \text{где } n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

2. Найти нули множителей, стоящих в левой части неравенства, и расположить их на оси O_x в соответствующем порядке.

Метод интервалов для решения

неравенств вида

$$A(x) < 0 \quad A(x) > 0 \quad A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

где

$$n \geq 1, n \in \mathbb{N} \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

x_k

то есть все

различны.

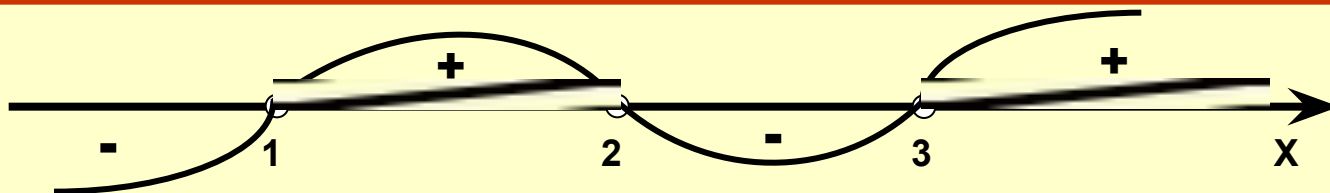
3. Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный.

Пример 1

Решение

Решить неравенство $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

Нули множителей: $x = 1$ $x = 2$ $x = 3$



Ответ:
 $1 < x < 2,$
 $x > 3.$

Пример

р2

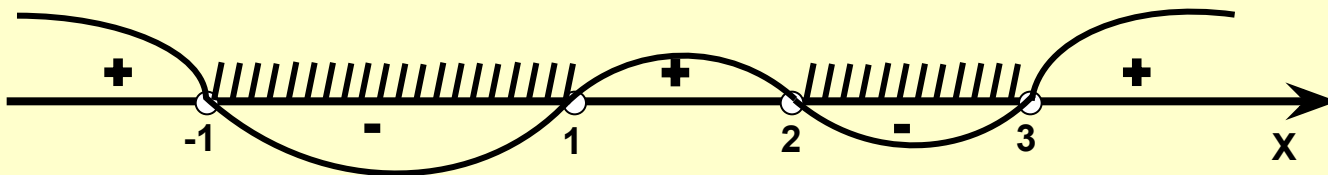
Решить неравенство $(2-x)(x^2-4x+3)(x+1) > 0$

Решение

ие

$(2-x)(x^2-4x+3)(x+1) > 0$,
умножив неравенство на -1 и
разложив квадратный трёхчлен на
множители, получим неравенство
равносильное данному

Нули множителей: $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$



Ответ: $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$

Пример

р3

Решение

ие

Решить неравенство $(x^2 - 6x)(16 - x^2) \geq 0$

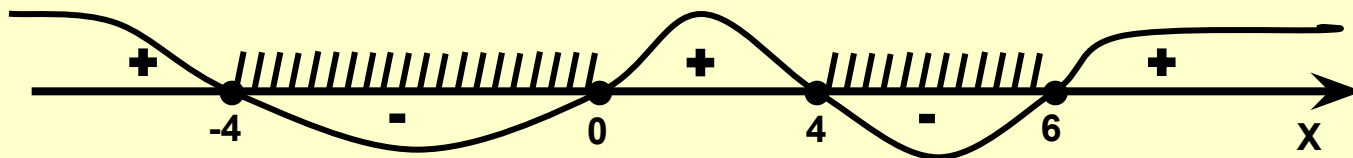
$$(x^2 - 6x)(16 - x^2) \geq 0$$

умножив неравенство на -1 и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим

$$x(x-6)(x-4)(x+4) \leq 0$$

данному

Нули множителей: $x = 0$, $x = 4$, $x = 6$



Ответ: $\begin{cases} -4 \leq x \leq 0, \\ 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$

Пример

р4

Решить

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 + x + 1)(49 - x^2)(5x - x^2) \geq 0$$

