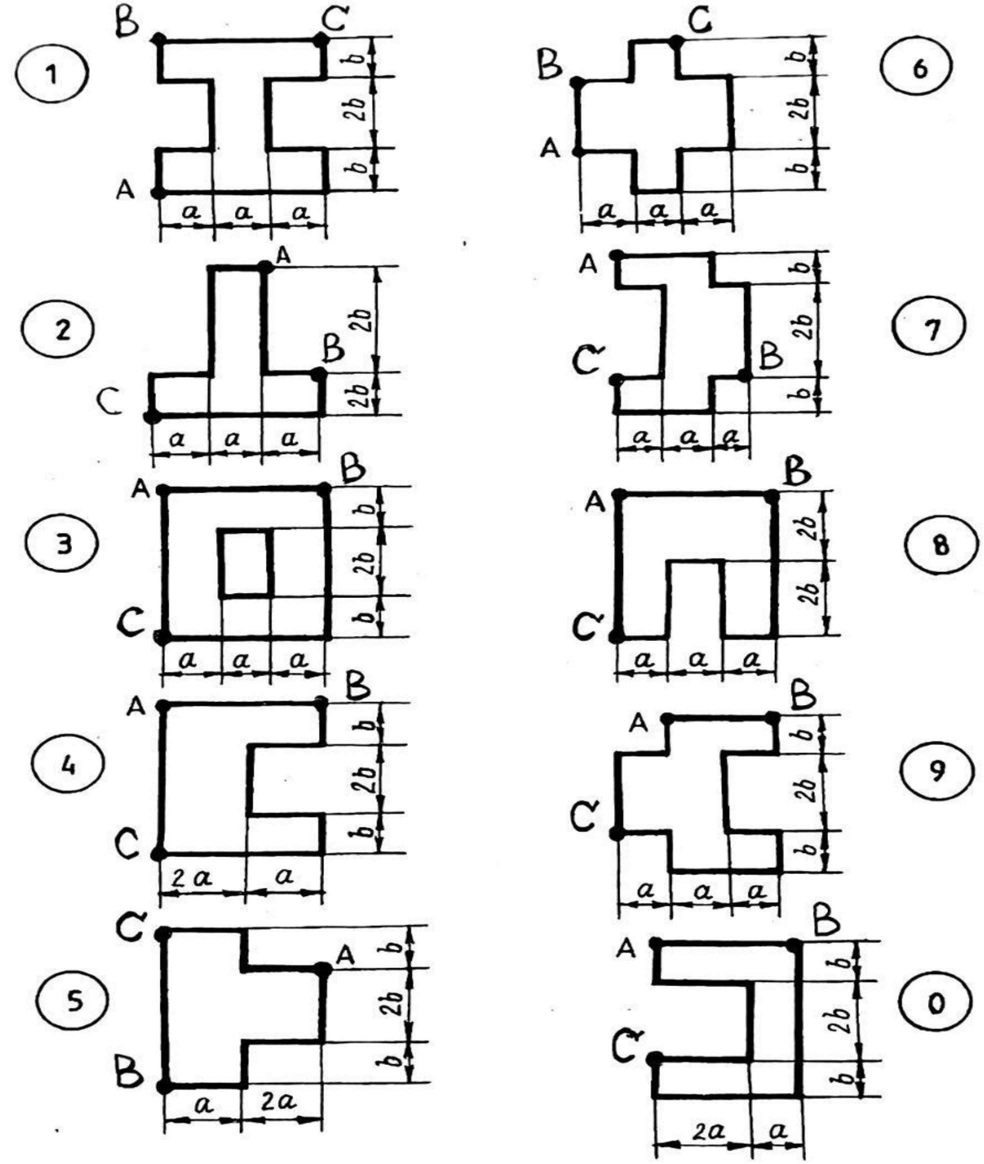
Расчетно-графическая работа №1

Построить эллипс инерции в заданной точке



B-91 : a=2см   B-92 : a=4 см

Рис. 1

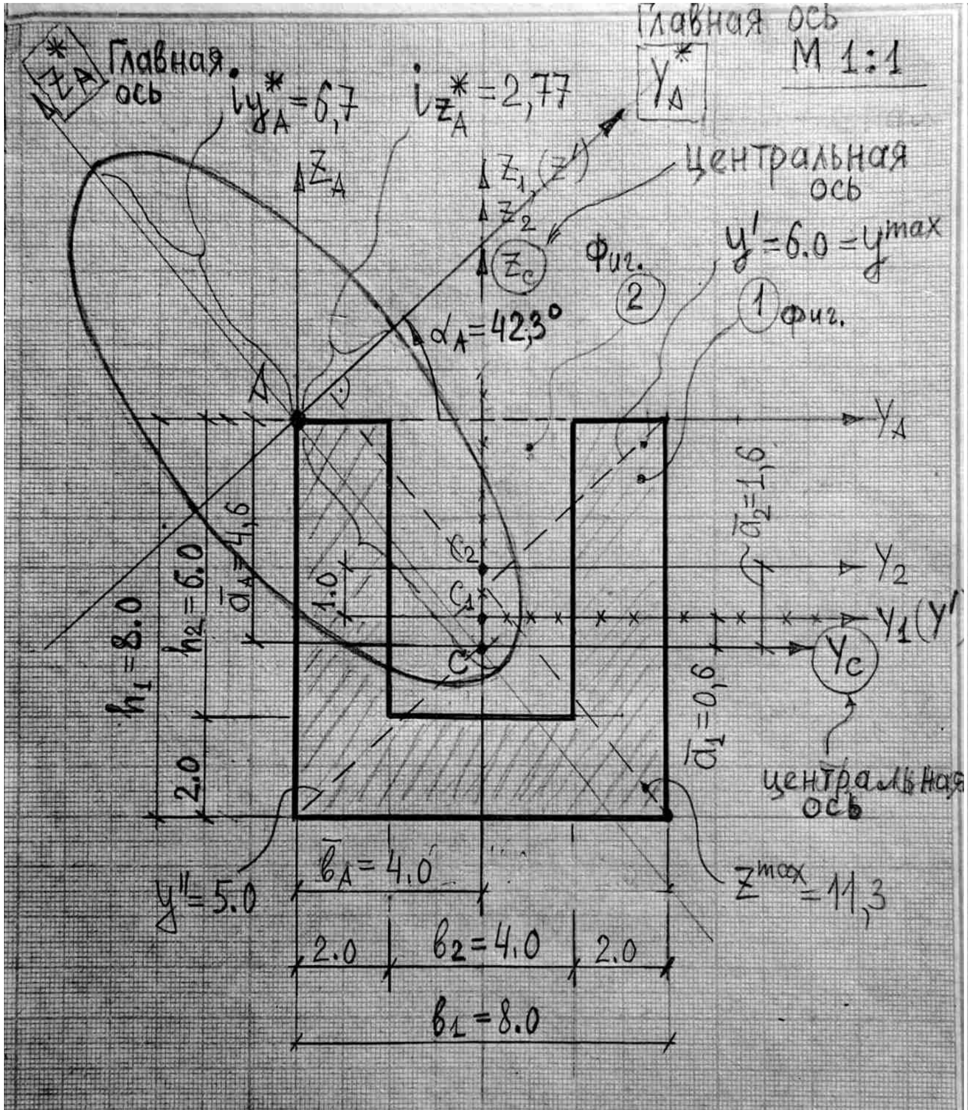


Рис.1

Пример расчёта сложного сечения (геометрические характеристики). РГР-1.

Для заданного сложного сечения (квадрат с прямоугольным вырезом) построить эллипс инерции в т. A.

1). Определяем координаты центра тяжести:

$$y_c = \frac{\sum S_{z'}}{\sum A} = \frac{0}{40} = 0;$$

$$z_c = \frac{\sum S_{y'}}{\sum A} = \frac{-24}{40} = -0{,}6 \text{ (см)}$$

выбираем вспомогательные оси z' и y', совпадающие с осями фиг. 1.

$$A = \sum A = A_1 - A_2 = h_1 \cdot b_1 - h_2 \cdot b_2 = 8\cdot 8 - 6\cdot 4 = 64 - 24 = 40 \text{ (см}^2)$$

$A_1 = 64$ см^2
$A_2 = 24$ см^2

$$\sum S_{z'} = S_{z'}^{(1)} - S_{z'}^{(2)} = A_1 \cdot 0 - A_2 \cdot 0 = 0$$

$$\sum S_{y'} = S_{y'}^{(1)} - S_{y'}^{(2)} = A_1 \cdot 0 - A_2 \cdot 1.0 = 0 - 24 \cdot 1 = -24 \text{ (см}^3)$$

