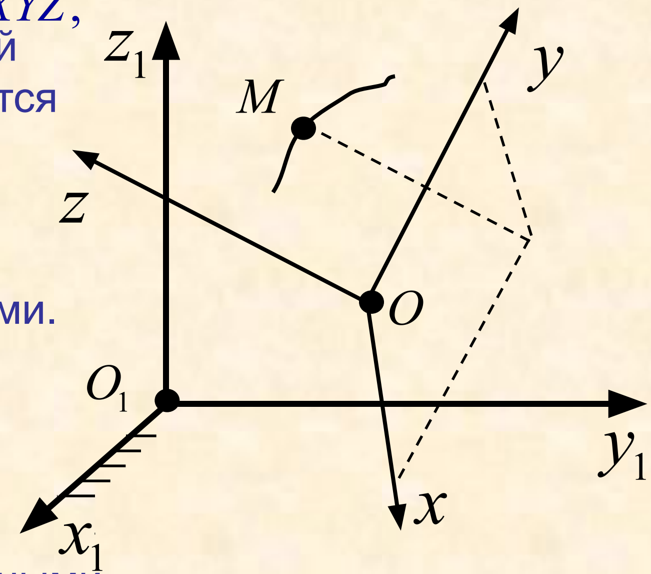
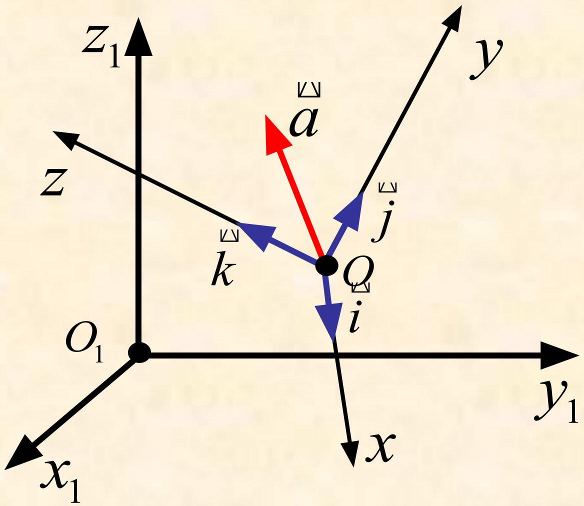
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Пусть точка М движется относительно системы отсчета $OXYZ$, которая в свою очередь, движется относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$. Такое движение точки М называется составным или сложным.



- Движение точки М относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ называется абсолютным, а траектория, скорость и ускорение точки М в этом движении – абсолютными.
  - Обозначения: $(\vec V_{абс}, \vec a_{абс})$ или $(\vec v, \vec a)$.
- Движение точки М относительно подвижной системы отсчета $OXYZ$ называется относительным, а траектория, скорость и ускорение точки М в этом движении – относительными.
  - Обозначения: $(\vec V_{отн}, \vec a_{отн})$ или $(\vec v_r, \vec a_r)$.
- Движение точки М вместе с подвижной системой отсчета $OXYZ$ относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ называется переносным, а скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета $OXYZ$, с которой совпадает движущаяся точка М в данный момент времени – переносными.
  - Обозначения: $(\vec V_{пер}, \vec a_{пер})$ или $(\vec v_e, \vec a_e)$.
- Основной задачей кинематики сложного движения точки является установление зависимостей между скоростями и ускорениями абсолютного, относительного и переносного движений.

АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕКТОРА



Пусть вектор $\vec{a}$ задан в подвижной системе отсчета $OXYZ$: $\vec{a}(t) = a_x(t)\cdot\vec{i} + a_y(t)\cdot\vec{j} + a_z(t)\cdot\vec{k}$.

Определим правило нахождения производной этого вектора в неподвижной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ – (абсолютной производной), учитывая, что единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ меняют свое направление вследствие движения подвижной системы отсчета $OXYZ$.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Обозначим $\frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt}$ – относительная производная вектора $\vec{a}$.

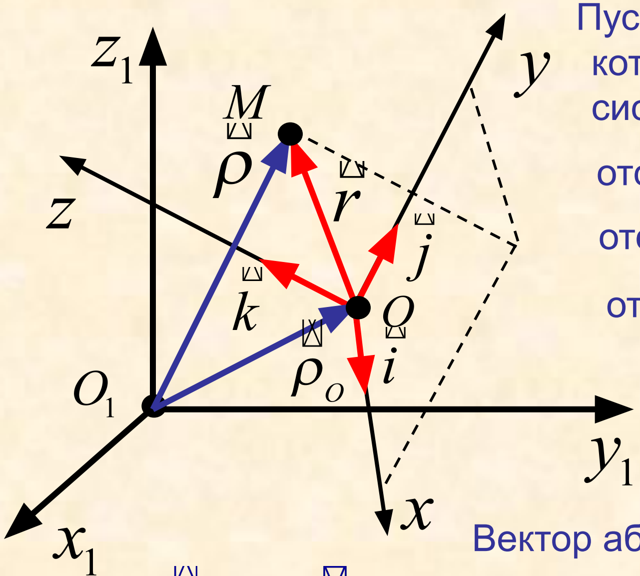
По формуле Эйлера $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}$, $\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j}$, $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}$, поэтому выражение

$$a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\times(a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}) = \vec{\omega}\times\vec{a}.$$

Окончательно получим: $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{a}$.

Абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной и векторного произведения угловой скорости подвижной системы отсчета на этот вектор.

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ



Пусть точка М движется относительно подвижной системы отсчета $OXYZ$, которая совершает произвольное движение относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$. Положение точки М в подвижной системе отсчета задается радиусом – вектором $\vec r$, а в неподвижной системе отсчета радиусом – вектором $\vec\rho$. Положение начала подвижной системы отсчета задается радиусом – вектором $\vec\rho_O$. Тогда:

$$\forall t > 0,\ \vec\rho = \vec\rho_O + \vec r,\ \vec r = x\cdot\vec i + y\cdot\vec j + z\cdot\vec k.$$

Вектор абсолютной скорости точки **М:** $\vec V = \dfrac{d\vec\rho}{dt} = \dfrac{d\vec\rho_O}{dt} + \dfrac{d\vec r}{dt}$,

где $\dfrac{d\vec\rho_O}{dt} = \vec V_O$ - скорость начала подвижной системы отсчета.

