

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Пусть точка M движется относительно системы отсчета $OXYZ$, которая в свою очередь, движется относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$. Такое движение точки M называется составным или сложным.

● Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ называется абсолютным, а траектория, скорость и ускорение точки M в этом движении – абсолютными.

● Обозначения: $(\overset{\vee}{V}_{абс}, \overset{\boxtimes}{a}_{абс}, \varphi)$ $(\overset{\vee}{r}, \overset{\boxtimes}{r})$.

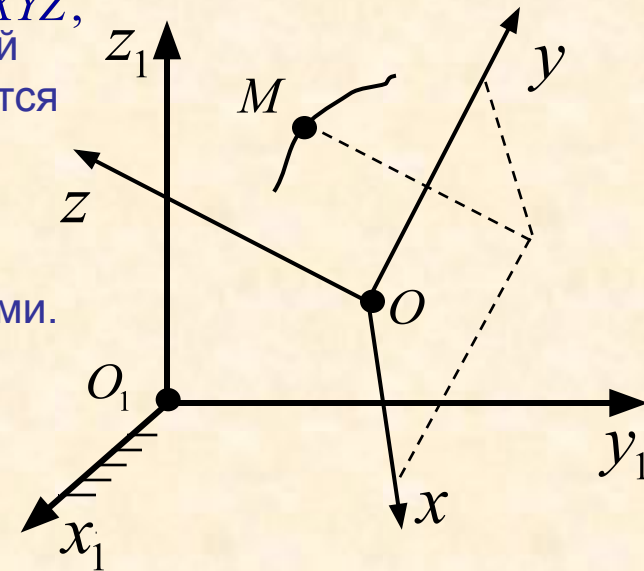
● Движение точки M относительно подвижной системы отсчета $OXYZ$ называется относительным, а траектория, скорость и ускорение точки M в этом движении – относительными.

● Обозначения: $(\overset{\vee}{V}_{отн}, \overset{\boxtimes}{a}_{отн}, \varphi)$ $(\overset{\vee}{r}, \overset{\boxtimes}{r})$.

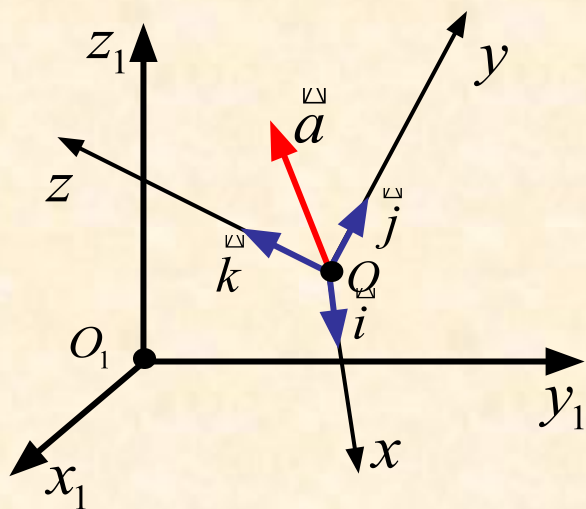
● Движение точки M вместе с подвижной системой отсчета $OXYZ$ относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ называется переносным, а скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета $OXYZ$, с которой совпадает движущаяся точка M в данный момент времени – переносными.

● Обозначения: $(\overset{\vee}{V}_{пер}, \overset{\boxtimes}{a}_{пер}, \varphi)$ $(\overset{\vee}{e}, \overset{\boxtimes}{e})$.

● Основной задачей кинематики сложного движения точки является установление зависимостей между скоростями и ускорениями абсолютного, относительного и переносного движений.



АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕКТОРА



Пусть вектор $\overset{\Delta}{a}$ задан в подвижной системе отсчета $OXYZ$: $\overset{\Delta}{a}(t) = a_x(t) \cdot \overset{\Delta}{i} + a_y(t) \cdot \overset{\Delta}{j} + a_z(t) \cdot \overset{\Delta}{k}$.

