Показательные уравнения

Повторение

Свойства степеней

$$a^0 = 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

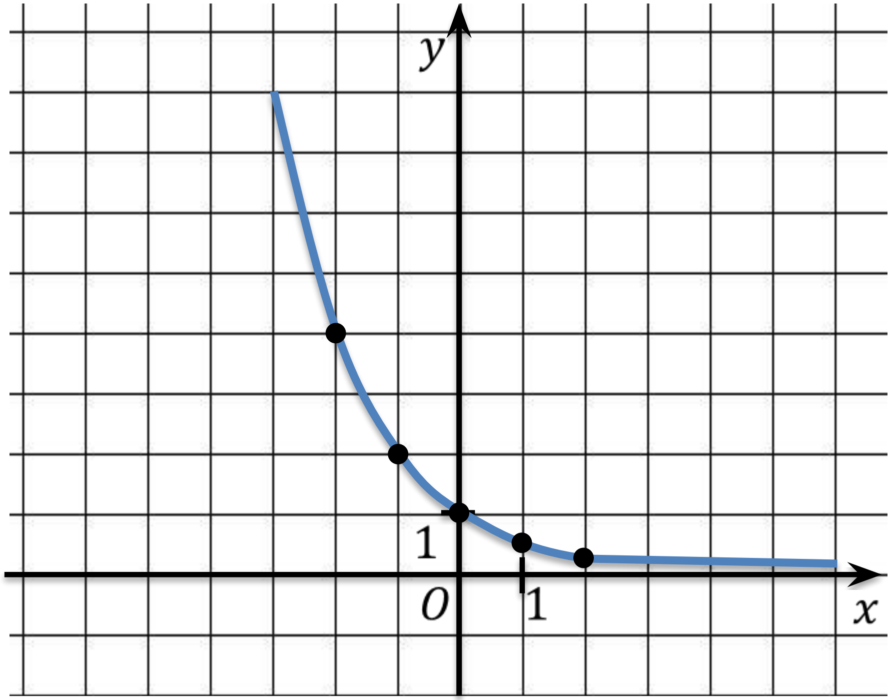
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

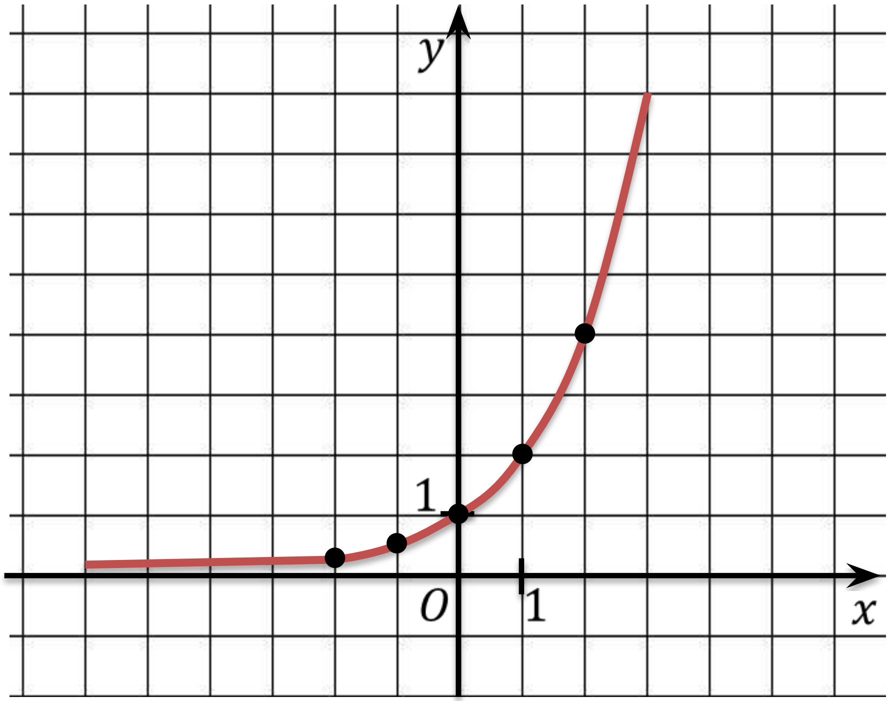
Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **показательной функцией**.

Возрастает	Убывает
Непрерывна	Непрерывна

$$y = a^x, 0 < a < 1$$

$$y = a^x, a > 1$$





Экспонент
а

- **Показательными уравнениями** называют уравнения вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Способы решения:

1. Метод уравнивания показателей (приведение к одному основанию)

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Примеры:

1. $2^x = 32$
   $2^x = 2^5$
   $x = 5$

2. $4^x = \frac{1}{16}$
   $4^x = 4^{-2}$
   $x = -2$

3. $8^x = 16$
   $2^{3x} = 2^4$
   $3x = 4$
   $x = \frac{4}{3}$

4. $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5$
   $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = \frac{9}{2}$
   $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-1}$
   $2x + 3 = -1$
   $2x = -4$
   $x = -2$

5. $0{,}2^{x^2-6x+8} = 1$
   $0{,}2^{x^2-6x+8} = 0{,}2^0$
   $x^2 - 6x + 8 = 0$

6. $7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$
   $7^{x-2} = 7^{\frac{2}{3}}$

7. $3^{x-1} \cdot 2^{x-1} = 36$

8. $25^{-1} \cdot 5^x = 125$
   $5^{-2} \cdot 5^x = 125$
   $5^{x-2} = 5^3$

9. $5^{x^2-2x-1} = 25$

Пример:

Решить уравнение $2^x = \frac{1}{64}$.