$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{\tilde d\vec r}{dt} + \vec\omega_{пер} \times \vec r,\qquad \frac{\tilde d\vec r}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec i + \frac{dy}{dt}\vec j + \frac{dz}{dt}\vec k = \vec V_{отн}.$$

$$\vec V = \vec V_O + \vec V_{отн} + \vec\omega_{пер} \times \vec r\ (*)$$

Переносную скорость точки М можно получить из (*) , если зафиксировать положение точки в подвижной системе отсчета: положить $\vec r = const$:

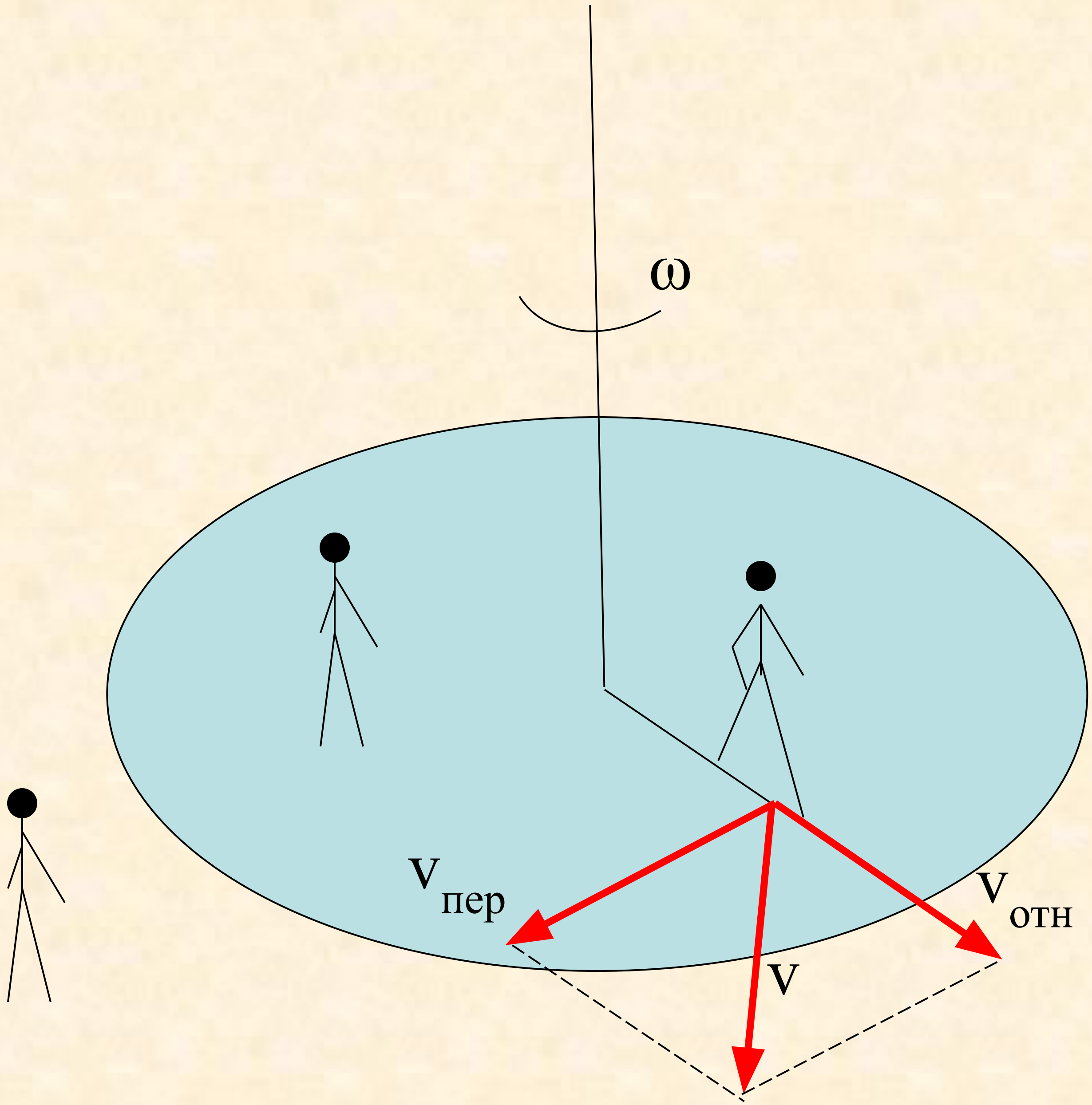
$$\vec V_{пер} = \vec V_O + \vec\omega_{пер} \times \vec r.$$

Заметим, что это скорость точки свободного твердого тела.

Окончательно $\vec V = \vec V_{пер} + \vec V_{отн}$ $\left(при\ \vec\omega_{пер} = 0,\ \vec V_{пер} = \vec V_O\right)$.

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме переносной и относительной скорости.

ПРИМЕР 1



ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Для нахождения абсолютного ускорения точки М продифференцируем по времени выражение (*) учитывая, что векторы $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{r}$ заданы в подвижной системе отсчета.

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d\vec{V}_O}{dt}+\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt}+\frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}_{пер}\times\frac{d\vec{r}}{dt},$$ где

$$\frac{d\vec{V}_O}{dt}=\vec{a}_O$$ - ускорение начала подвижной системы отсчета; $$\frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt}\times\vec{r}=\vec{\varepsilon}_{пер}\times\vec{r};$$

$$\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt}=\frac{\tilde{d}\vec{V}_{отн}}{dt}+\vec{\omega}_{пер}\times\vec{V}_{отн}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}+$$

$$+\vec{\omega}_{пер}\times\vec{V}_{отн}=\vec{a}_{отн}+\vec{\omega}_{пер}\times\vec{V}_{отн};$$

$$\vec{\omega}_{пер}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}_{пер}\times\left(\frac{\tilde{d}\vec{r}}{dt}+\vec{\omega}_{пер}\times\vec{r}\right)=\vec{\omega}_{пер}\times\vec{V}_{отн}+\vec{\omega}_{пер}\times\vec{\omega}_{пер}\times\vec{r}.$$

$$\vec{a}=\vec{a}_O+\vec{\varepsilon}_{пер}\times\vec{r}+\vec{\omega}_{пер}\times\vec{\omega}_{пер}\times\vec{r}+\vec{a}_{отн}+2\cdot(\vec{\omega}_{пер}\times\vec{V}_{отн})\quad(**).$$

Переносное ускорение точки М можно получить из выражения (**) положив в нем $\vec{r}=const$:

$$\vec{a}_{пер}=\vec{a}_O+\vec{\varepsilon}_{пер}\times\vec{r}+\vec{\omega}_{пер}\times\vec{\omega}_{пер}\times\vec{r}\quad(\vec{\omega}_{пер}=\vec{\varepsilon}_{пер}=0,\ \ \vec{a}_{пер}=\vec{a}_O)$$

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Слагаемое $2\cdot(\vec{\omega}_{пер}\times\vec{V}_{отн})=\vec{a}_{кор}$ называется Кориолисовым (поворотным) ускорением.