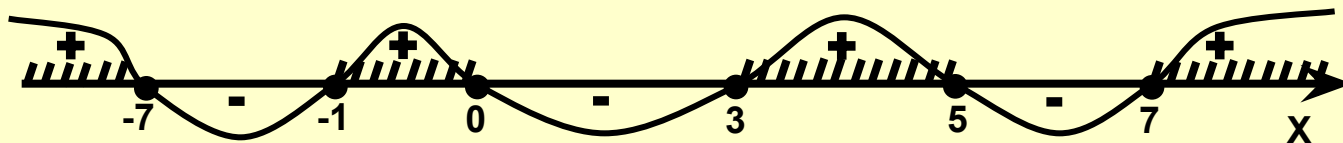
Решение

ие

$(x^2 - 2x - 3)(x^2 + x + 1)(49 - x^2)(5x - x^2) \geq 0$,
умножив неравенство 2 раза на -1 ,
разложив квадратные трёхчлены
на множители $x^2 + x + 1 > 0$ при $x \in \mathbb{R}$,
получим неравенство
равносильное данному

$$(x + 3)(x - 1)(x - 7)(x + 7)x(x - 5) \geq 0$$

Нули множителей: $x = -7, x = -1, x = 0, x = 3, x = 5, x = 7$



Ответ:

$$\begin{aligned} x &\leq -7, \\ -1 &\leq x \leq 0, \\ 3 &\leq x \leq 5, \\ x &\geq 7. \end{aligned}$$

Общий метод интервалов для решения неравенств вида

$$A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \geq 0, A(x) \leq 0,$$

где

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

если не все x_i различны

1. Привести рациональное неравенство к одному из видов:

$$A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \geq 0, A(x) \leq 0$$

где

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

если не все x_i различны, то

произведение одинаковых двучленов

записывают в виде степени этого двучлена

$$A(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n} \quad k_m \geq 1; k_m \in \mathbb{N}$$

Общий метод интервалов для решения неравенств вида

$$A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \geq 0, A(x) \leq 0,$$

где

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

если не все различны

3. Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный, если соответствующий этому нулю двучлен возведён в нечётную степень, и сохранить знак, если соответствующий этому нулю

двучлен возведён в чётную степень

Пример

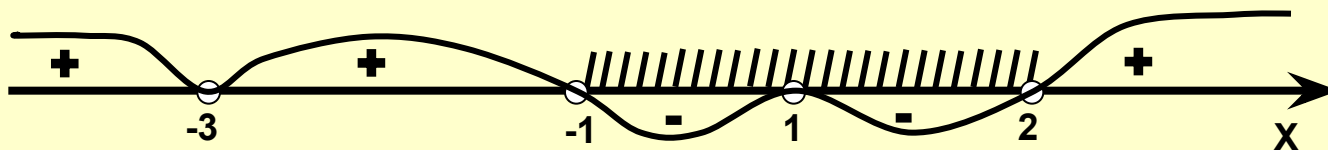
р1

Решение

ие

Решить неравенство $(x+3)^2(x+1)^3(x-1)^4(x-2) < 0$

Нули множителей: $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$



Ответ: $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ 1 < x < 2. \end{cases}$

Пример

р1

Решение

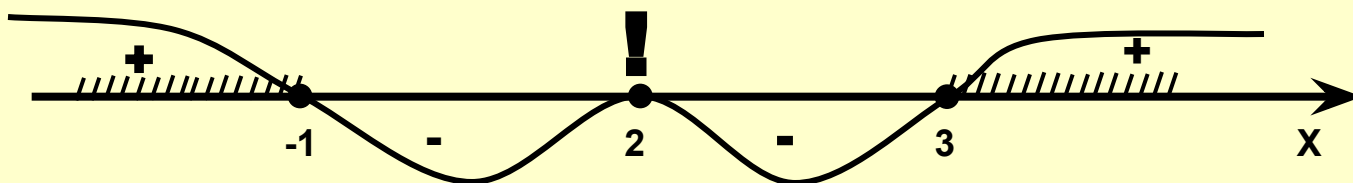
ие

Решить неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \leq 0$

$$(x+1)(3-x)(x-2)^2 \leq 0,$$

$$(x+1)(x-3)(x-2)^2 \geq 0$$

Нули множителей: $x = -1$ $x = 2$ $x = 3$



Ответ: $\begin{cases} x \leq -1, \\ x = 2, \\ x \geq 3. \end{cases}$

Метод интервалов для решения

неравенств вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad A(x) \quad B(x)$$

