



Системы счисления:

продолжение

Лекция 5

Представление действительных чисел

$$S = a_{l-1} a_{l-2} a_{l-3} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-1} \dots (b)$$

$$N(s) = a_{l-1} b^{l-1} + \dots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{1-} + \dots + a_{-i} b^{-i} + \dots = \sum_{i=-\infty}^{l-1} a_i b^i. \quad (5)$$

Если в дробной части числа конечное число знаков k , то нижний индекс суммы равен $-k$.

$$N_f(s) = (a_{-1} + (a_{-2} + (a_{-3} + (\dots) / b) / b) / b) / b, \quad (6)$$

$$0.375 = (3 + (7 + 5/10) / 10) / 10 = (3 + (7 + (5 + 0) / 10) / 10) / 10$$

Связь дробной части числа со значением

$$N_f(s) = (a_{-1} + (a_{-2} + (a_{-3} + (\dots) / b) / b) / b) / b, \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{-k-1} = 0; \\ N_{-i} = (a_{-i} + N_{-i+1}) / b; \quad \text{где } i = k, \dots, 1; \\ N_f(s) = N_{-1}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Примеры

$$\begin{aligned}N(\ll 1.101_{(2)} \gg) &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ &= 1 + 0.5 + 0.125 \\ &= 1.625\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_f(\ll 1.101_{(2)} \gg) &= (1 + (0 + (1 + 0) / 2) / 2) / 2 \\ &= (1 + (0 + 0.5) / 2) / 2 \\ &= (1 + 0.25) / 2 = 0.625\end{aligned}$$

$$N_f(\ll 0.01_{(3)} \gg) = 1 \cdot 3^{-2} = \frac{1}{9} = 0.(1)$$

Целая часть числа $N_f * b$ ($0 < N_f < 1$) равна первой цифре дробной части числа N_f
Алгоритм А4: перевод дробной части из 10-с. с. в b -с.с

Вход: N_f ($0 \leq N_f < 1$), $b > 1$;

$i := -1$;

цикл

$a_i := [N_f \cdot b^i]$; (взятие целой части числа)

$N_f := N_f \cdot b - a_i$; (остается N_f в том же диапазоне)

$i := i + 1$;

пока $N_f \neq 0$;

$k := i$;

Выход: набор a_i, k (число значащих цифр).

Алгоритм А4 может не завершиться, если данное число не представимо конечной дробью в b -с.с

Требуется k умножений (выражение $N_f * b$ можно вычислять в цикле один раз и хранить в промежуточной переменной).

Пример:

$$0.375 = (3 + (7 + 5 / 10) / 10) / 10 = (3 + (7 + (5 + 0) / 10) / 10) / 10$$

$$N_f = 0.375; N_{-1} = 0.375;$$

$$0.375 * 2 = 0.75; N_{-2} = 0.75; a_{-1} = 0;$$

$$0.75 * 2 = 1.5; N_{-3} = 0.5; a_{-2} = 1;$$

$$0.5 * 2 = 1.0; N_{-4} = 0; a_{-3} = 1;$$

$$0.375_{(10)} = 0.011_{(2)}$$

$$1/4 + 1/8 = 3/8 = 0.375$$

Теорема Т2

Несократимая дробь p/q **конечно представима** в системе счисления с основанием b в том и только в том случае, когда все числа из разложения q на простые множители входят в такое же разложение b (количество повторений не учитывается).

Пример

$121/675$ конечна в 15-с.с.:

$$675 = 3^3 * 5^2; \quad 15 = 3 * 5;$$

$$1/675 = 5 * 15^{-3} = 0.005_{(15)};$$

$$121 * 5 / 15^{-3} = (2 * 15^2 + 10 * 15^1 + 5) / 15^{-3} = 2 / 15^{-1} + 10 / 15^{-2} + 5 / 15^{-3}$$

$$121/675 = 0.2A5_{(15)};$$

$1/10$ бесконечна в 2-с.с. !!!!