Окончательно получим: $\boxed{\vec{a}=\vec{a}_{пер}+\vec{a}_{отн}+\vec{a}_{кор}}$.

Теорема Кориолиса

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме ее переносного, относительного и Кориолисова ускорений.

- ✔ относительное ускорение точки характеризует изменение относительной скорости в относительном движении;
- ✔ переносное ускорение точки характеризует изменение переносной скорости в переносном движении;
- ✔ ускорение Кориолиса характеризует изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении.
  Оно возникает вследствие взаимного влияния движений, в которых участвует точка.

ВЫЧИСЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ КОРИОЛИСА ПРАВИЛО ЖУКОВСКОГО

Модуль ускорения Кориолиса вычисляется по правилу нахождения модуля векторного произведения векторов:

$$\left|\vec{a}_{кор}\right| = 2\cdot\left|\vec{\omega}_{пер}\right|\cdot\left|\vec{V}_{отн}\right|\cdot\sin(\vec{\omega}_{пер}\,\hat{}\,\vec{V}_{отн}) .$$

Из данной формулы следует, что ускорение Кориолиса обращается в нуль в следующих случаях:

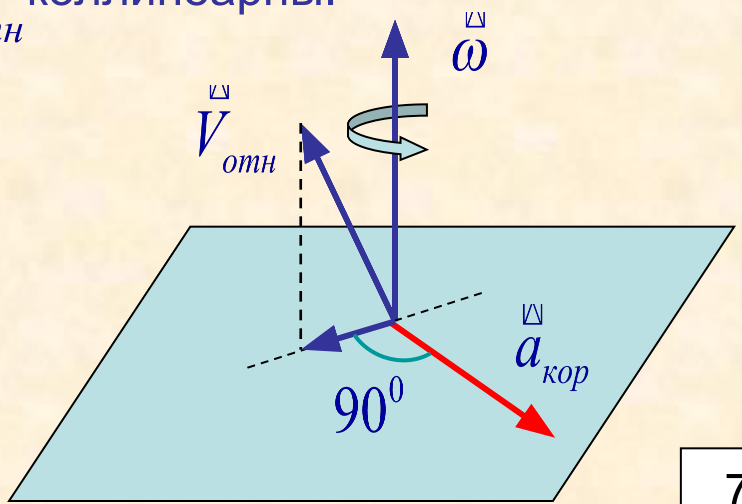
а) $\vec{\omega}_{пер} = 0$ - подвижная система отсчета совершает поступательное движение;

б) $\vec{V}_{отн} = 0$ - точка находится в покое в подвижной системе отсчета;

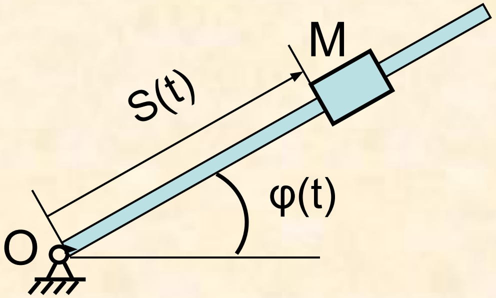
в) $\sin(\vec{\omega}_{пер}\,\hat{}\,\vec{V}_{отн}) = 0$ - векторы $\vec{\omega}_{пер}$ и $\vec{V}_{отн}$ коллинеарны.

Правило Жуковского

Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо:
- спроектировать вектор относительной скорости точки на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости переносного вращательного движения и
- повернуть проекцию в ее плоскости на угол 90^0 в сторону переносного вращения



ПРИМЕР 2



Дано:

$OM = s(t) = 4t - t^2$ (м);

$\varphi(t) = t^2 - 3t$ (рад);

$t_1 = 1c$.

Найти:

$V(t_1) = ?$, $a(t_1) = ?$

Решение

1) $OM = s(t_1) = 4\cdot 1 - 1^2 = 3\ (м)$;

2) По теореме о сложении скоростей:

$$\vec V = \vec V_{ПЕР} + \vec V_{ОТН}$$

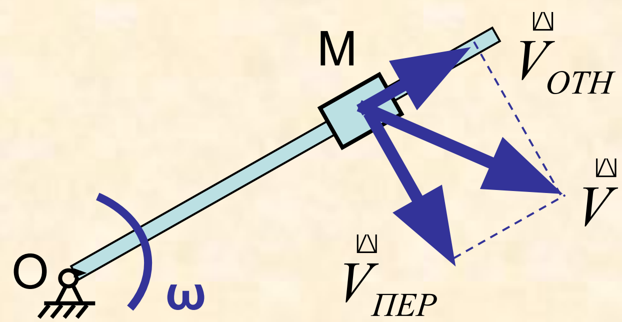
$$|\vec V_{ПЕР}| = |\omega_{ПЕР}| \cdot OM, \quad \vec V_{ПЕР} \perp OM;$$

$$\omega_{ПЕР} = \frac{d\varphi}{dt} = 2\cdot t - 3, \ \ \omega_{ПЕР}(t_1) = 2\cdot 1 - 3 = -1(c^{-1}),$$

$$|\vec V_{ПЕР}| = |\omega_{ПЕР}| \cdot OM = 1\cdot 3 = 3\left(м/c\right);$$

$$V_{ОТН} = \frac{ds}{dt} = 4 - 2\cdot t; \ V_{ОТН}(1) = 4 - 2\cdot 1 = 2\left(м/c\right).$$

