



# Коммутативность операторов Дункла

Сибряева Екатерина  
МИнф 51

Докажем, что семейство  $\{T_\xi\}_{\xi \in V}$  операторов Дункла является коммутативным относительно композиции.

**Теорема 4.** Для произвольных ненулевых векторов  $\xi, \eta \in V$  соответствующие операторы Дункла коммутируют:

$$T_\xi T_\eta = T_\eta T_\xi.$$

**Доказательство.** Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & T_\xi T_\eta - T_\eta T_\xi = \\ & = \left( \partial_\xi + \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha | \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} \right) \left( \partial_\eta + \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) - \\ & - \left( \partial_\eta + \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) \left( \partial_\xi + \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha | \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} \right), \end{aligned}$$

которую перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 T_\xi T_\eta - T_\eta T_\xi &= (\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi) + \\
 &+ \partial_\xi \left( \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) - \left( \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) \partial_\xi - \\
 &- \partial_\eta \left( \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha | \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} \right) + \left( \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha | \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} \right) \partial_\eta + \\
 &+ \left( \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha | \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} \right) \left( \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) - \\
 &- \left( \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) \left( \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha | \xi) \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} \right).
 \end{aligned}$$

Очевидно  $\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi = 0$ . Далее,  
 преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
 & \partial_\xi \left( \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) - \left( \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) \partial_\xi = \\
 & = \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \partial_\xi \left( \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) - \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \partial_\xi = \\
 & = \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \left( \partial_\xi \left( \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \right) - \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \partial_\xi \right) = \\
 & = \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \left( -\frac{(\xi | \beta)}{(x | \beta)^2} (1 - s_\beta) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(x | \beta)} (\partial_\xi (1 - s_\beta) - (1 - s_\beta) \partial_\xi) \right) = \\
 & = \sum_{\beta \in R_+} k_\beta(\beta | \eta) \left( -\frac{(\xi | \beta)}{(x | \beta)^2} (1 - s_\beta) - \frac{1}{(x | \beta)} (\partial_\xi s_\beta - s_\beta \partial_\xi) \right).
 \end{aligned}$$

Из эквивариантности оператора  $\nabla$   
вытекает, что

$$\partial_\xi s_\beta - s_\beta \partial_\xi = -\frac{2s_\beta \partial_\beta}{(\beta | \beta)} (\beta | \xi).$$

Поэтому рассматриваемая разность может  
быть преобразована к выражению

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \in R_+} k_\beta (\beta | \eta) \left( -\frac{(\xi | \beta)}{(x | \beta)^2} (1 - s_\beta) + \frac{1}{(x | \beta)} \frac{2\partial_\beta}{(\beta | \beta)} (\beta | \xi) \right) = \\ & = -\sum_{\beta \in R_+} k_\beta \frac{(\beta | \eta)(\beta | \xi)}{(x | \beta)^2} (1 - s_\beta) + \sum_{\beta \in R_+} k_\beta \frac{(\beta | \eta)(\beta | \xi)}{(x | \beta)(\beta | \beta)} 2\partial_\beta, \end{aligned}$$

которое симметрично относительно векторов  $\xi$  и  $\eta$ . Но это означает, что к такому же выражению может быть приведена и разность

$$\partial_{\eta} \left( \sum_{\alpha \in R_+} k_{\alpha}(\alpha | \xi) \frac{1 - s_{\alpha}}{(x | \alpha)} \right) - \left( \sum_{\alpha \in R_+} k_{\alpha}(\alpha | \xi) \frac{1 - s_{\alpha}}{(x | \alpha)} \right) \partial_{\eta}.$$