2). Определяем осевые моменты инерции относительно центральных осей y_c и z_c:

$$J_{y_c}^{соб.} = J_{y_c}^{(1)} - J_{y_c}^{(2)} = 364{,}37 - 133{,}44 = 230{,}93 \text{ (см}^4);$$

$$J_{y_c}^{(1)} = J_{y_1}^{соб.} + A_1 \cdot \bar a_1^2 = 341{,}33 + \overset{23{,}04}{64 \cdot 0{,}6^2} = 364{,}37 \text{ (см}^4)$$

$$J_{y_c}^{(2)} = J_{y_2}^{соб} + A_2 \cdot \bar a_2^2 = 72 + \overset{61{,}44}{24 \cdot 1{,}6^2} = 133{,}44 \text{ (см}^4)$$

(где $\bar a_1 = 0{,}6$ см и $\bar a_2 = 1{,}6$ см) см. рис.

$$J_{y_1}^{соб.} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{8 \cdot 8^3}{12} = \frac{4096}{12} = 341{,}33 \text{ (см}^4)$$

$$J_{y_2}^{соб.} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = \frac{864}{12} = 72{,}0 \text{ (см}^4)$$

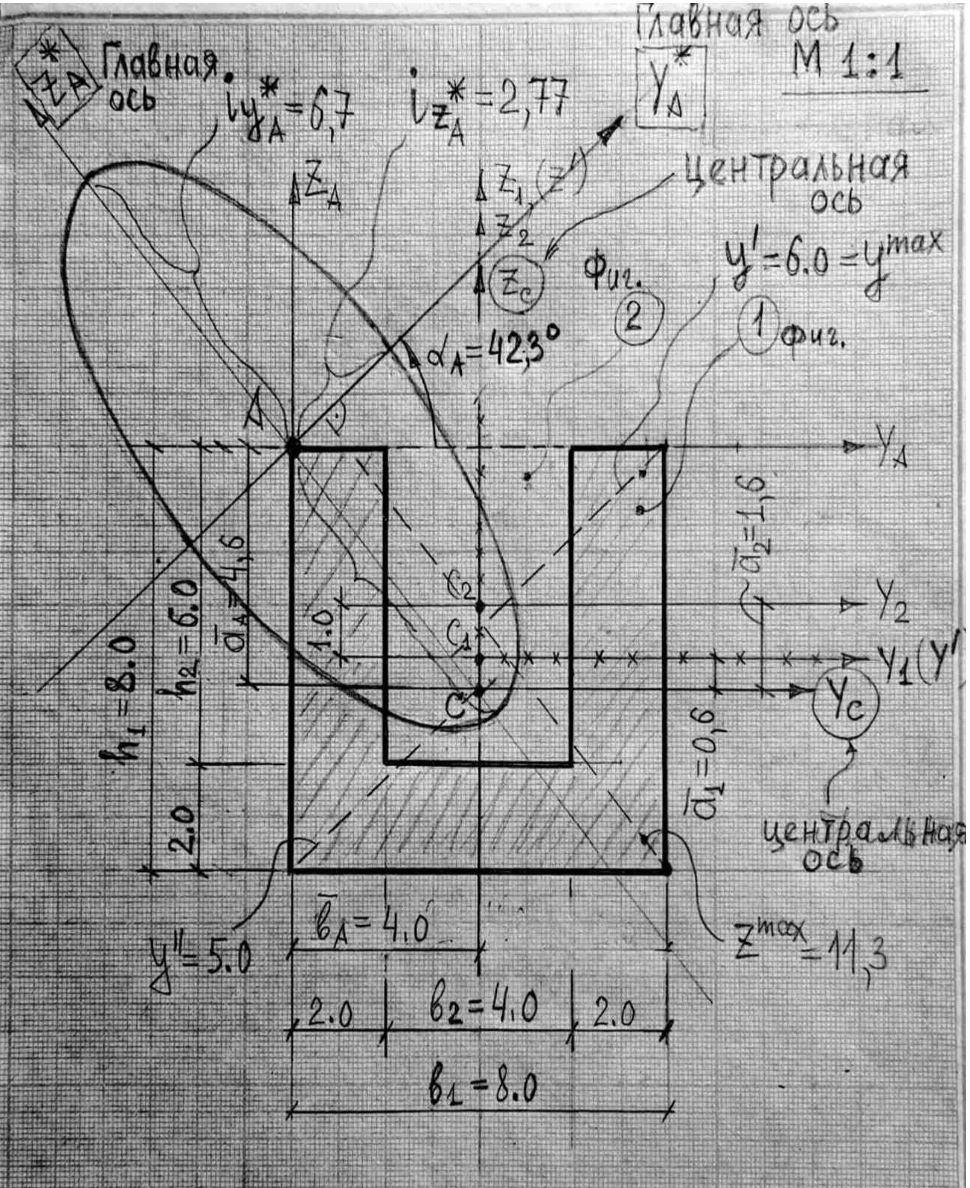


Рис.1

$$J_{z_c}^{соб} = J_{z_1}^{(1)} - J_{z_2}^{(2)} = 341,33 - 32 = 309,33 \ (см^4)$$

$$J_{z_1}^{(1)} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{12} = \frac{8 \cdot 8^3}{12} = 341,33 \ (см^4)$$

$$J_{z_2}^{(2)} = \frac{h_2 \cdot b_2^3}{12} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \ (см^4)$$