Определим правило нахождения производной этого вектора в неподвижной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ – (абсолютной производной), учитывая, что единичные векторы $\overset{\Delta}{i}$, $\overset{\Delta}{j}$, $\overset{\Delta}{k}$ меняют свое направление вследствие движения подвижной системы отсчета $OXYZ$.

$$\frac{d\overset{\Delta}{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \overset{\Delta}{i} + \frac{da_y}{dt} \overset{\Delta}{j} + \frac{da_z}{dt} \overset{\Delta}{k} + a_x \frac{d\overset{\Delta}{i}}{dt} + a_y \frac{d\overset{\Delta}{j}}{dt} + a_z \frac{d\overset{\Delta}{k}}{dt}$$

Обозначим $\frac{da_x}{dt} \overset{\Delta}{i} + \frac{da_y}{dt} \overset{\Delta}{j} + \frac{da_z}{dt} \overset{\Delta}{k} = \frac{d\overset{\Delta}{a}}{dt}$ – относительная производная вектора $\overset{\Delta}{a}$.

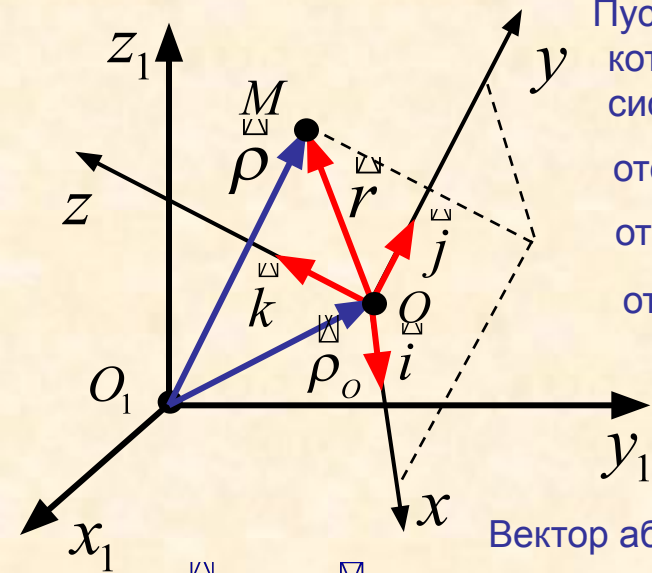
По формуле Эйлера $\frac{d\overset{\Delta}{i}}{dt} = \omega \times \overset{\Delta}{i}$, $\frac{d\overset{\Delta}{j}}{dt} = \omega \times \overset{\Delta}{j}$, $\frac{d\overset{\Delta}{k}}{dt} = \omega \times \overset{\Delta}{k}$, поэтому выражение

$$a_x \frac{d\overset{\Delta}{i}}{dt} + a_y \frac{d\overset{\Delta}{j}}{dt} + a_z \frac{d\overset{\Delta}{k}}{dt} = \omega \times (a_x \cdot \overset{\Delta}{i} + a_y \cdot \overset{\Delta}{j} + a_z \cdot \overset{\Delta}{k}) = \omega \times \overset{\Delta}{a}. \text{ Окончательно}$$

получим:
$$\frac{d\overset{\Delta}{a}}{dt} = \frac{d\overset{\Delta}{a}}{dt} + \omega \times \overset{\Delta}{a}.$$

Абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной и векторного произведения угловой скорости подвижной системы отсчета на этот вектор.

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ



Пусть точка M движется относительно подвижной системы отсчета $OXYZ$, которая совершает произвольное движение относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$. Положение точки M в подвижной системе отсчета задается радиусом – вектором \vec{r} , а в неподвижной системе отсчета радиусом – вектором $\vec{\rho}$. Положение начала подвижной системы отсчета задается радиусом – вектором $\vec{\rho}_0$. Тогда:

$$\forall t > 0, \vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}, \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Вектор абсолютной скорости точки M :
$$\vec{V} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt},$$