Таким образом, получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} T_{\xi} T_{\eta} - T_{\eta} T_{\xi} &= \left( \sum_{\alpha \in R_+} k_{\alpha}(\alpha | \xi) \frac{1 - s_{\alpha}}{(x | \alpha)} \right) \left( \sum_{\beta \in R_+} k_{\beta}(\beta | \eta) \frac{1 - s_{\beta}}{(x | \beta)} \right) - \\ &- \left( \sum_{\beta \in R_+} k_{\beta}(\beta | \eta) \frac{1 - s_{\beta}}{(x | \beta)} \right) \left( \sum_{\alpha \in R_+} k_{\alpha}(\alpha | \xi) \frac{1 - s_{\alpha}}{(x | \alpha)} \right). \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть последнего равенства:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha, \beta \in R_+} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi) (\beta | \eta) \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} \cdot \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} - \\
 & - \sum_{\beta, \alpha \in R_+} k_\beta k_\alpha (\beta | \eta) (\alpha | \xi) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \cdot \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} = \\
 & = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi) (\beta | \eta) \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} \cdot \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} - \\
 & - \sum_{\substack{\beta, \alpha \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta | \eta) (\alpha | \xi) \frac{1 - s_\beta}{(x | \beta)} \cdot \frac{1 - s_\alpha}{(x | \alpha)} =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi)(\beta | \eta) \left( \frac{1 - s_\beta}{(x | \alpha)(x | \beta)} - \frac{s_\alpha - s_\alpha s_\beta}{(x | \alpha)(s_\alpha x | \beta)} \right) -$$

$$- \sum_{\substack{\beta, \alpha \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta | \eta)(\alpha | \xi) \left( \frac{1 - s_\alpha}{(x | \beta)(x | \alpha)} - \frac{s_\beta - s_\beta s_\alpha}{(x | \beta)(s_\beta x | \alpha)} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi)(\beta | \eta) \left( \frac{-s_\beta}{(x | \alpha)(x | \beta)} - \frac{s_\alpha - s_\alpha s_\beta}{(x | \alpha)(s_\alpha x | \beta)} \right) -$$

$$- \sum_{\substack{\beta, \alpha \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta | \eta)(\alpha | \xi) \left( \frac{-s_\alpha}{(x | \beta)(x | \alpha)} - \frac{s_\beta - s_\beta s_\alpha}{(x | \beta)(s_\beta x | \alpha)} \right) =$$

$$= \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 ,$$



где

$$\Omega_1 = - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi)(\beta | \eta) \frac{s_\beta}{(x | \alpha)(x | \beta)} +$$
$$+ \sum_{\substack{\beta, \alpha \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta | \eta)(\alpha | \xi) \frac{s_\beta}{(x | \beta)(s_\beta x | \alpha)},$$

$$\Omega_2 = - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi)(\beta | \eta) \frac{s_\alpha}{(x | \alpha)(x | \beta)} +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta, \alpha \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta | \eta)(\alpha | \xi) \frac{s_\alpha}{(x | \alpha)(s_\alpha x | \beta)},$$

$$\Omega_3 = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi)(\beta | \eta) \frac{s_\alpha s_\beta}{(x | \alpha)(s_\alpha x | \beta)} -$$

$$- \sum_{\substack{\beta, \alpha \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta | \eta)(\alpha | \xi) \frac{s_\beta s_\alpha}{(s_\beta x | \alpha)(x | \beta)}.$$

Рассмотрим сумму  $\Omega_1$ , которую преобразуем, пользуясь инвариантностью скалярного произведения относительно действия группы Коксетера.

Получаем

$$\Omega_1 = - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi)(\beta | \eta) \frac{s_\beta}{(x | \alpha)(x | \beta)} +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta, \alpha \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} k_\beta k_\alpha (\beta | \eta)(s_\beta \alpha | s_\beta \xi) \frac{s_\beta}{(x | \beta)(x | s_\beta \alpha)}.$$

Ясно, что при фиксированном  $\beta$  найдется единственный положительный корень  $\alpha'$ , такой что  $s_\beta \alpha = \pm \alpha'$ . Замечая, что во второй сумме корень  $s_\beta \alpha$  находится в числителе и знаменателе, имеем