3). Определяем центробежный момент инерции. – $J_{y_c z_c}$ (относит. центр. осей y_c и z_c);

Фигуры, имеющие хотя бы одну ось симметрии обладают нулевым центробежным моментом.

т.е. $J_{y_c z_c}^{соб} = 0$;

4). Определяем наклон главных центральных осей инерции:

$$tg\, 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot J_{y_c z_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = -\frac{2 \cdot 0}{\underbrace{230,93 - 309,33}_{-78,4}} = 0$$

5). Определяем осевые моменты инерции для собственных осей, проведённых через заданную т. A. (y_A и z_A). Применяем ф-лы при параллельном переносе осей.

$$J_{y_A} = J_{y_c}^{соб} + A \cdot \bar a_A^2 = 230,93 + \overbrace{40 \cdot 4,6^2}^{846,4} = 1077,33 \ (см^4)$$

$$J_{z_A} = J_{z_c}^{соб} + A \cdot \bar b_A^2 = 309,33 + \overbrace{40 \cdot 4^2}^{640} = 949,33 \ (см^4)$$

6). Определяем центробежный момент инерции для осей y_A и z_A:

$$J_{y_A z_A} = J_{y_c z_c}^{соб} + A \cdot (-\bar a_A) \cdot \bar b_A = -40 \cdot 4,6 \cdot 4 = -736 \ (см^4)$$

