

Тема: Дифференциальные уравнения 1 порядка

Лекция 1

Основные понятия теории
дифференциальных уравнений

Литература

- Высшая математика: учебное пособие / В.И. Белоусова, Г.М. Ермакова, М.М. Михалева, Н.В. Чуксина, И.А. Шестакова – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2017. – Ч.II. – 277 с.
- Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Едиториал «УРСС», 2002, – 256 с.
- Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. Т.3. М.: Дрофа, 2004. – 512с.
- Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч 1. М.: Высшая школа, 1999. – 304 с.

- Понтрягин ЛС Обыкновенные ДУ. – М, 1961.
- Филлипов АФ Сборник задач по ДУ. – М, 2008.
- Сборник задач по математике для ВТУЗов: учеб.лит./
Под ред. Ефимова, Поспелова, Ч.2, 2003.

Дифференциальные уравнения

Любой процесс, в котором есть движение, описывается ДУ

§1. Основная терминология дифференциальных уравнений

Уравнение, связывающее неизвестную функцию, её аргументы, её производные, называется *дифференциальным уравнением*.

Порядок дифференциального уравнения – порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Пример: $y^{(4)} - y + x = 0$ - уравнение четвёртого порядка.

Классификация ДУ

ДУ

Обыкновенные ДУ, т.е. ДУ,
содержащее искомую функцию
одного аргумента

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x\right) = 0$$

ДУ в частных производных: ДУ,
содержащее функцию нескольких
аргумента

$$F\left(y^{(n)}_{x_i}, \dots, y'_{x_i}, y(x_1, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0$$

**ДУ, разрешимые относительно
старшей производной**

$$y^{(n)} = F\left(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x\right)$$

ДУ первого порядка $y' = F(y, x)$

ДУ высших порядков $y''' = F(y'', y', y, x)$

**ДУ, неразрешимые
относительно старшей
производной**

$$y' = \ln(y'x) + ux$$

Линейные и нелинейные ДУ

$$y''' + 3y'' - y' + x^2 = 0$$

$$y''' \cdot y'' - (y')^2 + 3x = 0$$

В данном курсе будут рассматриваться только *обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной*, т. е. уравнения вида:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Решение ДУ

Функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, непрерывная и n раз дифференцируемая на (a, b) , называется ***решением дифференциально уравнения n -го порядка на (a, b)*** , если при подстановке её в уравнение вместо неизвестной функции и её производных обращает уравнение в тождество на указанном интервале.

График решения дифференциального уравнения называют ***интегральной кривой***.

Основная задача теории ДУ:

решить ДУ, т. е. найти все его решения и описать их свойства.

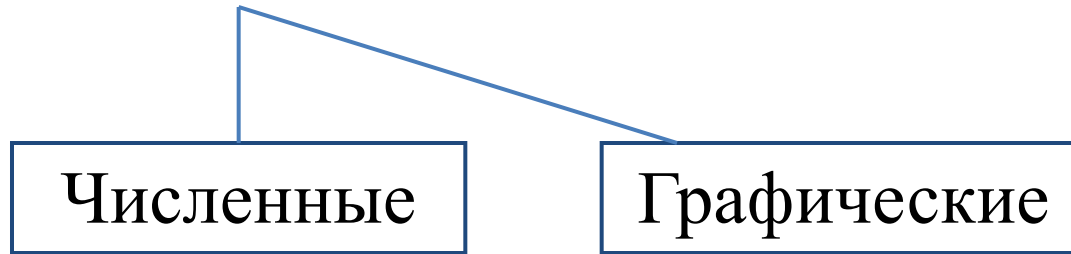
Процедура отыскания решений ДУ
(чаще всего связанная с интегрированием)
называется интегрированием ДУ.

ДУ считается решённым, если его решение сведено к неопределённому интегралу (к квадратуре).

Универсального метода решения ДУ не существует.