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi) (\beta | \eta) \frac{s_\beta}{(x | \alpha)(x | \beta)} + \\
 &+ \sum_{\substack{\beta, \alpha' \in R_+ \\ \beta \neq \alpha'}} k_\beta k_{\alpha'} (\beta | \eta) (\alpha' | s_\beta \xi) \frac{s_\beta}{(x | \beta)(x | \alpha')} = \\
 &= - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi) (\beta | \eta) \frac{s_\beta}{(x | \alpha)(x | \beta)} + \\
 &+ \sum_{\substack{\beta, \alpha' \in R_+ \\ \beta \neq \alpha'}} k_\beta k_{\alpha'} (\beta | \eta) \left( \alpha' | \xi - \frac{2(\xi | \beta)}{(\beta | \beta)} \beta \right) \frac{s_\beta}{(x | \beta)(x | \alpha')} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi) (\beta | \eta) \frac{s_\beta}{(x | \alpha)(x | \beta)} + \\
&+ \sum_{\substack{\beta, \alpha' \in R_+ \\ \beta \neq \alpha'}} k_\beta k_{\alpha'} (\beta | \eta) (\alpha' | \xi) \frac{s_\beta}{(x | \beta)(x | \alpha')} - \\
&- \sum_{\substack{\beta, \alpha' \in R_+ \\ \beta \neq \alpha'}} k_\beta k_{\alpha'} \frac{2(\beta | \eta)(\xi | \beta)(\beta | \alpha')}{(\beta | \beta)} \cdot \frac{s_\beta}{(x | \beta)(x | \alpha')}.
\end{aligned}$$

Заменяя  $\alpha'$  на  $\alpha$ , окончательно получаем,  
что

$$\Omega_1 = - \sum_{\substack{\beta, \alpha \in R_+ \\ \beta \neq \alpha}} k_\beta k_\alpha \frac{2(\beta | \eta)(\xi | \beta)(\beta | \alpha)}{(\beta | \beta)} \cdot \frac{s_\beta}{(x | \beta)(x | \alpha)}.$$

Аналогичные рассуждения показывают,  
что

$$\Omega_2 = - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta \frac{2(\alpha | \eta)(\xi | \alpha)(\alpha | \beta)}{(\alpha | \alpha)} \cdot \frac{s_\alpha}{(x | \alpha)(x | \beta)}.$$

Меняя в последней сумме  $\alpha$  на  $\beta$  и  $\beta$  на  $\alpha$ , получаем  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

Покажем, что  $\Omega_3 = 0$ . В самом деле, меняя во второй сумме  $\alpha$  на  $\beta$  и  $\beta$  на  $\alpha$ , и пользуясь инвариантностью скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\alpha | \xi)(\beta | \eta) \frac{s_\alpha s_\beta}{(x | \alpha)(x | s_\alpha \beta)} - \\ &\quad - \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta (\beta | \xi)(\alpha | \eta) \frac{s_\alpha s_\beta}{(x | \alpha)(x | s_\alpha \beta)} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \neq \beta}} k_\alpha k_\beta \frac{(\alpha | \xi)(s_\alpha \beta | s_\alpha \eta) - (s_\alpha \beta | s_\alpha \xi)(\alpha | \eta)}{(x | \alpha)(x | s_\alpha \beta)} s_\alpha s_\beta . \end{aligned}$$

По тем же причинам, что и выше вместо  $s_\alpha \beta$  можно писать  $\beta'$  и считать, что  $\beta'$  — положительный корень. И тогда, поскольку

$$s_\alpha s_\beta = s_{s\alpha}^\beta s_\alpha,$$

$$\Omega_3 = \sum_{\substack{\alpha, \beta' \in R_+ \\ \alpha \neq \beta'}} k_\alpha k_{\beta'} \frac{(\alpha | \xi)(\beta' | s_\alpha \eta) - (\beta' | s_\alpha \xi)(\alpha | \eta)}{(x | \alpha)(x | \beta')} s_{\beta'} s_\alpha =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha, \beta' \in R_+ \\ \alpha \neq \beta'}} k_\alpha k_{\beta'} \frac{(\alpha | \xi)(\beta' | \eta) - (\beta' | \xi)(\alpha | \eta)}{(x | \alpha)(x | \beta')} s_{\beta'} s_\alpha =$$

$$= \sum_{w \in W_R} w \sum_{\substack{\alpha, \beta' \in R_+ \\ \alpha \neq \beta' \\ s_{\beta'} s_\alpha = w}} k_\alpha k_{\beta'} \frac{(\alpha | \xi)(\beta' | \eta) - (\beta' | \xi)(\alpha | \eta)}{(x | \alpha)(x | \beta')}.$$



Но внутренняя сумма в  $\Omega_3$  равна нулю в силу леммы 2.1, где форма

$$B(\alpha, \beta) = (\alpha | \xi)(\beta | \eta) - (\beta | \xi)(\alpha | \eta).$$

Итак, для произвольных  $\xi, \eta$

$$T_\xi T_\eta - T_\eta T_\xi = 0.$$

**Теорема доказана!**



Спасибо за внимание