и , где и

разлагаются в

$$x - x_0$$

Замечани разных двучленов

вида

Неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ равносильно неравенству $A(x) \cdot B(x) > 0$

неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ равносильно неравенству $A(x) \cdot B(x) < 0$

Пример 1

р1

Решить

неравенство
$$\frac{x-3}{x-5} < 0$$

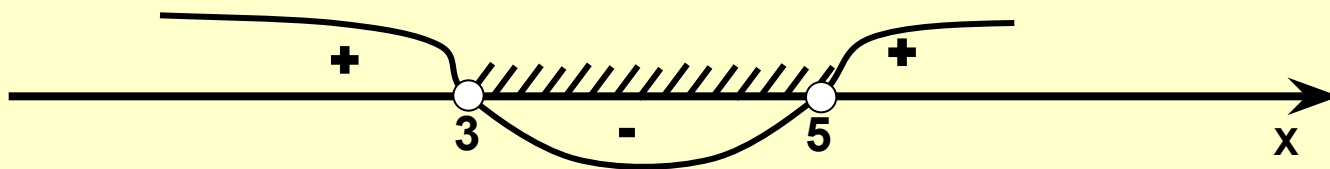
Решение

ие

$$\frac{x-3}{x-5} < 0,$$

$$(x-3)(x-5) < 0.$$

Нули множителей $x=3$ $x=5$



Ответ:

$$3 < x < 5.$$

Пример 2

Решить

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{-x^2 + 6x + 7} > 0$$

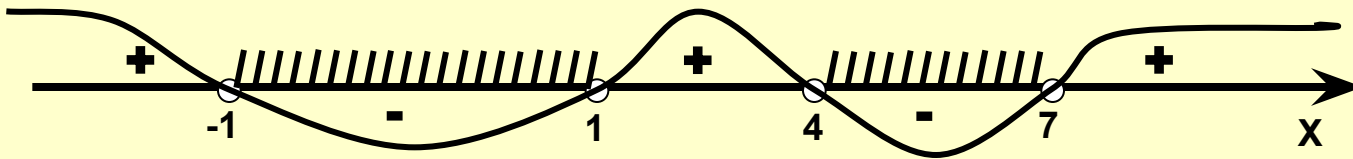
Решение

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{-x^2 + 6x + 7} > 0,$$

умножив неравенство на -1 и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим неравенство равносильное данному

$$(x - 1)(x - 4)(x + 1)(x - 7) < 0.$$

Нули множителей: $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$, $x = 7$



Ответ:

$$\begin{cases} -1 < x < 1, \\ 4 < x < 7. \end{cases}$$

Пример 3

Решить неравенство
$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x}$$

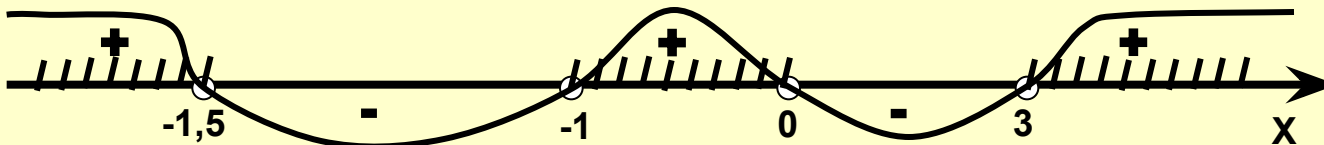
Решение

$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x},$$
$$\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0,$$
$$\frac{x^2 - (2x+3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x(2x+3)} > 0,$$
$$\frac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$(x+1)(x-3)x(2x+3) > 0.$$

Нули множителей: $x = -1,5$ $x = -1$ $x = 0$ $x = 3$



Ответ:

$$\begin{cases} x < -1,5, \\ -1 < x < 0, \\ x > 3. \end{cases}$$

Метод интервалов для решения

неравенств вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad A(x) \cdot B(x)$$