Методы решения ДУ:

- Точные (аналитические).
- Приближенные

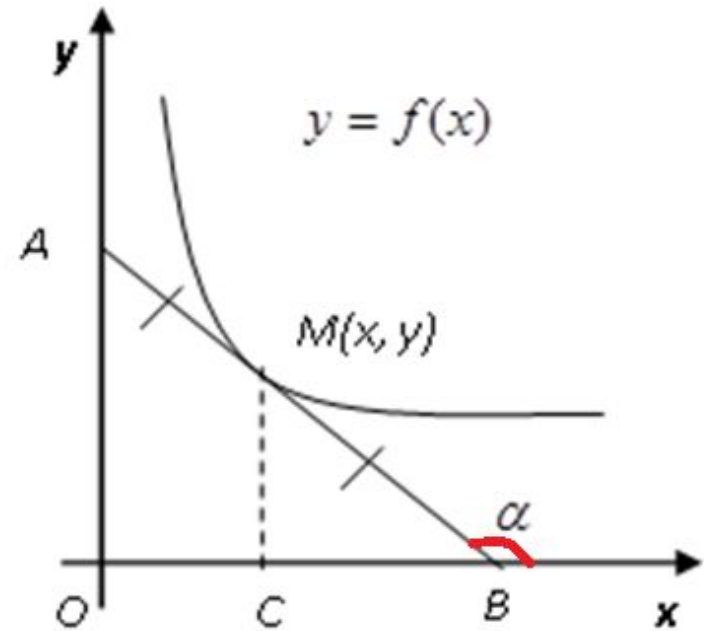


Пример. Найти кривую, проходящую через точку $(3;1)$, у которой отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

$$AB - \text{касательная} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \angle ABO) = y'(x)$$

$$\triangle AOB: \operatorname{tg}(\angle ABO) = \frac{AO}{BO}$$

$$\triangle AOB \sim \triangle BCM \rightarrow \operatorname{tg}(\angle ABO) = \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}$$



Решением ДУ является функция $y = 3/x$.

§2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид: $F(x, y, y')=0$,

где x – независимая переменная;

$y = y(x)$ – искомая функция;

y' – её производная.

Иногда уравнение можно разрешить относительно y' :

$$y' = f(x, y).$$

Последнее уравнение можно записать в дифференциальной форме, заменив y' на dy/dx :

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Например, уравнение $y' = x^2/y$ можно записать в виде $dy/dx = x^2/y$ или $x^2 dx - y dy = 0$.

Дифференциальное уравнение в общем случае имеет бесконечное множество решений.

Например, решением уравнения $y' = \cos x$ является функция $y = \sin x$, а также функции

$$y = \sin x + 3, y = \sin x - 1,5$$

и, в общем случае, $y = \sin x + C$, где $C - const$.

Чтобы получить одно решение дифференциального уравнения, необходимо подчинить его некоторым дополнительным условиям.

Условие, что функция $y(x)$ должна быть равна определенному значению y_0 , при x_0 , называется ***начальным условием***.

Начальное условие записывают в виде:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y|_{x=x_0} = y_0.$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

- а) функция $\varphi(x, C)$ есть решение дифференциального уравнения при любом конкретном значении постоянной C ;
- б) каково бы ни было допустимое начальное условие, можно найти такое значение постоянной $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y=\varphi(x, C_0)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

С геометрической точки зрения общее решение дифференциального уравнения есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy ;

частное решение – одна интегральная кривая этого семейства, проходящая через заданную точку.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего данному начальному условию, называется *задачей Коши*

(*Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик*).

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0) , то в этой области существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

(без доказательства)

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что существует единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, проходящая через точку (x_0, y_0) , если выполняется условие теоремы.

В процессе решения дифференциального уравнения нередко приходят к соотношению вида $\Phi(x, y, C) = 0$, которое неявно определяет искомую функцию .

Такое равенство называют *общим интегралом* дифференциального уравнения, а равенство $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется *частным интегралом* уравнения.

Решение дифференциального уравнения называется *особым*, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Особое решение нельзя получить из общего решения дифференциального уравнения ни при каком значении (даже при $C = \infty$).

