

# Тема: Дифференциальные уравнения 1 порядка

## Лекция 1

Основные понятия теории  
дифференциальных уравнений

# Литература

- Высшая математика: учебное пособие / В.И. Белоусова, Г.М. Ермакова, М.М. Михалева, Н.В. Чуксина, И.А. Шестакова – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. – Ч.II. – 277 с.
- Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Едиториал «УРСС», 2002, – 256 с.
- Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. Т.3. М.: Дрофа, 2004. – 512с.
- Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч 1. М.: Высшая школа, 1999. – 304 с.

- Понтрягин ЛС Обыкновенные ДУ. – М, 1961.
- Филлипов АФ Сборник задач по ДУ. – М, 2008.
- Сборник задач по математике для ВТУЗов: учеб.лит./  
Под ред. Ефимова, Поспелова, Ч.2, 2003.

# Дифференциальные уравнения

Любой процесс, в котором есть движение, описывается ДУ

## §1. Основная терминология дифференциальных уравнений

Уравнение, связывающее неизвестную функцию, её аргументы, её производные, называется *дифференциальным уравнением*.

*Порядок дифференциального уравнения* – порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

*Пример:*  $y^{(4)} - y + x = 0$  - уравнение четвёртого порядка.

# Классификация ДУ

ДУ

**Обыкновенные ДУ**, т.е. ДУ,  
содержащее искомую функцию  
одного аргумента

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x\right) = 0$$

**ДУ в частных производных:** ДУ,  
содержащее функцию нескольких  
аргумента

$$F\left(y^{(n)}_{x_i}, \dots, y'_{x_i}, y(x_1, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0$$

**ДУ, разрешимые относительно  
старшей производной**

$$y^{(n)} = F\left(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x\right)$$

**ДУ первого порядка**  $y' = F(y, x)$

**ДУ высших порядков**  $y''' = F(y'', y', y, x)$

**ДУ, неразрешимые  
относительно старшей  
производной**

$$y' = \ln(y'x) + ux$$

**Линейные и нелинейные ДУ**

$$y''' + 3y'' - y' + x^2 = 0$$

$$y''' \cdot y'' - (y')^2 + 3x = 0$$

В данном курсе будут рассматриваться только *обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной*, т. е. уравнения вида:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

### Решение ДУ

Функция  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , непрерывная и  $n$  раз дифференцируемая на  $(a, b)$ , называется ***решением дифференциально уравнения  $n$ -го порядка на  $(a, b)$*** , если при подстановке её в уравнение вместо неизвестной функции и её производных обращает уравнение в тождество на указанном интервале.

График решения дифференциального уравнения называют ***интегральной кривой***.

## Основная задача теории ДУ:

решить ДУ, т. е. найти все его решения и описать их свойства.

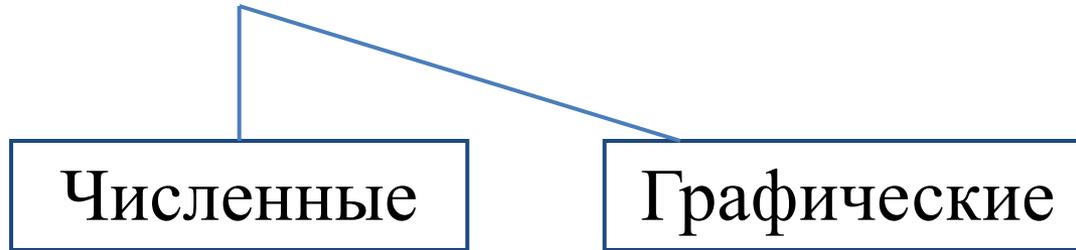
Процедура отыскания решений ДУ  
(чаще всего связанная с интегрированием)  
называется интегрированием ДУ.

ДУ считается решённым, если его решение сведено к неопределённому интегралу (к квадратуре).

Универсального метода решения ДУ не существует.