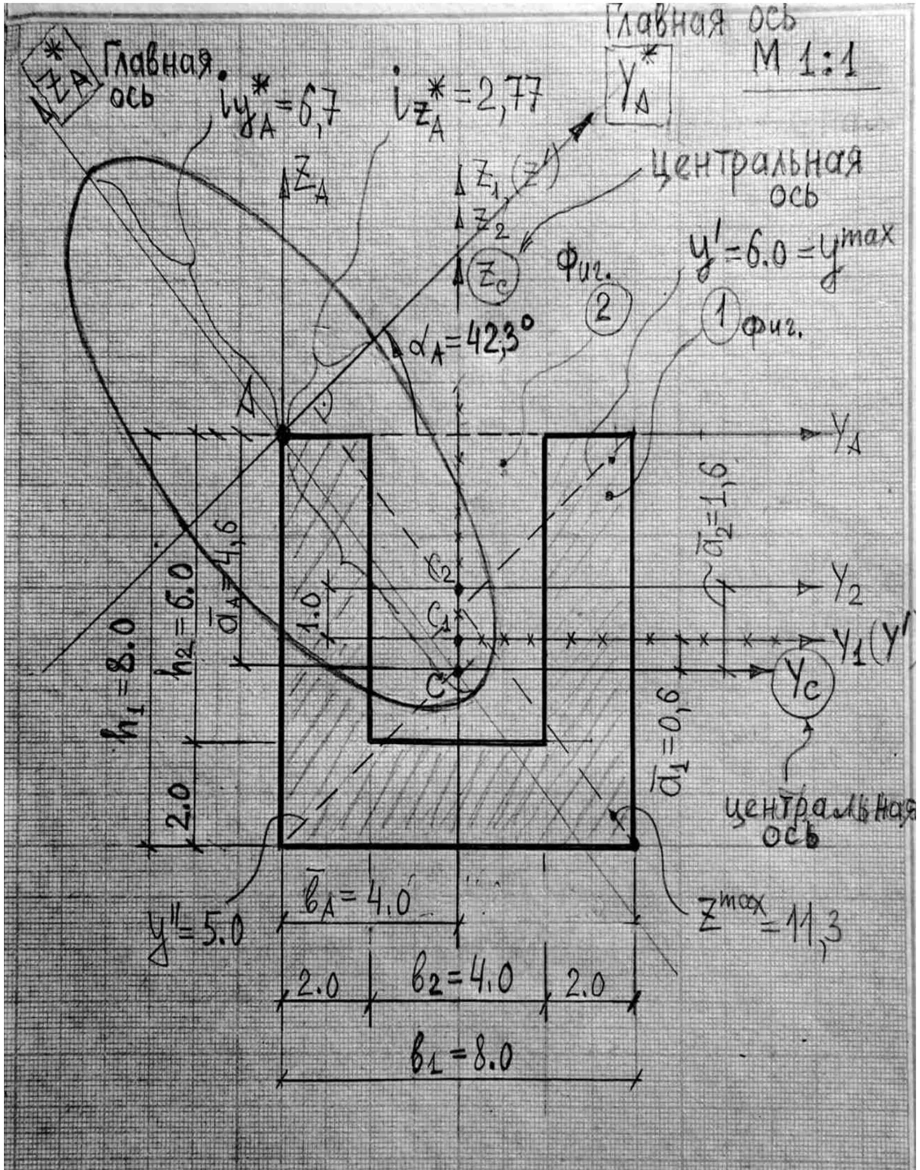


Рис.1

7). Определяем наклон главных осей в т. А:

$$tg\,2\alpha_A = \ominus \frac{2\cdot J_{y_A z_A}}{J_{y_A} - J_{z_A}} = \ominus \frac{2\cdot(-736)}{\underbrace{1077,33-949,33}_{128}} = \ominus \frac{\ominus 1472}{128} = 11,5;$$

$$arc\,tg\,2\alpha_A = 2\alpha_A = 1,484 \text{ рад. } \left(\text{или} \times \frac{180°}{\pi} \cong 57°\right)$$

$$2\alpha_A = 1,484 \times 57° = 84,588°$$

$$\alpha_A = 42,29° \cong 42,3°$$

Положительный угол откладывается от оси Y_A против хода часовой стрелки.

8). Определяем главные моменты инерции относит. осей (y_A^* и z_A^*):

$$J^{max}_{min} = \frac{J_{y_A} + J_{z_A}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_{y_A} - J_{z_A})^2 + 4\cdot J_{y_A z_A}^2};$$

$$J^{max}_{min} = \frac{\overbrace{1077,33+949,33}^{2026,66}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\overbrace{1077,33-949,33}^{128})^2 + \overbrace{4\cdot(-736)^2}^{541696}} =$$

$$= 1013,33 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{16384 + 2166,784}_{2183168}} = 1013,33 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2183168} =$$