Пример: рассмотрим уравнение $y' = \sqrt{y}$.

$$y = \frac{(x + C)^2}{4} \text{ — общее решение;}$$

$$y = \frac{x^2}{4} \text{ — частное решение;}$$

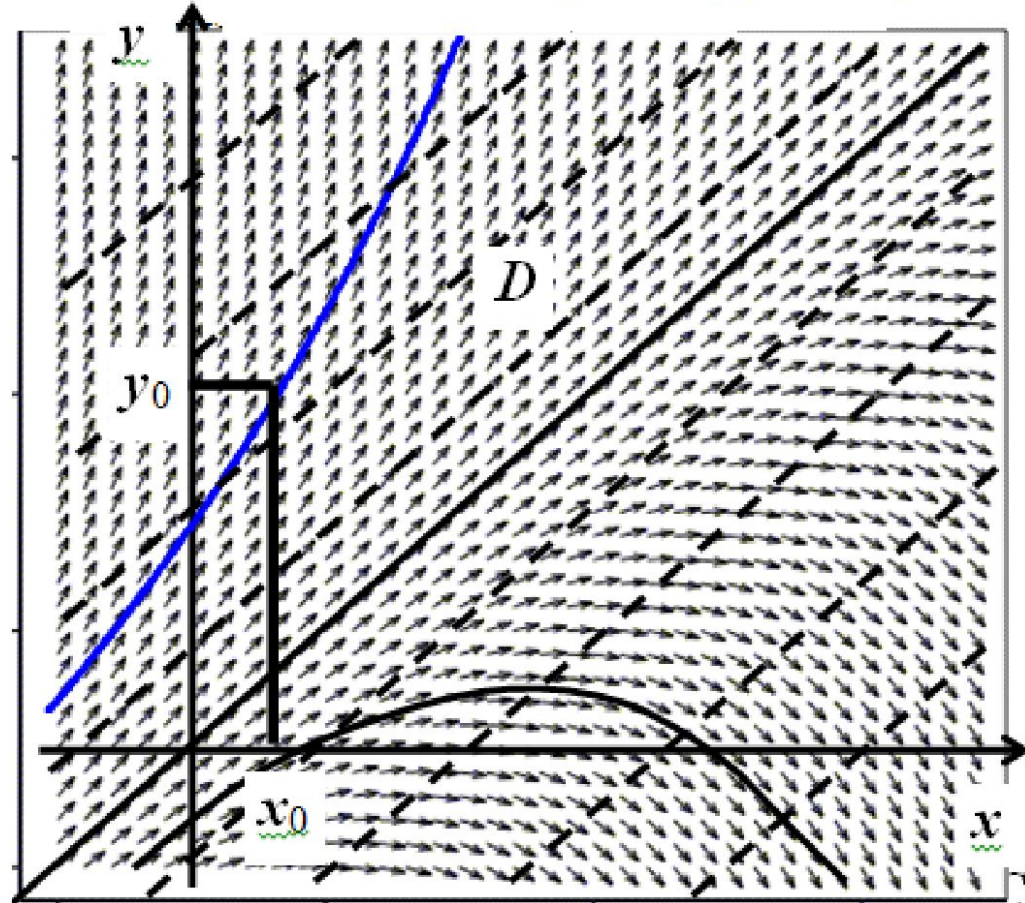
$$y \equiv 0 \text{ — особое решение ДУ.}$$

Геометрический метод решения. Метод изоклин.

Уравнение $y' = f(x, y)$ в каждой точке (x, y) области D , в которой задана функция $f(x, y)$, определяет - угловой коэффициент касательной к решению, проходящему через точку (x, y) , т.е. направление, в котором проходит решение через эту точку.

Говорят, что ДУ задаёт в D поле направлений. График любого решения дифференциального уравнения (**интегральная кривая**) в любой своей точке касается этого поля, т.е. проходит в направлении, определяемом полем.

На рисунке - поле направлений, определяемое уравнением, и три интегральные кривые (три частных решения) этого уравнения.



Метод изоклин.

Для изображения поля направлений, задаваемого дифференциальным уравнением, рассматривают линии уровня функции $f(x, y)$, т.е. геометрические места точек, в которых касательные к интегральным кривым сохраняют постоянное направление.

Такие линии называются **изоклинами**.