## Методы решения ДУ:

- Точные (аналитические).
- Приближенные

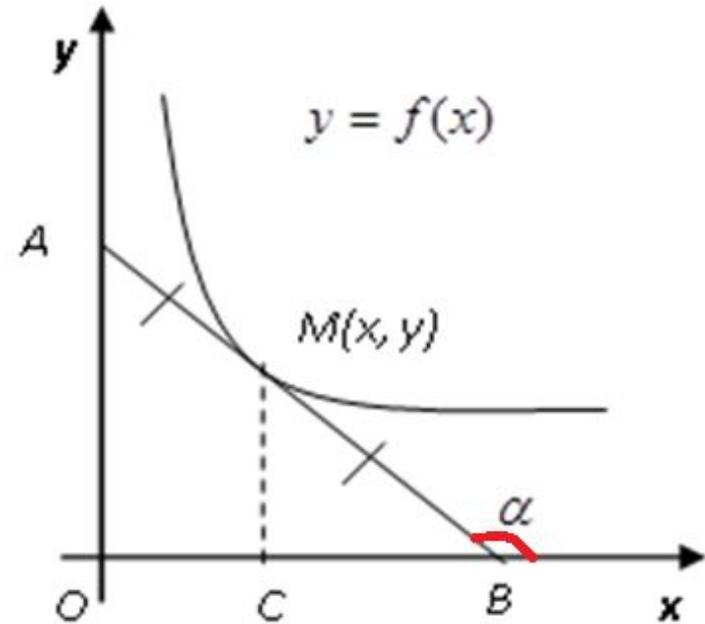


**Пример.** Найти кривую, проходящую через точку  $(3;1)$ , у которой отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

$$AB - \text{касательная} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle ABO) = y'(x)$$

$$\triangle AOB: \operatorname{tg}(\angle ABO) = \frac{AO}{BO}$$

$$\triangle AOB \sim \triangle BCM \rightarrow \operatorname{tg}(\angle ABO) = \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}$$



Решением ДУ является функция  $y = 3/x$ .

## §2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:  $F(x, y, y')=0$ ,

где  $x$  – независимая переменная;

$y = y(x)$  – искомая функция;

$y'$  – её производная.

Иногда уравнение можно разрешить относительно  $y'$ :

$$y' = f(x, y).$$

Последнее уравнение можно записать в дифференциальной форме, заменив  $y'$  на  $dy/dx$ :

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Например, уравнение  $y' = x^2/y$  можно записать в виде  $dy/dx = x^2/y$  или  $x^2 dx - y dy = 0$ .

Дифференциальное уравнение в общем случае имеет бесконечное множество решений.

Например, решением уравнения  $y' = \cos x$  является функция  $y = \sin x$ , а также функции

$$y = \sin x + 3, y = \sin x - 1,5$$

и, в общем случае,  $y = \sin x + C$ , где  $C - const$ .

Чтобы получить одно решение дифференциального уравнения, необходимо подчинить его некоторым дополнительным условиям.

Условие, что функция  $y(x)$  должна быть равна определенному значению  $y_0$ , при  $x_0$ , называется ***начальным условием***.

Начальное условие записывают в виде:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y|_{x=x_0} = y_0.$$

**Общим решением** дифференциального уравнения первого порядка называется функция  $y = \varphi(x, C)$ , содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

- а) функция  $\varphi(x, C)$  есть решение дифференциального уравнения при любом конкретном значении постоянной  $C$ ;
- б) каково бы ни было допустимое начальное условие, можно найти такое значение постоянной  $C=C_0$ , что функция  $y=\varphi(x, C_0)$  удовлетворяет данному начальному условию.

**Частным решением** дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция  $y=\varphi(x, C_0)$ , полученная из общего решения  $y=\varphi(x, C)$  при конкретном значении постоянной  $C=C_0$ .

С геометрической точки зрения общее решение дифференциального уравнения есть семейство интегральных кривых на плоскости  $Oxy$ ;

частное решение – одна интегральная кривая этого семейства, проходящая через заданную точку.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего данному начальному условию, называется *задачей Коши*

(*Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик*).

**Теорема (существования и единственности решения задачи Коши).** Если в уравнении  $y' = f(x, y)$  функция  $f(x, y)$  и её частная производная  $f'_y(x, y)$  непрерывны в некоторой области, содержащей точку  $(x_0, y_0)$ , то в этой области существует единственное решение  $y = \varphi(x)$  этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

(без доказательства)

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что существует единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, проходящая через точку  $(x_0, y_0)$ , если выполняется условие теоремы.

В процессе решения дифференциального уравнения нередко приходят к соотношению вида  $\Phi(x, y, C) = 0$ , которое неявно определяет искомую функцию .

Такое равенство называют *общим интегралом* дифференциального уравнения, а равенство  $\Phi(x, y, C_0) = 0$  называется *частным интегралом* уравнения.