$$= 1013,33 \pm \frac{1}{2}\cdot 1477,55 = 1013,33 \pm 738,775;$$

$$J^{max} = 1013,33 + 738,78 = 1752,11 \text{ (см}^4\text{)} = J_{y_A}^*;$$

$$J^{min} = 1013,33 - 738,78 = 274,55 \text{ (см}^4\text{)} = J_{z_A}^*;$$

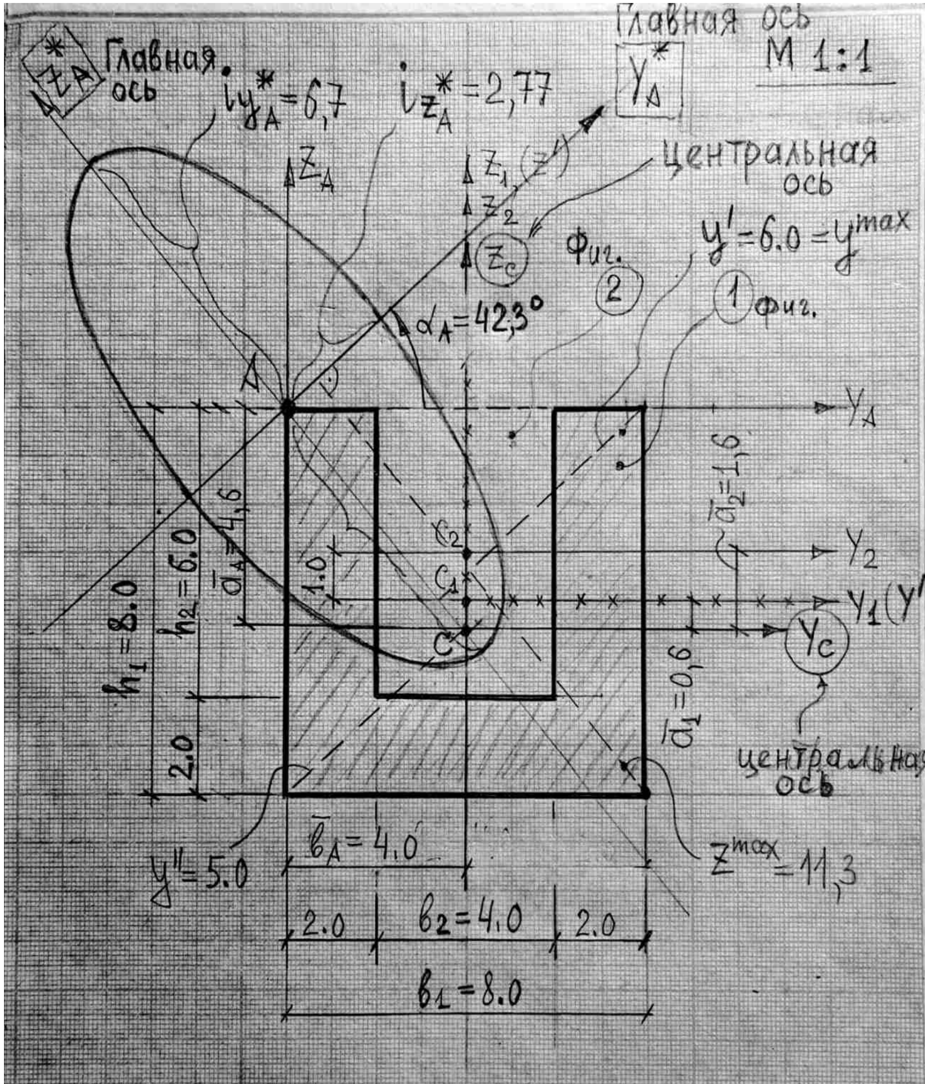


Рис.1

9). Проверка:

а) $J_{y_A}+J_{z_A}=J^{max}+J^{min}$;

$1077,33+949,33=1752,11+274,55$;

$2026,66=2026,66$; (!)

б). Центробежный момент относительно главных осей в т. A ($J^*_{y_A}$ и $J^*_{z_A}$) должен равняться нулю.

$$J_{y^*_A z^*_A}=\frac{J_{y_A}-J_{z_A}}{2}\cdot\sin 2\alpha_A+J_{y_A z_A}\cdot\cos 2\alpha_A=0 \quad (!)$$

$$J_{y^*_A z^*_A}=\frac{\overset{128}{1077,33-949,33}}{\underset{64}{2}}\cdot 0,9903+(-736)\cdot 0,1392=$$

$\sin 2\alpha_A=\sin 84,588^o=0,920=0,9903$

$\cos 2\alpha_A=\cos 84,588^o=0,392=0,1392$

$=99,835\cdot 0,9903-736\cdot 0,1392=$

$=98,867-102,45=\underline{-2,58}$

$$P=\frac{\|102,45\|-\|98,867\|}{\|102,45\|}\cdot 100\%=\underline{\underline{2,52}}\%<5\% \quad (!)$$