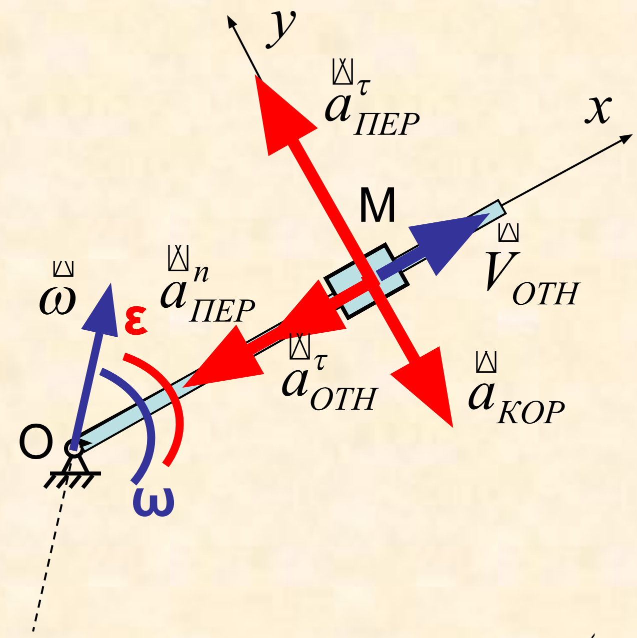
$\vec V_{ОТН} \perp \vec V_{ПЕР}$, поэтому $|\vec V| = \sqrt{|\vec V_{ОТН}|^2 + |\vec V_{ОТН}|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6\ \left(м/c\right)$



ПРИМЕР 2 (продолжение)

3) По теореме о сложении ускорений:

$$\vec a = \vec a^{\tau}_{ОТН} + \vec a^{n}_{ОТН} + \vec a^{\tau}_{ПЕР} + \vec a^{n}_{ПЕР} + \vec a_{КОР}.$$



$$a^{\tau}_{ОТН} = \frac{dV_{ОТН}}{dt} = -2\left({м}/{c^2}\right);$$

$$a^{n}_{ОТН} = \frac{V^2_{ОТН}}{\rho_{ОТН}} = 0$$ т.к. траектория относительного движения - прямая линия;

$$\left|\vec a^{\tau}_{ПЕР}\right| = \varepsilon \cdot OM, \quad \vec a^{\tau}_{ПЕР} \perp OM;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2(c^{-2});$$

$$\left|\vec a^{\tau}_{ПЕР}\right| = 2\cdot 3 = 6\left({м}/{c^2}\right);$$

$$\left|\vec a^{n}_{ПЕР}\right| = \omega^2 \cdot OM = (-1)^2 \cdot 3 = 3\left({м}/{c^2}\right);$$

$$a_x = a_{ОТН} - a^{n}_{ПЕР} = -2-3 = -5\left({м}/{c^2}\right),$$

$$a_y = a^{\tau}_{ПЕР} - a_{КОР} = 6-4 = 2\left({м}/{c^2}\right),$$

$$\left|\vec a\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5^2+2^2} = 5{,}39\left({м}/{c^2}\right).$$

$$\left|\vec a_{КОР}\right| = 2\cdot\left|\vec\omega\right|\cdot\left|\vec V_{ОТН}\right|\cdot\sin(\vec\omega,\hat{\ }\vec V_{ОТН}) = 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 4\left({м}/{c^2}\right).$$

Ответ: V=3,6 $\left({м}/{с}\right)$; $a = 5{,}39\left({м}/{c^2}\right)$.

ПРИМЕР 3

$R = 0.6$ м; $L = 0.8$ м;

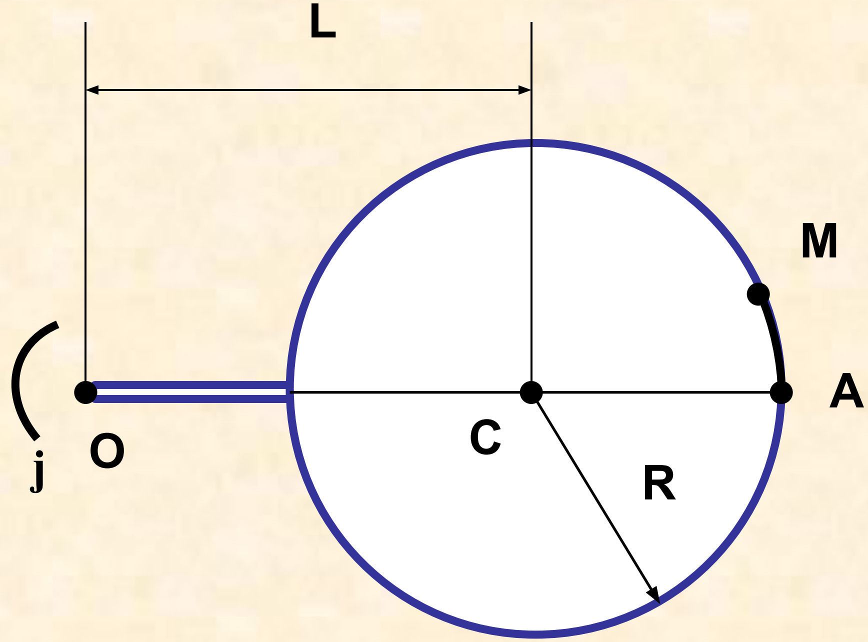
$\varphi(t) = 3t^2 - 8t$ рад;

$s(t) = \overset{\smile}{AM} = \dfrac{\pi}{3} R(2t^2 - t^3)$ м.

