Алгебра высказываний

Из высказываний путем соединения их различными способами (с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно») можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется истинностно-функциональным комбинациям, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

Определение. *Отрицанием высказывания* A называется высказывание $\neg A$ (читается «не A»), которое истинно в том и только том случае, если высказывание A ложно.

Таблица истинностных значений операции отрицания

A	$\neg A$
1	0
0	1

Определение. *Конъюнкцией высказываний* A, B называется высказывание $A \wedge B$ (читается «A и B»), которое истинно в том и только том случае, если оба высказывания A, B истинны.

Дизъюнкцией высказываний A, B называется высказывание $A \vee B$ (читается «A или B»), которое ложно в том и только том случае, если оба высказывания A, B ложны.

Импликацией высказываний A, B называется высказывание $A \Rightarrow B$ (читается «A влечет B»), которое ложно в том и только том случае, если высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

Эквивалентностью высказываний A, B называется высказывание $A \Leftrightarrow B$ (читается «A равносильно B»), которое истинно в том и только том случае, если высказывания A и B имеют одинаковое истинностное значение.

Таблица истинностных значений логических операций.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Определение. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний **P** с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Формулы алгебры высказываний

Свойства алгебры высказываний **P** описываются с помощью формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы принято называть также *пропозициональными формулами*

Символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, которые называются *пропозициональными связками.*

Переменные символы $X, Y, Z, \dots$, которые используются для обозначения высказываний, называются *пропозициональными переменными.*

Определение. *Формулы* алгебры высказываний индуктивно определяются по правилам:

1) каждая пропозициональная переменная является формулой,
2) если Φ, Ψ – формулы, то формулами являются также выражения

$$(\neg\Phi),\ (\Phi \wedge \Psi),\ (\Phi \vee \Psi),\ (\Phi \Rightarrow \Psi),\ (\Phi \Leftrightarrow \Psi).$$

Множество всех формул алгебры высказываний обозначим $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$.

Для упрощения записи формул скобки в них по возможности опускаются с учетом следующего **приоритета выполнения логических операций**: $\neg, \wedge, \vee$ и остальные.

Так, формула

$$\left(\left(\left((\neg X)\wedge(\neg Y)\right)\vee\left(\neg(\neg Z)\right)\right)\Rightarrow\left(X\vee(\neg Y)\right)\right)$$

сокращенно записывается в виде

$$\neg X\wedge\neg Y\vee\neg\neg Z\Rightarrow X\vee\neg Y.$$

Если в формулу Φ входят переменные $X_1,\ldots,X_n$, то записывают $\Phi=\Phi(X_1,\ldots,X_n)$.

Из индуктивного определения формул следует, что если в формулу Φ вместо переменных $X_1,\ldots,X_n$ подставить произвольные конкретные высказывания $A_1,\ldots,A_n$, то получится некоторое сложное высказывание $\Phi(A_1,\ldots,A_n)$.

Истинностное значение высказывания $\lambda(\Phi(A_1,\ldots,A_n))$ определяется истинностными значениями исходных высказываний $\lambda(A_1),\ldots,\lambda(A_n)$ согласно таблицам истинностных значений логических операций $\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow$.

Формула Ф определяет функцию n переменных F_{Φ}, которая каждому упорядоченному набору $(\lambda(X_1),\ldots,\lambda(X_n))$ n элементов множества $\{0,1\}$ ставит в соответствие элемент $\lambda(\Phi(X_1,\ldots,X_n))$ этого же множества.

Функция F_{Φ} называется *истинностной функцией формулы* Ф и графически представляется *истинностной таблицей*.

Такая таблица содержит 2^n строк и имеет одно из 2^{2^n} возможных распределений значений 0 и 1 в последнем столбце.

Пример. **Формула** $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$ имеет следующую истинностную таблицу:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	$X \vee \neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Пример. Составим таблицу истинности для формулы

$$(P \overset{1}{\Rightarrow} Q) \overset{5}{\Leftrightarrow} (\overset{2}{\neg} Q \overset{4}{\Rightarrow} \overset{3}{\neg} P)$$

P	Q	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Таблица показывает, что, какого бы истинностного значения высказывания ни подставлялись в данную формулу вместо пропозициональных переменных P и Q, формула всегда превращается в истинное высказывание. Значит, формула – тавтология.

Определение. Формула Ф называется:

– *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается $\models Ф$, если ее истинностная функция тождественно равна 1;

– *противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0;

– *выполнимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 0;

– *опровержимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 1.

Тавтологии являются общими схемами построения истинных высказываний и в этом смысле выражают некоторые *логические законы*.

Примеры таких законов являются:

$\models X \vee \neg X$ – закон исключенного третьего,

$\models \neg\neg X \Leftrightarrow X$ – закон двойного отрицания,

$\models \neg(X \wedge \neg X)$ – закон противоречия,

$\models (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ – закон контрапозиции.

Новые тавтологии можно получить с помощью следующего правила.

Правило подстановки:

если $\models \Phi(X_1,\ldots,X_n)$, то для любых формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ тавтологией является формула $\Phi(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$.

Логическая равносильность формул

Определение. Формулы Φ, Ψ называются *логически равносильными* (или просто *равносильными*), если $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись $\Phi \cong \Psi$, или просто $\Phi = \Psi$.

Такие выражения называются *логическими равенствами* или просто *равенствами формул.*

Лемма 1. Справедливы следующие равенства формул:

1) $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$, $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$ – свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции;

2) $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$ – свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции;

3) $X \vee X = X$, $X \wedge X = X$ – свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции;

4) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$ – законы де Моргана;

6) $(X \wedge Y) \vee X = X$, $(X \vee Y) \wedge X = X$ – законы поглощения;

7) $\neg\neg X = X$ – закон двойного отрицания;

8) $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$, $X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией и конъюнкцией;

9) $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$, $X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$ – взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией и конъюнкцией.