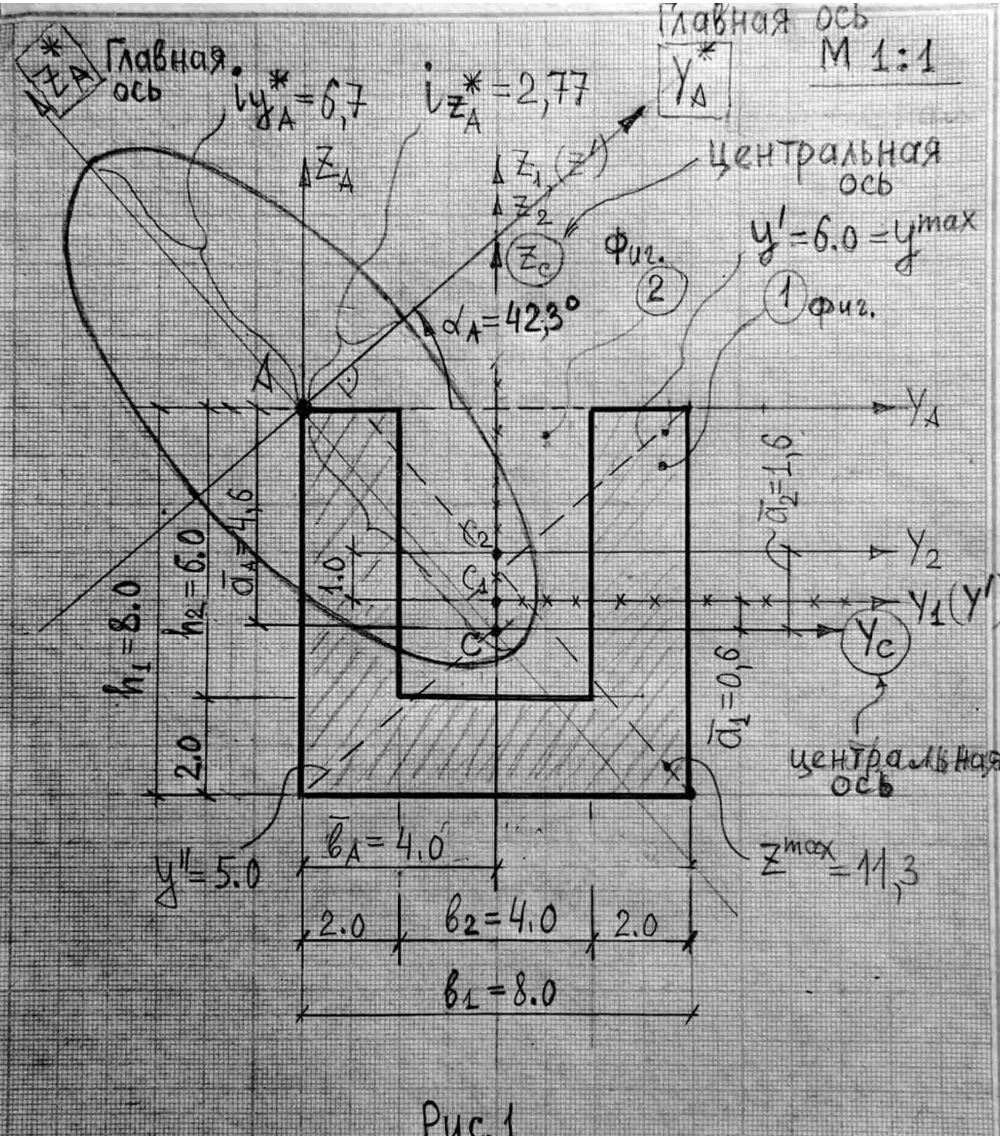


Рис.1

10). Определяем моменты сопротивления относительно главных осей y_A^* и z_A^*:

$$W_{y_A^*} = \frac{J_{y_A^*}}{z^{max}} = \frac{J^{max}}{z^{max}} = \frac{1792,08}{11,3} = \underline{158,59}\ (\text{см}^3)$$

$$W_{z_A^*} = \frac{J_{z_A^*}}{y^{max}} = \frac{J^{min}}{y^{max}} = \frac{306,58}{6} = \underline{51,1}\ (\text{см}^3)$$

$$z^{max} = 11,3 \text{ см}$$

$$y^{max} = y' = 6,0 \text{ см}$$

11). Построение эллипса инерции;

вдоль оси z_A^* $i_{y_A^*} = \sqrt{\frac{J_{y_A^*}}{A}} = \sqrt{\frac{1792,08}{40}} = \sqrt{44,8} = \underline{6,7}\ (\text{см})$

вдоль оси y_A^* $i_{z_0^*} = \sqrt{\frac{J_{z_A^*}}{A}} = \sqrt{\frac{306,58}{40}} = \sqrt{7,66} = \underline{2,77}\ (\text{см})$