где $\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} = \vec{V}_0$ – скорость начала подвижной системы отсчета.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \vec{V}_{отн}.$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер} + \vec{\omega} \times \vec{r} (*)$$

Переносную скорость точки M можно получить

из (*), если зафиксировать положение точки в подвижной системе отсчета: положить $\vec{r} = const$:

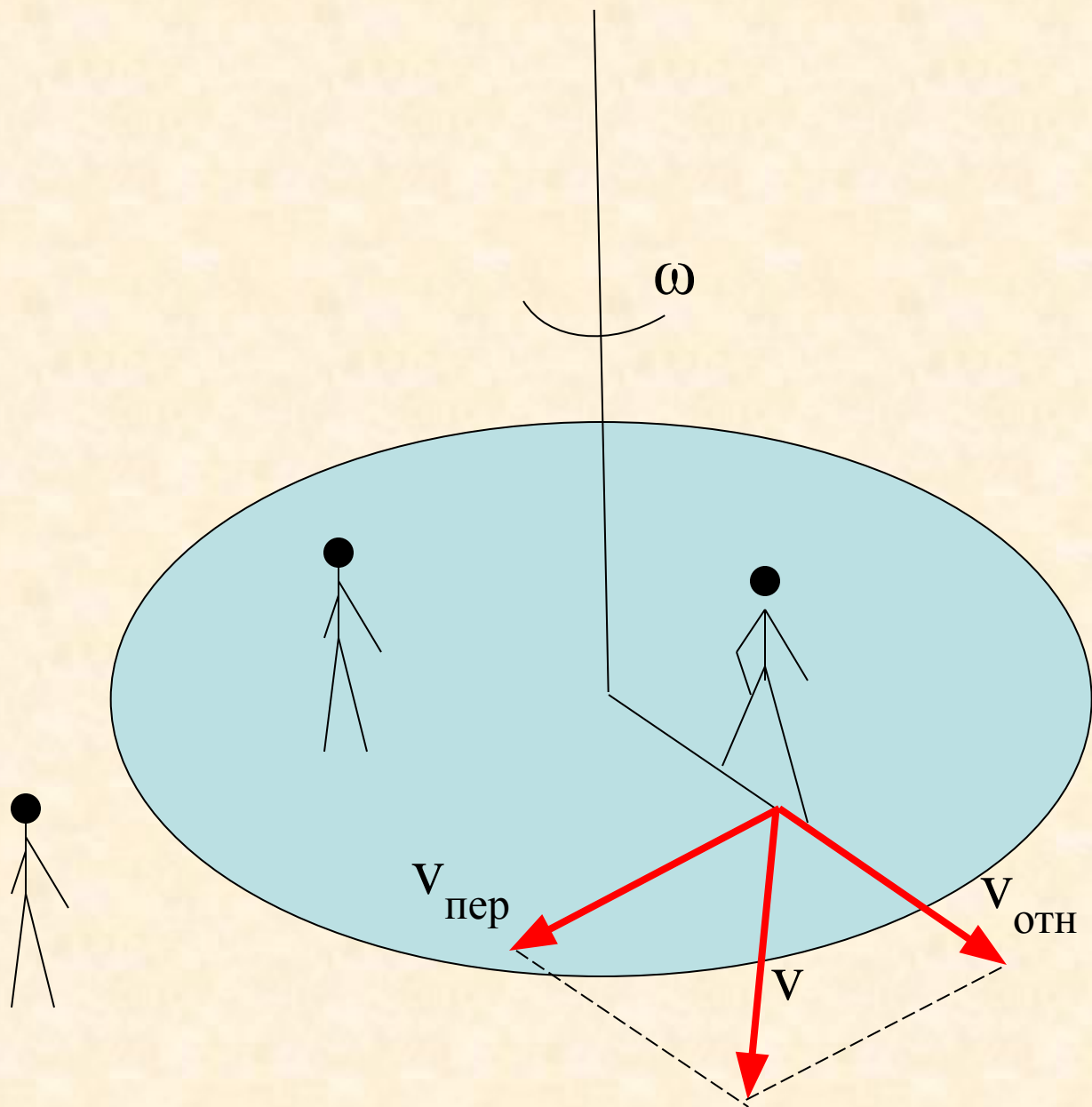
$$\vec{V}_{пер} = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}.$$

Заметим, что это скорость точки свободного твердого тела.