и , где и

разлагаются в

произведения двучленов, где в

числителе и знаменателе дроби

Не нарушая общности положим, что

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

неравенство имеет вид

$$\frac{(x - x_1)^{k_1} (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x - x_1)^{k_2} (x - x'_2) \cdot \dots \cdot (x - x'_m)} > 0$$

вид

тогда его можно

представить в виде

$$\frac{(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x - x_1)^{k_1+k_2} (x - x'_2) \cdot \dots \cdot (x - x'_m)} > 0$$

Пример

р1

Решить неравенство

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$$

Решение

ие

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)},$$

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{5x}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{x(x-2) + 2(x+3) - 5x}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

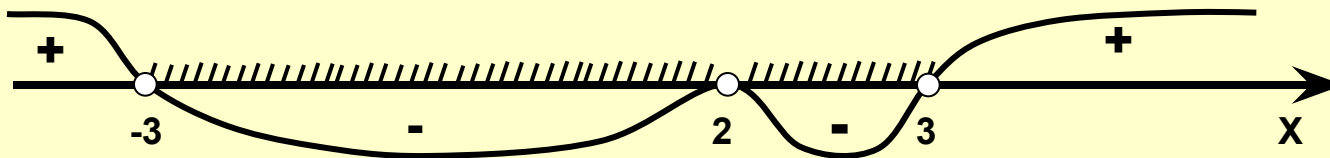
$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{x-3}{(x+3)(x-2)^2} < 0,$$

$$(x-3)(x+3)(x-2)^2 < 0.$$

Нули множителей: $x = -3$, $x = 2$, $x = 3$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} -3 < x < 2, \\ 2 < x < 3. \end{array} \right.$$

Замечани

е.

Множество решений неравенств вида $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$

, $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$

есть объединение множества

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

всех решений неравенств

, $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$

и

множества всех решений уравнения

Приме

Решен

ие

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых

решений неравенства
$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$$

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2},$$

$$\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0,$$

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \geq 0,$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0,$$

$$\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \geq 0,$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0,$$

Приме

Решен

це

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых
решений неравенства

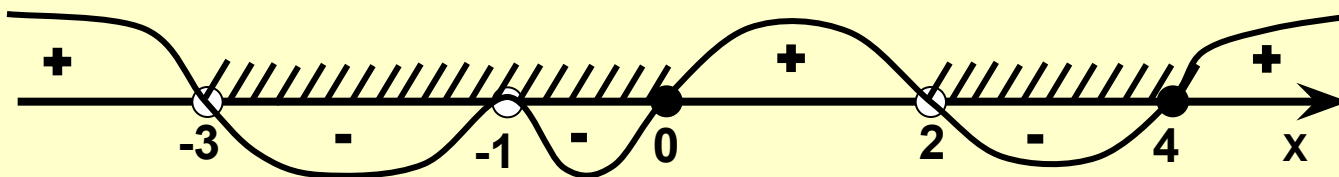
$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

Нули числителя: $x = 4$

Нули знаменателя: $x = -1$, $x = 2$



Итак

$$\begin{cases} -3 < x < -1, \\ -1 < x \leq 0, \\ 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Целые

$$x = -2; 0; 3; 4.$$

решения:

Ответ: 4 целых

решения.

Домашнее

19.18. Решите методом интервалов неравенство:

$$1) \frac{(x^2 - 7x - 8) \cdot (x - 8)^2}{(x + 2)^2 (5 - x)} \leq 0;$$

$$2) \frac{(x^2 - 6x + 8) \cdot (x^2 - 4)}{2(x^3 - 8)} \geq 0;$$

$$3) \frac{(2x^2 + 4x) \cdot (3x - x^2)}{(2x + 5)^2} \leq 0;$$

$$4) \frac{(x + 4)^4 \cdot (x + 3)^3}{2(x^2 + x - 2)} \geq 0;$$

$$5) \frac{3x + 7}{5 - x^2} \cdot (x - 3)^2 > 0;$$

$$6) \frac{2x - 7}{9 - x^2} \cdot (x - 4)^2 < 0;$$

$$7) \frac{2x - 9}{7 - x^2} \cdot (4x - 3)^2 \leq 0;$$

$$8) \frac{5 - 2x}{4 - x^2} \cdot (x - 3)^2 \geq 0;$$

$$9) \frac{3x + 7}{4 - x^2} \cdot (x + 6) \cdot (x - 3)^2 > 0; \quad 10) \frac{5x - 8}{16 - x^2} \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)^2 < 0.$$