$t_1 = 1c$

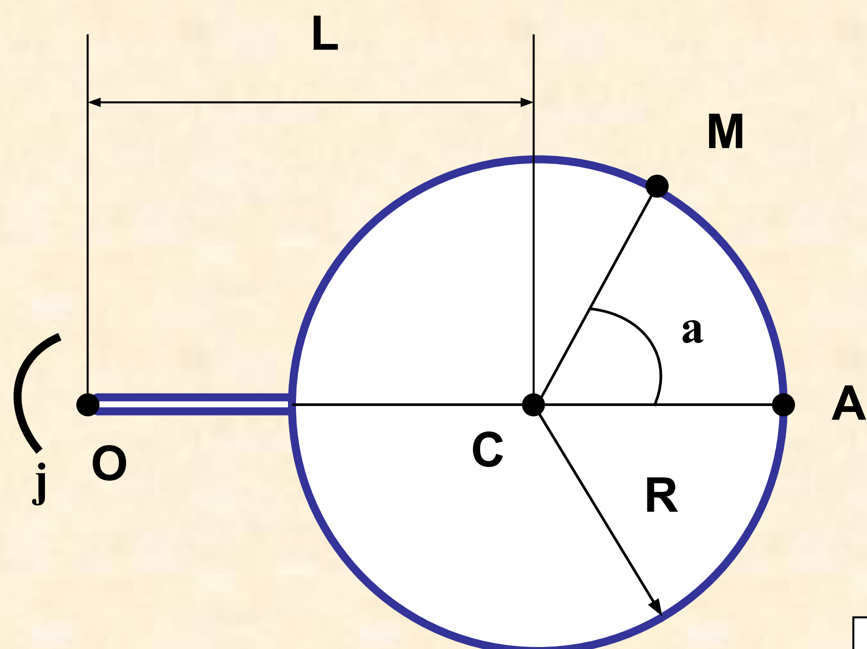
$\vec{V}_{АБС}(t_1) = ?;$

$\vec{a}_{АБС}(t_1) = ?.$



Решение

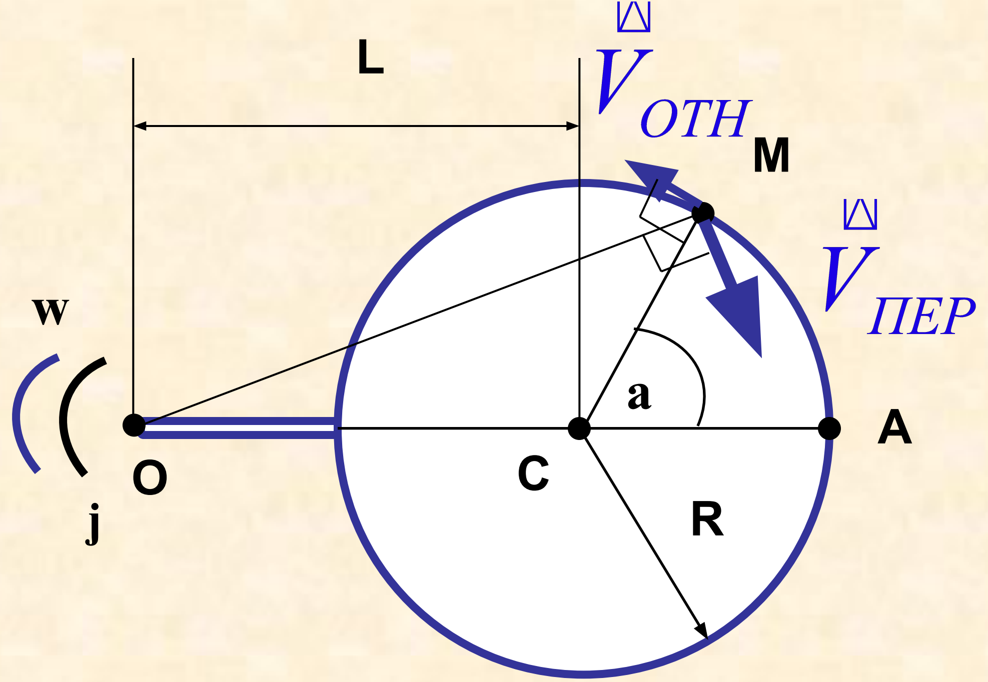
1. Определим положение точки M на диске в момент **t1**.



$$\begin{cases} S(t_1) = \dfrac{\pi}{3} R(2 \cdot 1^2 - 1^3) = \dfrac{\pi}{3} R \\ S = R\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$$

ПРИМЕР 3 (продолжение)

2. Абсолютную скорость точки найдем по теореме о сложении скоростей:



$$\vec V_{АБС} = \vec V_{ПЕР} + \vec V_{ОТН}$$

$$|\vec V_{ПЕР}| = \omega_{ПЕР}\, OM, \quad \vec V_{ПЕР} \perp \vec{OM}$$

$$OM = \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR\cos 120^0} =$$

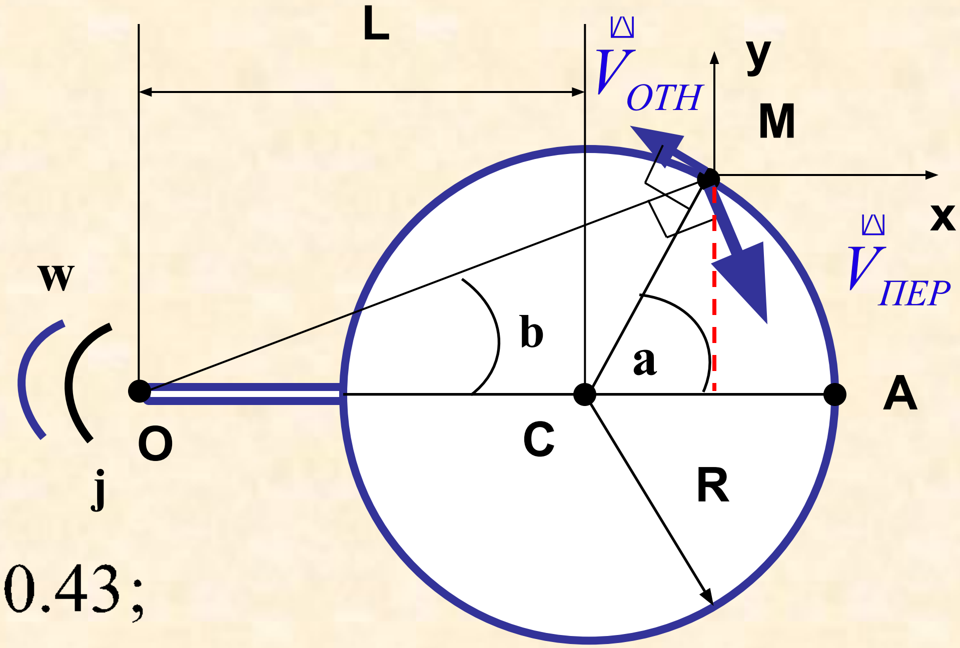
$$= \sqrt{0.8^2 + 0.6^2 + 2\cdot 0.8\cdot 0.6\cdot 0.5} = \sqrt{1.48} = 1.22м$$

$$\omega_{ПЕР} = \dot\varphi = 6t - 8\ ;\ \omega_{ПЕР}(t_1) = 6\cdot 1 - 8 = -2c^{-1}$$

$$|\vec V_{пер}| = |\omega_{пер}|\, OM = 2\cdot 1.22 = 2.44\ м/c$$

$$V_{отн} = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi R}{3}(4t - 3t^2)\ ;\ V_{отн}(t_1) = 0.63\ м/c$$