Окончательно
$$\vec{V} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн} \quad (\text{при } \vec{\omega}_{пер} = 0, \vec{V}_{пер} = \vec{V}_0).$$

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме переносной и относительной скорости.

ПРИМЕР 1



ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Для нахождения абсолютного ускорения точки М продифференцируем по времени выражение (*) учитывая, что векторы $\vec{V}_{отн}$ и \vec{r} заданы в подвижной системе отсчета.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{пер} \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{где}$$

$$\frac{d\vec{V}_O}{dt} = \vec{a}_O \quad \text{- ускорение начала подвижной системы отсчета;} \quad \frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r};$$

$$\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} +$$

$$+ \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн} = \vec{a}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн};$$

$$\vec{\omega}_{пер} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}_{пер} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r} \right) = \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}.$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{пер} + \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r}_{пер} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}_{отн} + \vec{a}_{отн} + 2 \cdot (\vec{\omega}_{отн} \times \vec{V}_{отн}) \quad (**).$$

Переносное ускорение точки М можно получить из выражения (**) положив в нем $\vec{r} = const$:

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r} \quad (\vec{\omega}_{пер} = \vec{\varepsilon}_{пер} = 0, \quad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_O)$$

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Слагаемое $2 \cdot (\overset{\Delta}{\omega}_{пер} \times \overset{\Delta}{V}_{отн}) = \overset{\Delta}{a}_{кор}$ называется Кориолисовым (поворотным) ускорением.

Окончательно получим:

$$\overset{\Delta}{a} = \overset{\Delta}{a}_{пер} + \overset{\Delta}{a}_{отн} + \overset{\Delta}{a}_{кор} .$$

Теорема Кориолиса

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме ее переносного, относительного и Кориолисова ускорений.

- ✓ относительное ускорение точки характеризует изменение относительной скорости в относительном движении;
- ✓ переносное ускорение точки характеризует изменение переносной скорости в переносном движении;
- ✓ ускорение Кориолиса характеризует изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении.
Оно возникает вследствие взаимного влияния движений, в которых участвует точка.

ВЫЧИСЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ КОРИОЛИСА ПРАВИЛО ЖУКОВСКОГО

Модуль ускорения Кориолиса вычисляется по правилу нахождения модуля векторного произведения векторов:

$$|\vec{a}_{кор}| = 2 \cdot |\vec{\omega}_{пер}| \cdot |\vec{V}_{отн}| \cdot \sin(\vec{\omega}_{пер} \wedge \vec{V}_{отн}).$$

Из данной формулы следует, что ускорение Кориолиса обращается в нуль в следующих случаях:

а) $\vec{\omega}_{пер} = 0$ - подвижная система отсчета совершает поступательное движение;

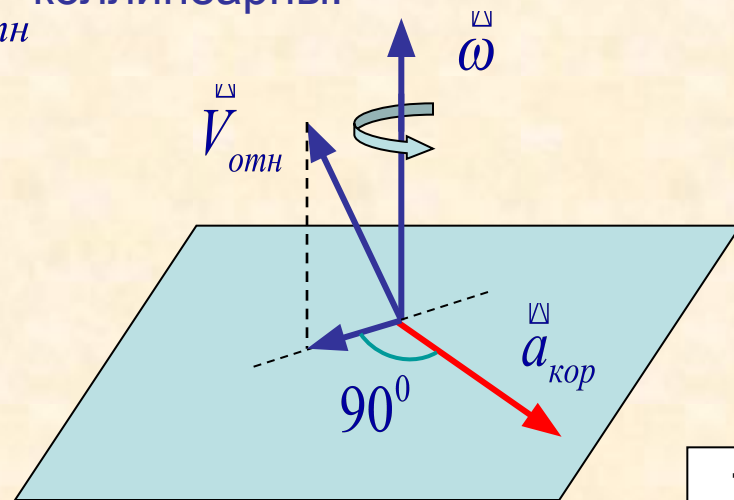
б) $\vec{V}_{отн} = 0$ - точка находится в покое в подвижной системе отсчета;

в) $\sin(\vec{\omega}_{пер} \wedge \vec{V}_{отн}) = 0$ - векторы $\vec{\omega}_{пер}$ и $\vec{V}_{отн}$ коллинеарны.