Решение:

$$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$2^x = 2^{-6}$$

$$x = -6$$

Ответ: $x = -6$.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример:

Решить уравнение $2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{x-3} = \frac{1}{2}$.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Решение:

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{x-3} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{x-3} = 2^{1+\frac{1}{2}+x-3} = 2^{x-1,5}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$2^{x-1,5} = 2^{-1}$$

$$x - 1,5 = -1$$

$$x = 0,5$$

Ответ: $x = 0,5$.

Пример:

Решить уравнение $5^{x^2-2x-1} = \frac{1}{25}$.

Решение:

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$$

$$5^{x^2-2x-1} = 5^{-2}$$

$$x^2 - 2x - 1 = -2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

2.Функционально-графический метод:

Пример:

Решить уравнение $2^x = 3^x$.

Решение:

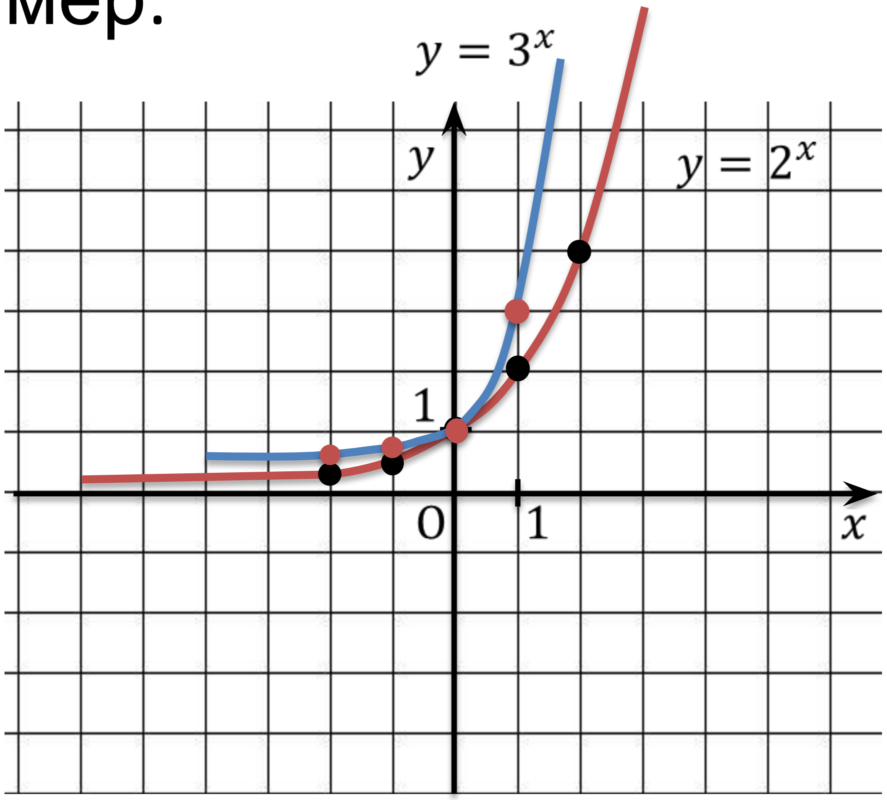
$$\frac{2^x}{2^x} = \frac{3^x}{2^x}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$x = 0$$



3.Метод вынесения общего множителя за скобки.

Пример:

Решить уравнение $3^x - 3^{x+3} = -78$.

Решение:

$3^x - 3^{x+3} = 3^x - 3^x \cdot 3^3 = 3^x - 27 \cdot 3^x = -26 \cdot 3^x$

$-26 \cdot 3^x = -78$

$3^x = 3$

$3^x = 3^1$

$x = 1$

Ответ: $x = 1$.

Пример:

Решить уравнение $7^{x-1} - 6^{2-2x} = 0$.

Решение:

$$\frac{7^x}{7} - \frac{6^2}{6^{2x}} = 0$$

$$\frac{7^x \cdot 6^{2x} - 6^2 \cdot 7}{7 \cdot 6^{2x}} = 0$$

$$7 \cdot 6^{2x} \neq 0 \Rightarrow 7^x \cdot 6^{2x} - 6^2 \cdot 7 = 0$$

$$(7 \cdot 36)^x = 7 \cdot 36$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$

$$6^{2-2x} = 6^{-2(x-1)} = \left(\frac{1}{6^2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{36}\right)^{x-1}$$

$$7^{x-1} - \left(\frac{1}{36}\right)^{x-1} = 0 \Leftrightarrow 7^{x-1} = \left(\frac{1}{36}\right)^{x-1}$$

$$(7 \cdot 36)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow (7 \cdot 36)^{x-1} = (7 \cdot 36)^0$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Пример:

Решить уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \sqrt{\frac{27}{125}}$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$\sqrt{\frac{27}{125}} = \sqrt{\frac{3^3}{5^3}} = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Решите самостоятельно:

Чему равен показатель степени числа 5 в выражении $\dfrac{1}{\sqrt[7]{5^k}}$?

Решите уравнение: $5^x = 125$.

Решите уравнение: $0{,}2^x = \sqrt[7]{0{,}2}$.

Решите показательное уравнение $0{,}2^{-x-3} = 125$.

Решите показательное уравнение $0{,}5^x + 0{,}5^{x+1} = 1{,}5$

4.Метод введения новой переменной.

Пример:

Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$

$y = 2^x$

$y^2 + 2y - 24 = 0$

$D = 4 + 96 = 100 \Rightarrow y_1 = \frac{-2 + 10}{2} = 4;\ y_2 = \frac{-2 - 10}{2} = -6$

$2^x = 4$ или $2^x = -6$ – нет решений

$x = 2$

Основные методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.