ПРИМЕР 3 (продолжение)



$$V_x = V_{пер}\sin\beta - V_{отн}\sin\alpha\,,$$

$$V_y = -V_{пер}\cos\beta + V_{отн}\cos\alpha\,.$$

$$\begin{cases} \sin\beta = \dfrac{R\sin\alpha}{OM} = \dfrac{0.6\cdot 0.866}{1.22} = 0.43; \\ \cos\beta = \dfrac{R\cos\alpha + L}{OM} = \dfrac{0.6\cdot 0.5 + 0.8}{1.22} = 0.9. \end{cases}$$

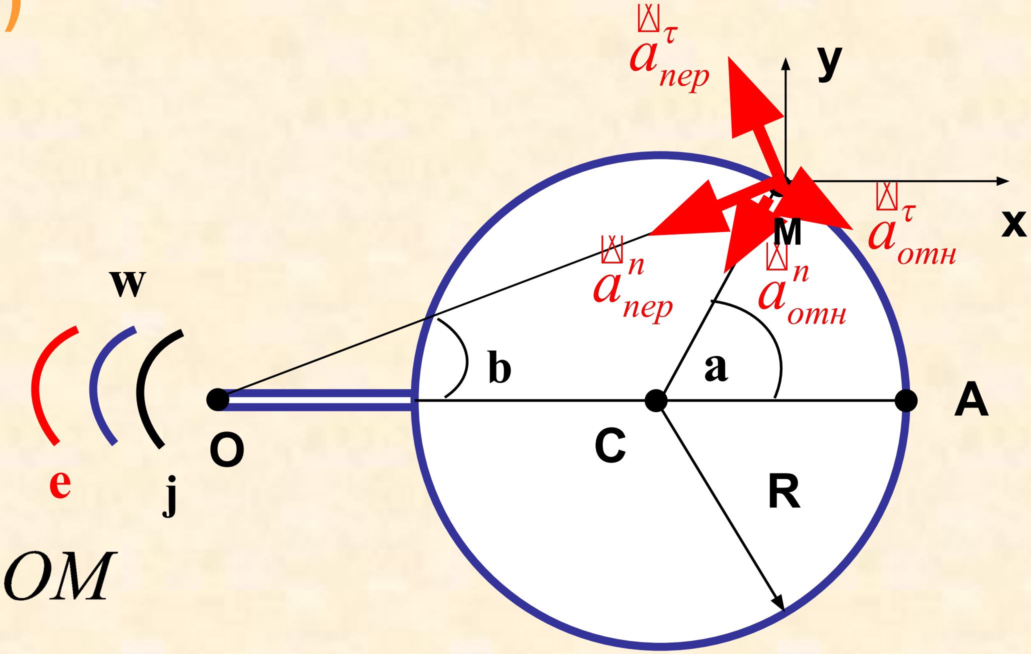
$$V_X = 2.44\cdot 0.43 - 0.63\cdot 0.866 = 0.5$$

$$V_Y = -2.44\cdot 0.9 + 0.63\cdot 0.5 = -1.88$$

$$\left|\vec{V}_{абс}\right| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{0.5^2 + 1.88^2} = 1.95 \quad /$$

ПРИМЕР 3 (продолжение)

3. Абсолютное ускорение точки определим по теореме Кориолиса:



$$\vec a_{абс} = \vec a_{пер} + \vec a_{отн} + \vec a_{кор}$$

$$\vec a_{пер} = \vec a^{\tau}_{пер} + \vec a^{n}_{пер}$$

$$\left|\vec a^{\tau}_{пер}\right| = \left|\varepsilon_{пер}\right| OM\,,\ \left|\vec a^{n}_{пер}\right| = \omega^2_{пер} OM$$

$$\varepsilon_{пер} = \dot\omega_{пер} = 6t\ сек^{-2},\ \varepsilon_{пер}(t_1) = 6\cdot 1 = 6\ сек^{-2}$$

$$\left|\vec a^{\tau}_{пер}\right| = 6\cdot 1.22 = 7.32\ \ /\ \ ;\ \ \left|\vec a^{n}_{пер}\right| = 2^2\cdot 1.22 = 4.88\ \ /\ ^2.$$

$$a^{\tau}_{отн} = \frac{dV_{отн}}{dt} = \frac{\pi R}{3}(4-6t);\ \ a^{\tau}_{отн}(t_1) = \frac{\pi R}{3}(4-6\cdot 1) = -1.26\ \ /\ ^2$$