• ОТВЕТЫ

$\cup (-2; 2) \cup (4; +\infty)$. 19.18. 1) $[-1; 5) \cup [8; +\infty)$; 2) $[-2; 2) \cup [4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2,5) \cup (-2,5; -2] \cup [3; +\infty) \cup \{0\}$;

4) $[-3; -2) \cup (1; +\infty) \cup \{-4\}$; 5) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right) \cup (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$; 6) $(-3; 3) \cup (3,5; 4) \cup (4; +\infty)$; 7) $(-\sqrt{7}; \sqrt{7}) \cup$

$\cup [4,5; +\infty)$; 8) $(-2; 2) \cup [2,5; +\infty)$; 9) $\left(-6; -2\frac{1}{3}\right) \cup (-2; 2)$; 10) $(-\infty; -4) \cup (-2; 1,6) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$.

$$579. 1) \frac{1}{x} \geq \frac{1}{3};$$

$$3) \frac{x^2 - 36}{x^2 + 6x} < 0;$$

$$2) \frac{x-1}{x+5} \geq 2;$$

$$4) \frac{x-1}{x+3} > 3.$$

$$580. 1) \frac{(x-2)(x+1)}{x+2} > 0;$$

$$2) \frac{(2x-3)(3x-17)}{(x+1)(x+4)} \leq 0;$$

$$3) \frac{(1-x)(x+1)}{x(5x+1)} \geq 0;$$

$$4) \frac{(2-x)(3+2x)}{x(1-x)} < 0.$$

$$581. 1) \frac{2x^2 + 16x - 3}{x^2 + 8x} > 2;$$

$$2) \frac{2x^2 + x - 1}{5x - x^2 + 7} > 0;$$

$$3) \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} < 0;$$

$$4) \frac{x^4 + x^3 + 3}{-x^2 + x + 2} > 0.$$

$$582. 1) \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x + 2} > 0;$$

$$2) \frac{(x^3 - 64)(-x^2 - 1)}{x^3 + 1} \geq 0;$$

$$3) \frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2-x+1} \leq 0; \quad 4) \frac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4} \geq 0.$$

$$583. 1) \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x};$$

$$2) \frac{(x-2)^2(x+4)}{x+7} \leq 0;$$

$$3) 1 + \frac{x^2}{(1+x)^2} \geq \frac{5}{4};$$

$$4) \frac{(x+6)^3(x-4)}{(2-x)^6} \geq 0.$$

B

$$584. 1) \frac{3x^2 + 10x + 3}{(3-x)^2(4-x^2)} > 0;$$

$$2) \frac{(x-1)^3}{(5x+10)^2(-1-3x)} < 0;$$

$$3) \frac{x^2(6-x)^3(x+3)}{(x+7)^5} \geq 0;$$

$$4) \frac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5} \leq 0.$$

§ 3. 576. 1) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [3; +\infty)$; 5) $[-1; 6]$. 577. 2) $(-\infty; 2) \cup (10; +\infty)$; 3) $[-7; +3)$. 578. 1) $[0; 3) \cup (3; 6]$; 4) $(-4; 3)$. 579. 2) $[-11; -5)$; 3) $(0; 6)$. 580. 1) $(-2; -1) \cup (2; +\infty)$; 4) $(-1,5; 0) \cup (1; 2)$. 581. 2) $(-1; 0,5)$; 4) $(-1; 2)$. 582. 1) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$; 4) $[-2; -1) \cup \{0\} \cup [2; 3] \cup [3; +\infty)$. 583. 2) $(-7; -4]$; 3) $(-\infty; -1] \cup (-1; -\frac{1}{3}] \cup [1; +\infty)$. 584. 1) $(-3; -2) \cup (-\frac{1}{3}; 2)$; 4) $(-\infty; 0,5] \cup \{1,5\} \cup (2,5; +\infty)$. 585. 2) $(0; 1) \cap (2; 4)$; 3) $(-2;$