<u>Лемма (Правило замены).</u> Если формулы Φ, Φ' равносильны, то для любой формулы $\Psi(X)$, содержащей переменную X, выполняется равенство: $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$.

Это правило означает, что при замене в любой формуле $\Psi = \Psi(\Phi)$ некоторой ее подформулы Φ на равносильную ей формулу Φ' получается формула $\Psi' = \Psi(\Phi')$, равносильная исходной формуле Ψ.

Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул*.

Пример.

Формула $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ с помощью равенств 5),7),8) из леммы 1 равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z =$$

$$= \neg(\neg(X \wedge \neg Y)) \vee Z = (X \wedge \neg Y) \vee Z \cdot$$

Нормальные формы формул алгебры высказываний

Отношение равносильности $\cong$ является отношением эквивалентности на множестве всех формул $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$, которое разбивает это множество на классы эквивалентности $[\Phi]=\{\Psi\in F_{AB}:\Phi\cong\Psi\}$, определяемые формулами $\Phi\in F_{AB}$.

Из основных равенств следует, что для каждой формулы $\Phi\in F_{AB}$ можно указать равносильные ей формулы специального вида, содержащие только символы логических операций $\neg,\wedge,\vee$.

Определение. *Литерой* называется пропозициональная переменная X или ее отрицание $\neg X$. Для обозначения литеры используется символ X^{α}, где $\alpha \in \{0,1\}$ и по определению $X^1 = X$, $X^0 = \neg X$.

Определение. *Конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*) называется литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер.

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно КНФ) называется дизъюнкт или конъюнкция дизъюнктов. *Дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ) называется конъюнкт или дизъюнкция конъюнктов.

При этом КНФ (соответственно, ДНФ) называется *совершенной*, если совершенны все ее дизъюнкты (соответственно, конъюнкты).

Теорема 1. Любая формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

Алгоритм приведения формулы Φ к ДНФ (соответственно, к КНФ):

1) выражаем все входящие в формулу Φ импликации и эквивалентности через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;

2) согласно законам де Моргана все отрицания, стоящие перед скобками, вносим в эти скобки и сокращаем все двойные отрицания;

3) согласно законам дистрибутивности преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций (соответственно, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше конъюнкций).

<u>Теорема 2.</u> Любая выполнимая формула $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} (X_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем упорядоченным наборам $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющим условию $F_\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 1$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СДНФ) формулы Φ.

Теорема 3. Любая опровержимая формула $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigwedge_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} (X_1^{1-\alpha_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-\alpha_n}),$$

где конъюнкция берется по всем упорядоченным наборам $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющим условию $F_\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) формулы Φ.

Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ формулы $\Phi = \Phi(X_1, \ldots, X_n)$:

1. Составить истинностную таблицу формулы Ф и добавить два столбца «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты».

2. Если при значениях $\lambda(X_1) = k_1, \ldots, \lambda(X_n) = k_n$ значение $\lambda(\Phi(X_1, \ldots, X_n))$ формулы Ф равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкт $X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}$ и в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк. При этом $X_i^1 = X_i$ и $X_i^0 = \neg X_i$.

3. Если при значениях $\lambda(X_1)=m_1,\dots,\lambda(X_n)=m_n$ истинностное значение $\lambda(\Phi(X_1,\dots,X_n))$ формулы Ф равно 0, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкт $X_1^{1-m_1}\vee\dots\vee X_n^{1-m_n}$ и в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк.

X_1	…	X_n	…	$\Phi(X_1,\dots,X_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
…	…	…	…	…	…	…
k_1	…	k_n	…	1	$X_1^{k_1}\wedge\dots\wedge X_n^{k_n}$	–
…	…	…	…	…	…	…
m_1	…	m_n	…	0	–	$X_1^{1-m_1}\vee\dots\vee X_n^{1-m_n}$
…	…	…	…	…	…	…

4. СДНФ формулы Ф равна дизъюнкции полученных совершенных конъюнктов: $(X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}) \vee \ldots$.

5. СКНФ формулы Ф равна конъюнкции полученных совершенных дизъюнктов: $(X_1^{1-m_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-m_n}) \wedge \ldots$.

Пример. Для формулы $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \Leftrightarrow X \vee \neg Y)$ получаем таблицу:

X	Y	Ф	СДНФ	СКНФ
0	0	1	$\neg X \wedge \neg Y$	-
0	1	1	$\neg X \wedge Y$	-
1	0	0	-	$\neg X \vee Y$
1	1	0	-	$\neg X \vee \neg Y$

СДНФ данной формулы Ф в виде дизъюнкции совершенных конъюнктов:

$$\Phi = (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y).$$

СКНФ данной формулы Ф в виде конъюнкции совершенных дизъюнктов:

$$\Phi = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y).$$

Пример. Найдем СДНФ и СКНФ для формулы

$$\Phi(X,Y,Z) = \neg(X \wedge Y) \Rightarrow \neg(X \vee Z)$$

X	Y	Z	Φ (X,Y,Z)	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
0	0	0	1	$X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^0$	–
0	0	1	0	–	$X^1 \vee Y^1 \vee Z^0$
0	1	0	1	$X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	–
0	1	1	0	–	$X^1 \vee Y^0 \vee Z^0$
1	0	0	0	–	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^1$
1	0	1	0	–	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^0$
1	1	0	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	–
1	1	1	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^1$	–

$$\Phi(X,Y,Z) = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z).$$

$$\Phi(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z).$$