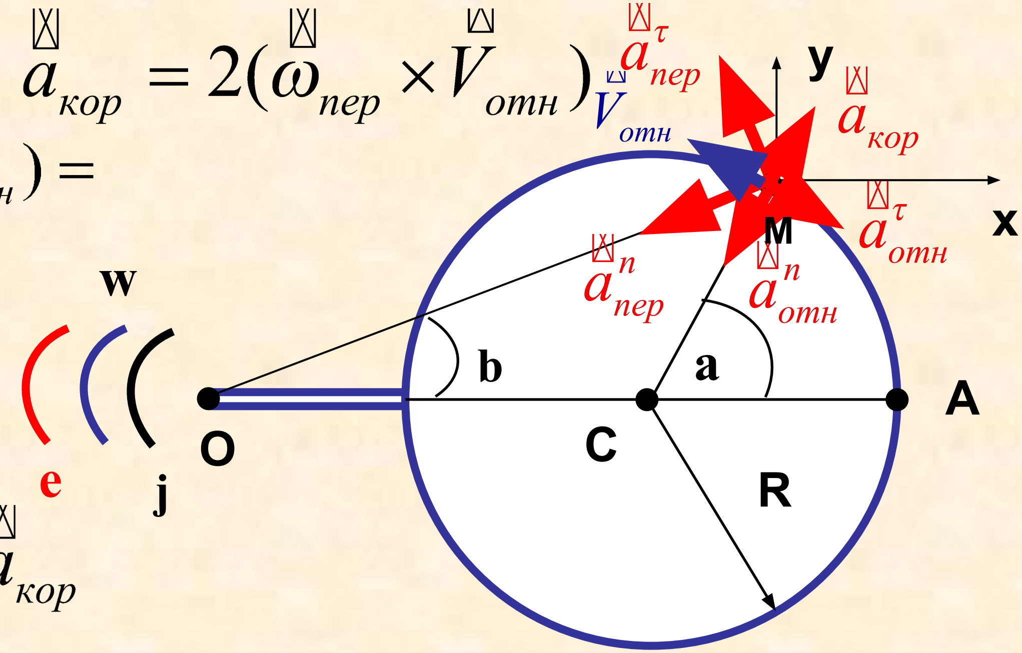
$$a^{n}_{отн} = \frac{V^2_{отн}}{\rho_{отн}} = \frac{V^2_{отн}}{R} = \frac{0.63^2}{0.6} = 0.66\ \ /\ ^2$$

ПРИМЕР 3 (продолжение)

$$\vec{a}_{кор} = 2(\vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн})$$

$$\left|\vec{a}_{кор}\right| = 2\left|\vec{\omega}_{пер}\right| \cdot \left|\vec{V}_{отн}\right| \sin(\vec{\omega}_{пер} \,\hat{}\, , \vec{V}_{отн}) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 0.63 \cdot \sin 90^0 = 2.52 м/с^2$$



$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau}_{пер} + \vec{a}^{n}_{пер} + \vec{a}^{\tau}_{отн} + \vec{a}^{n}_{отн} + \vec{a}_{кор}$$

$$a_X = -a^{\tau}_{пер} \sin\beta - a^{n}_{пер} \cos\beta + a^{\tau}_{отн} \sin\alpha - a^{n}_{отн} \cos\alpha + a_{кор} \cos\alpha =$$

$$= -7.32 \cdot 0.43 - 4.88 \cdot 0.9 + 1.26 \cdot 0.866 - 0.66 \cdot 0.5 + 2.52 \cdot 0.5 = -5.52$$

$$a_Y = a^{\tau}_{пер} \cos\beta - a^{n}_{пер} \sin\beta - a^{\tau}_{отн} \cos\alpha - a^{n}_{отн} \sin\alpha + a_{кор} \sin\alpha =$$

$$= 7.32 \cdot 0.9 - 4.88 \cdot 0.43 - 1.26 \cdot 0.5 - 0.66 \cdot 0.866 + 2.52 \cdot 0.866 = 5.47$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = \sqrt{5.52^2 + 5.47^2} = 7.77 \;\; / \;\; ^2$$

ПРИМЕР 4

$R = 0.6$ м; $L = 0.8$ м;

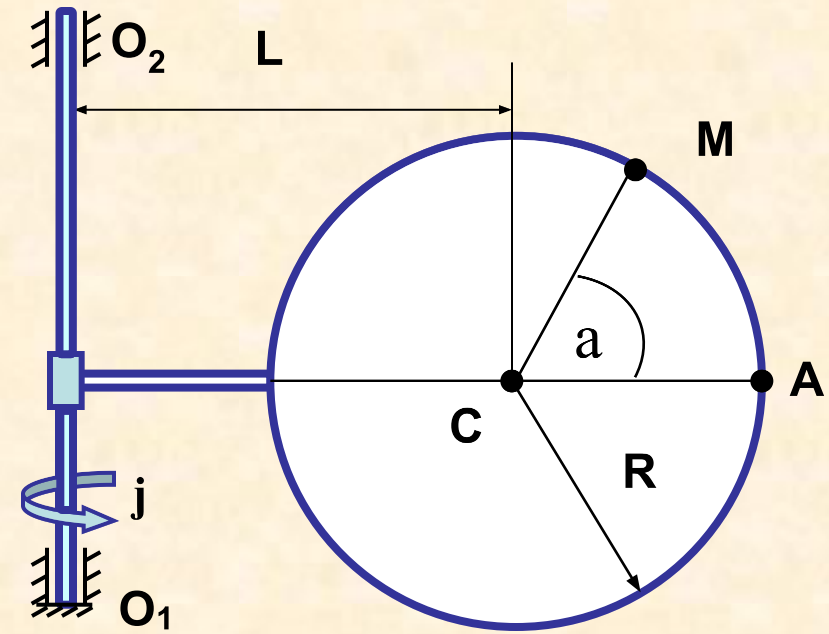
$\varphi(t) = 3t^2 - 8t$ рад;

$s(t) = \overset{\smile}{AM} = \dfrac{\pi}{3} R(2t^2 - t^3)$ м.

$t_1 = 1c$

$\vec{V}_{АБС}(t_1) = ?;$

$\vec{a}_{АБС}(t_1) = ?.$



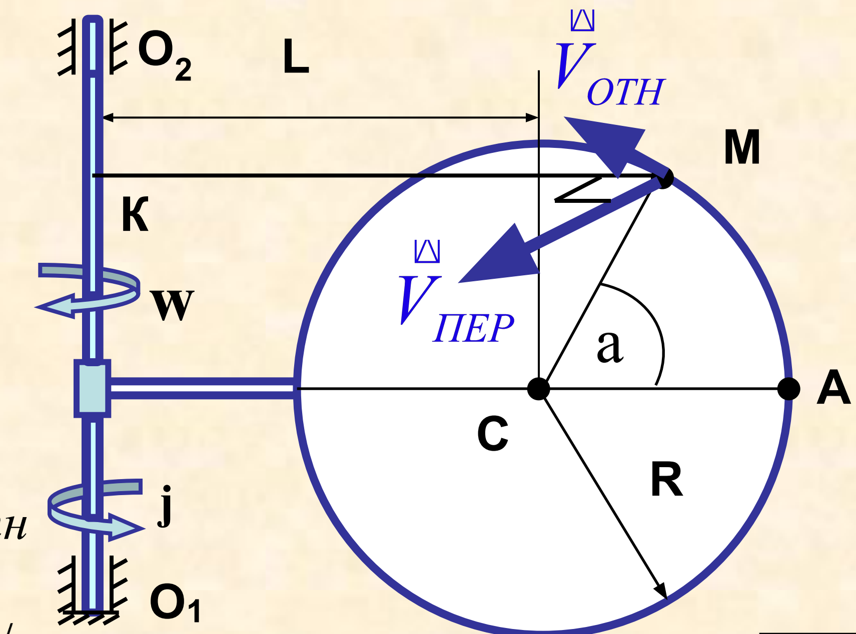
Относительное движение остается прежним.