Решение дифференциального уравнения называется *особым*, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Особое решение нельзя получить из общего решения дифференциального уравнения ни при каком значении (даже при  $C = \infty$ ).

**Пример:** рассмотрим уравнение  $y' = \sqrt{y}$ .

$$y = \frac{(x + C)^2}{4} \text{ — общее решение;}$$

$$y = \frac{x^2}{4} \text{ — частное решение;}$$

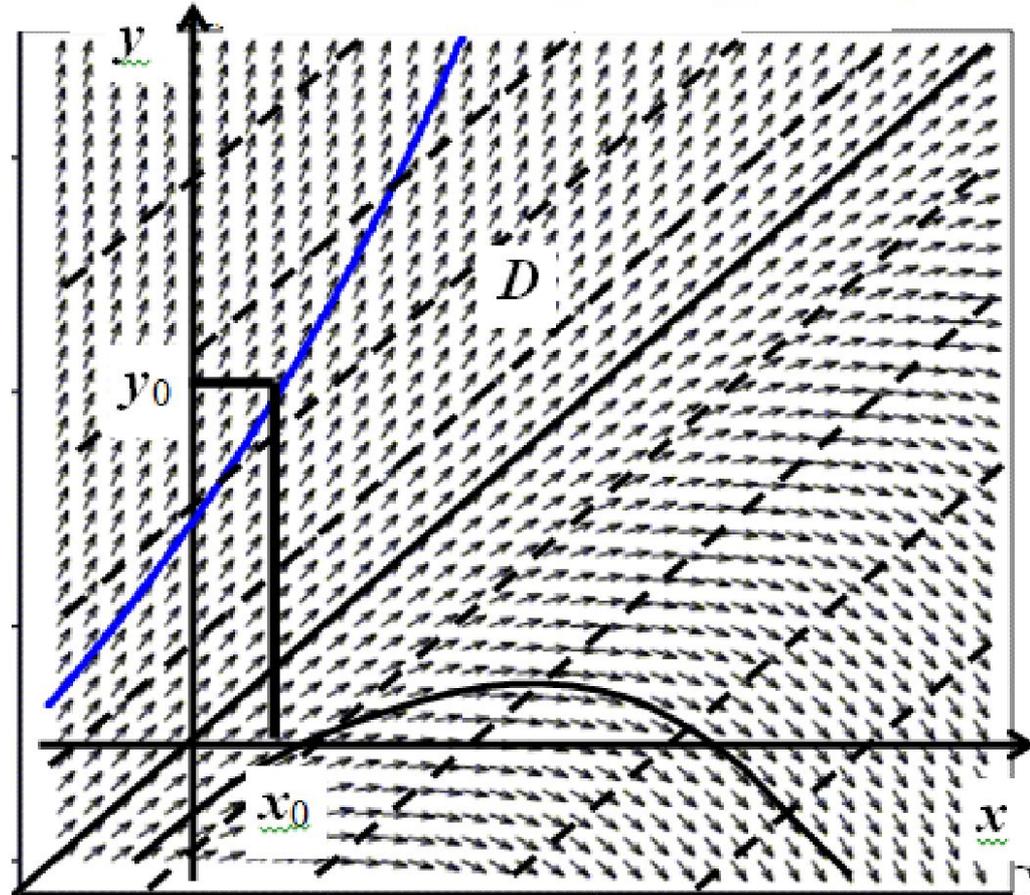
$$y \equiv 0 \text{ — особое решение ДУ.}$$

## Геометрический метод решения. Метод изоклин.

Уравнение  $y' = f(x, y)$  в каждой точке  $(x, y)$  области  $D$ , в которой задана функция  $f(x, y)$ , определяет - угловой коэффициент касательной к решению, проходящему через точку  $(x, y)$ , т.е. направление, в котором проходит решение через эту точку.

Говорят, что ДУ задаёт в  $D$  поле направлений. График любого решения дифференциального уравнения (**интегральная кривая**) в любой своей точке касается этого поля, т.е. проходит в направлении, определяемом полем.

На рисунке - поле направлений, определяемое уравнением, и три интегральные кривые (три частных решения) этого уравнения.



## Метод изоклин.

Для изображения поля направлений, задаваемого дифференциальным уравнением, рассматривают линии уровня функции  $f(x, y)$ , т.е. геометрические места точек, в которых касательные к интегральным кривым сохраняют постоянное направление.