Алгоритм А5: (перевод дробной части из b -с.с. в 10-с.с)

Вход: $b > 1, k > 0$ (число дробных цифр), набор a_i
 $N_f := 0; S := 1$ (S накапливает степень, a_i — значение)
цикл по i от -1 вниз до $-k$

$$N_f := N_f + a_i \cdot S;$$

$$S := S / b$$

конец цикла

Выход: N_f

- $2k$ операций $*$, $/$
- k операций $+$

Алгоритм А6:

перевод дробной части из b -с.с. в 10 -с.с.

(из формулы (7) по схеме Горнера)

Вход: $b > 1$, $k > 0$ (число цифр), набор a_i

$N_f := 0$;

цикл по i от $-k$ до -1

$N_f := (a_i + N_f) / b$

конец цикла;

Выход: N_f

k операций $+$ и $/$

Число N в b -с.с. имеющее k дробных цифр, при умножении на b^k становится целым (это умножение соответствует сдвигу точки на k позиций вправо)

Алгоритм А7

- найти целое $N_1 = N * b_1^k$ (умножением или сдвигом точки);
- выполнить для N_1 один из алгоритмов А1 или А2, затем А3;
- разделить полученный результат на b_1^k в системе b_2

Пример

Перевести $101.101_{(2)}$ в 10-с.с.

1) умножим на $2^3 \rightarrow 101101_{(2)}$

2) переведем в 10-с.с. $\rightarrow 45$

3) разделим: $45/8 = 5.625_{(10)}$

$$101.101 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3} = 5 + 1/2 + 1/8 = 5.625$$

Кратные системы счисления

Если основания двух систем счисления b_1 и b_2 связаны соотношением $b_2 = b_1^m$ для некоторого натурального m , то такие системы счисления называются *кратными*.

Перевод числа из одной с. с. в другую для таких систем можно выполнить проще.

Сгруппируем цифры в b_1 -записи числа по m от точки влево и вправо (добавив при нехватке цифр нужное количество незначащих нулей):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \boxed{0} \cdot a_k & \dots & \boxed{a_{im}} \boxed{a_{im-1}} \dots \boxed{a_{im}} & \dots & \boxed{a_m} \dots \boxed{a_0} & \cdot & \boxed{a_{-m}} \dots \boxed{a_{-m}} & \dots & \boxed{a_{-m}} \dots \boxed{a_{-m}} & \dots & \boxed{a_{-jm}} \dots \boxed{a_{-jm}} & \dots & \boxed{a_{-jm}} \dots \boxed{a_{-jm}} \\
 \boxed{0} & & \boxed{a_{im}} \boxed{a_{im-1}} \dots \boxed{a_{im}} & & \boxed{a_m} \dots \boxed{a_0} & & \boxed{a_{-m}} \dots \boxed{a_{-m}} & & \boxed{a_{-m}} \dots \boxed{a_{-m}} & & \boxed{a_{-jm}} \dots \boxed{a_{-jm}} & & \boxed{a_{-jm}} \dots \boxed{a_{-jm}} \\
 A'_k & & A_i & & A_0 & & A_{-1} & & & & A_{-j} & &
 \end{array}$$

затем также сгруппируем слагаемые в формуле (5) (они содержат множитель b_1 в степени, равной индексу цифры), вынесем за скобки из каждой группы i общий множитель

$$(b_1^{im} = (b_1^m)^i = b_2^i)$$

и обозначим для каждой группы

$$A_i = a_{im+m-1}b_1^{m-1} + a_{im+m-2}b_1^{m-2} + \dots + a_{im+1}b_1^1 + a_{im}b_1^0 \quad (8)$$

Тогда значение исходного числа может быть представлено в виде:

$$N(S') = A_{k'} * b_2^{k'} + \dots + A_i * b_2^i + \dots + A_0 * b_2^0 + A_{-1} * b_2^{-1} + \dots A_{-j} b_2^{-j},$$

что по определению совпадает со значением записи того же числа в b_2 -с.с. с цифрами A_i , если заметить, что A_i действительно могут принимать все значения от 0 до $b_1^m - 1 = b_2 - 1$.