$\left|\vec{V}_{пер}\right| = \left|\omega_{пер}\right| KM, \quad \vec{V}_{пер} \perp KM$

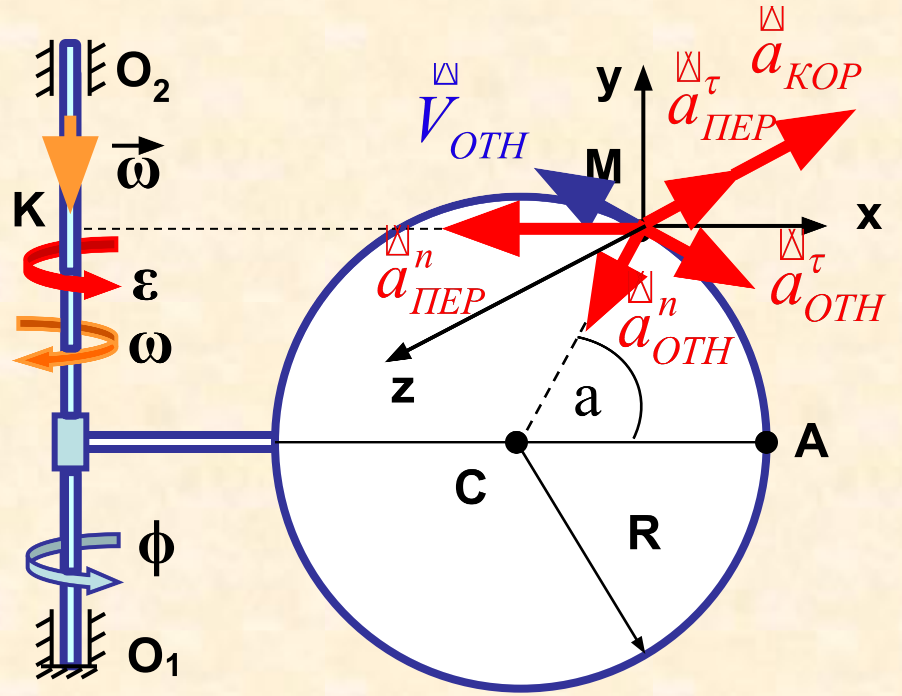
$KM = L + R\cos\alpha = 0.8 + 0.6 \cdot 0.5 = 1.1$ м

$\left|\vec{V}_{пер}\right| = 2 \cdot 1.1 = 2.2$ м/с; $\vec{V}_{пер} \perp \vec{V}_{отн}$

$\left|\vec{V}_{абс}\right| = \sqrt{\left|\vec{V}_{пер}\right|^2 + \left|\vec{V}_{отн}\right|^2} = \sqrt{2.2^2 + 0.63^2} = 2.28$ м/с



ПРИМЕР4 (продолжение)



2. Переносное ускорение

$$|\vec a^\tau_{пер}| = |\varepsilon_{пер}|\,KM = 6\cdot 1.1 = 6.6 \quad / \quad ^2$$

$$|\vec a^n_{пер}| = \omega^2_{пер}\cdot KM = 2^2\cdot 1.1 = 4.4 \quad / \quad ^2$$

3. Ускорение Кориолиса

$$|\vec a_{кор}| = 2\cdot|\vec\omega_{пер}|\cdot|\vec V_{отн}|\sin(\vec\omega_{пер}\,\hat{,}\,\vec V_{отн})$$

$$|\vec a_{кор}| = 2\cdot|\vec\omega_{пер}|\cdot|\vec V_{отн}|\sin 120^0 =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 0.63\cdot 0.866 = 2.18\, м/c^2$$

$$a_X = -a^n_{пер}\cos\alpha - a^n_{отн} + a^\tau_{отн}\sin\alpha = -0.66\cdot 0.5 - 4.4 + 1.26\cdot 0.866 = -3.64 \quad / \quad ^2,$$

$$a_Y = -a^n_{отн}\sin\alpha - a^\tau_{отн}\cos\alpha = -0.66\cdot 0.866 - 1.26\cdot 0.5 = 1.2 \quad / \quad ^2,$$

$$a_Z = -a^\tau_{пер} - a_{кор} = -6.6 - 2.18 = -8.78 \quad / \quad ^2.$$

$$|\vec a_{абс}| = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2} = \sqrt{3.64^2 + 1.2^2 + 8.78^2} = 9.58 \quad / \quad ^2$$

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

Никола́й Его́рович Жуко́вский
(5 (17) января 1847 с. Орехово, ныне Владимирской области – 17 марта 1921, Москва)

Русский ученый-механик, создатель аэродинамики как науки. Заслуженный профессор Московского университета, профессор теоретической механики Императорского Московского технического училища (с 1918 г. — МВТУ). В 1894 г. Жуковский был избран членом-корреспондентом Академии наук по разряду математических наук . При его активном участии были созданы Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), Московский авиатехникум (Военно-воздушная академия).

Гюстав Гаспар Кориолис
(Coriolis G.G., 21.05.1792 – 19.09.1843)

Родился в Париже в 1792г.

В 1810 г. окончил Политехническую школу, а в 1812 г. Школу мостов и дорог. С 1816 г. начал преподавать в Политехнической школе, где вскоре стал профессором, а в 1831 г. – директором учебной части школы. Преподавал также в Центральной школе искусств и ремесел и в Школе мостов и дорог. В 1836 г. был избран в Парижскую академию наук