Такие линии называются **изоклинами**.

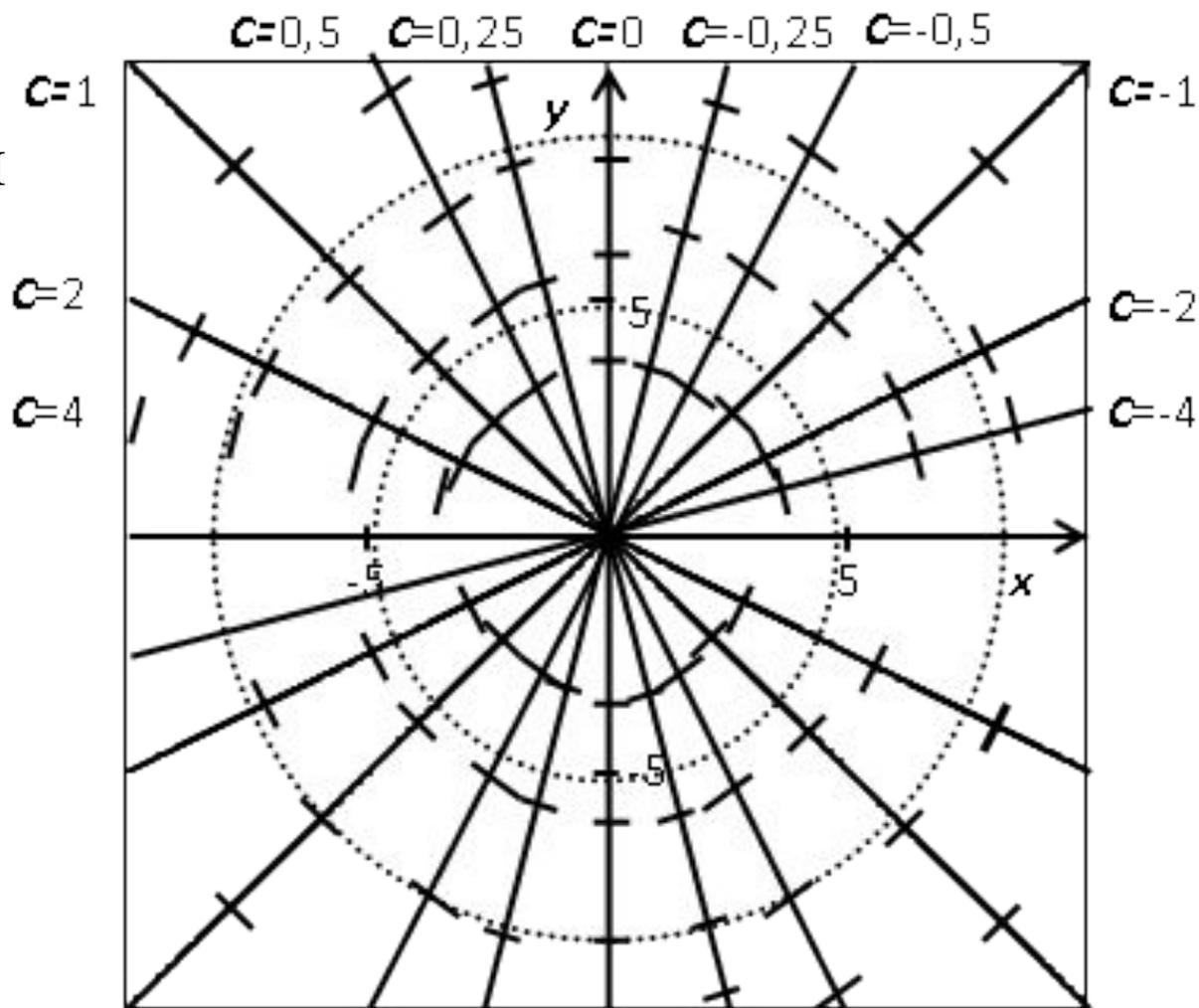
С помощью изоклин можно приближённо изобразить интегральные кривые.

## Метод изоклин.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Изоклины – линии  
с уравнением

$$-\frac{x}{y} = C$$



## Задание к лекции

Смотрим по прикрепленной ссылке видео и конспектируем кратко суть метода изоклин и алгоритм его применения.

<https://www.youtube.com/watch?v=83gQDXfM8wo>