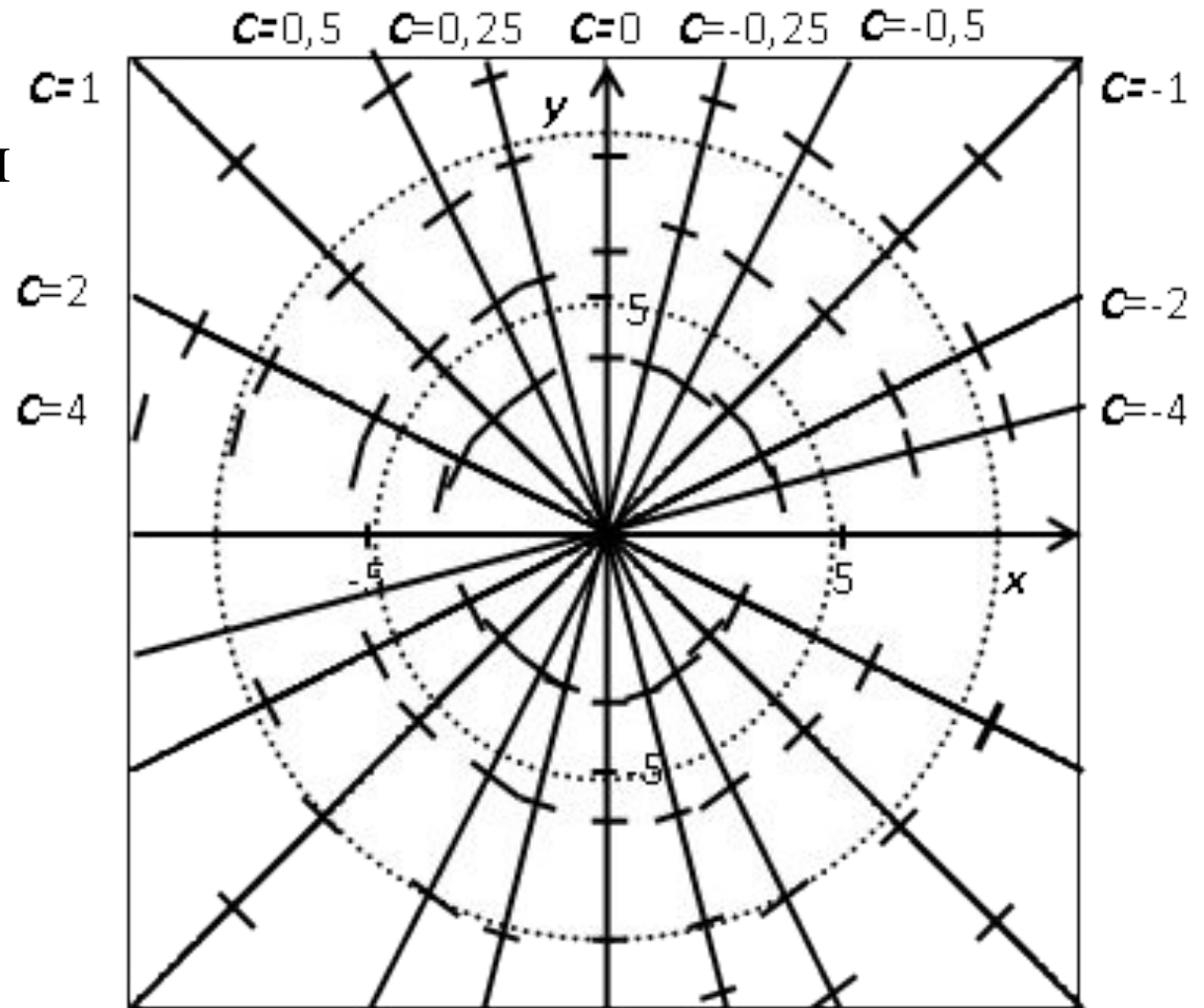
С помощью изоклин можно приближённо изобразить интегральные кривые.

Метод изоклин.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Изоклины – линии
с уравнением

$$-\frac{x}{y} = C$$



Задание к лекции

Смотрим по прикрепленной ссылке видео и конспектируем кратко суть метода изоклин и алгоритм его применения.

<https://www.youtube.com/watch?v=83gQDXfM8wo>