Таблицы соответствия последовательностей цифр кратных с.с.

9-с.с.	3-с.с.
0	00
1	01
2	02
3	10
4	11
5	12
6	20
7	21
8	22

8-с.с.	2-с.с.
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

16-с.с.	2-с.с.
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Алгоритм А8: перевод из меньшей кратной с.с. в большую

Вход: $b_1 > 1$, $b_2 = b_1^m$, b_1 - представление числа;

- разбить число на группы по m цифр, начиная от точки, в обе стороны (если в крайних группах цифр меньше m , добавить незначащие нули: в целой части спереди, в дробной сзади);
- заменить каждую группу b_2 -цифрой по формуле (8) или таблице.

Выход: b_2 -представление исходного числа.

Алгоритм А9: перевод из большей кратной с.с. в меньшую

Вход: $b_1 > 1$, $b_2 = b_1^m$; b_2 -представление числа;

- заменить каждую b_2 -цифру цепочкой из m b_1 -цифр по формуле (8) или таблице;
- отбросить незначащие нули слева и справа.

Выход: b_1 -представление исходного числа.

Универсальные алгоритмы для арифметических операций

- Все так называемые *численные* алгоритмы для арифметических операций сложения, вычитания, умножения и деления (в том числе, вычисления «столбиком») являются *символьными*, потому что оперируют входными, выходными и промежуточными данными как строками символов.
- Символьные вычисления являются *формальными* в том смысле, что манипулируют только знаками, не обращаясь к их значениям.
- *Абстрагирование* от смысла данных различной природы и описание алгоритма в терминах чисто символьных преобразований является одним из основных методов программирования обработки данных произвольной природы

Алгоритм А10: сложение двух чисел

Вход: две строки цифр, представляющие слагаемые;

- **выравнивание:** расположить слагаемые одно под другим в произвольном порядке так, чтобы разряды с одинаковым весом находились друг под другом; если какое-то число короче других слева или справа, дополнить его нулями;
- **начальные установки:**
 - обнулить цифру переноса в следующий разряд;
 - установить результат равным пустой строке;
- **ЦИКЛ** по текущему разряду от младшего до старшего:
 - определить сумму переноса и цифр в столбце текущего разряда чисел;
 - младшую цифру суммы записать в текущий разряд результата, старшую — в перенос;
 - конец цикла;*
- **окончание:** если перенос не равен 0, то дописать перенос в начало результата

Выход: строка, представляющая результат.

Единственное место в этом алгоритме, где присутствует обращение к значениям цифровых символов, — это поразрядное сложение в цикле.

Действительно, из одного лишь вида знаков «2» и «3» нельзя извлечь информацию, что результатом их сложения будет знак «5». Эти сведения можно задать, например, двумя таблицами сложения: в одной для каждой пары цифр записать младшую цифру результата, в другой — цифру переноса («0» или «1»); исчерпав таким образом все немногочисленные случаи, можно заменить операцию сложения значений операцией выборки знака из таблицы.

Чтобы учесть сложение с переносом, можно завести две пары таблиц или записать в каждую клетку по две цифры.

Алгоритм A10 замечателен тем, что применим к произвольной позиционной с. с. при соответствующей замене таблиц сложения.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

++	0	1
0	0	0
1	0	1

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Затраты памяти на хранение чисел и времени на выполнение операций с ними зависят от длины записи числа в цифрах рабочей системы счисления.

Для заданной b -с. с. следующие величины:

k_n — длина записи (натурального) числа N ,

N_k — максимальное натуральное число, записываемое k цифрами, связаны соотношениями:

$$k_n = [\log_b N] + 1, \quad \text{где } [x] \text{ — наибольшее целое, не превышающее } x;$$
$$N_k = b^k - 1.$$

Верхние оценки для размера результата арифметической операции над парой целых чисел N_1 и N_2 (пусть $N_1 > N_2$):

для сложения и вычитания — $k_{N_1} + 1$,

для умножения — $k_{N_1} + k_{N_2}$,

для деления — $k_{N_1} + 1$, (так как $N_2 > 1$).