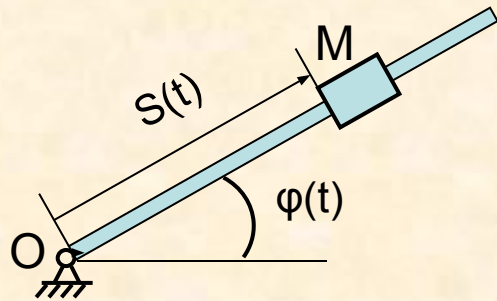
Правило Жуковского

Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо:

- спроектировать вектор относительной скорости точки на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости переносного вращательного движения и
- повернуть проекцию в ее плоскости на угол 90° в сторону переносного вращения



ПРИМЕР 2



Дано:

$$OM = s(t) = 4t - t^2 \text{ (м);}$$

$$\varphi(t) = t^2 - 3t \text{ (рад);}$$

$$t_1 = 1 \text{ с.}$$

Найти:

$$V(t_1) = ? , \quad a(t_1) = ?$$

Решение

$$OM = s(t) = 4t - t^2 \text{ (м)}$$

По теореме о сложении скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_{ПЕР} + \vec{V}_{ОТН}$$

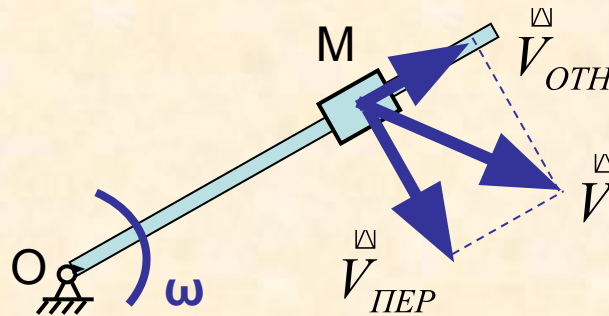
$$|\vec{V}_{ПЕР}| = \omega_{ПЕР} \cdot OM, \quad \vec{V}_{ПЕР} \perp OM;$$

$$\omega_{ПЕР} = \frac{d\varphi}{dt} = 2t - 3, \quad \omega_{ПЕР}(t_1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$|\vec{V}_{ПЕР}| = |\omega_{ПЕР}| \cdot OM = 1 \cdot 3 = 3 \text{ (м/с)};$$

$$V_{ОТН} = \frac{ds}{dt} = 4 - 2t; \quad V_{ОТН}(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \text{ (м/с)}.$$

$$V_{ОТН} \perp V_{ПЕР} \text{ ПОЭТОМУ } |\vec{V}| = \sqrt{|V_{ОТН}|^2 + |V_{ПЕР}|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ (м/с)}$$



ПРИМЕР 2 (продолжение)

По теореме о сложении ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_{ОТН}^{\tau} + \vec{a}_{ОТН}^n + \vec{a}_{ПЕР}^{\tau} + \vec{a}_{ПЕР}^n + \vec{a}_{КОР}.$$

$$a_{ОТН}^{\tau} = \frac{dV_{ОТН}}{dt} = -2 \left(\frac{M}{c^2} \right);$$

$$a_{ОТН}^n = \frac{V_{ОТН}^2}{\rho_{ОТН}} = 0. \text{ к. траектория относительного}$$

движения - прямая линия;

$$|\vec{a}_{ПЕР}^{\tau}| = \varepsilon \cdot OM, \quad \vec{a}_{ПЕР}^{\tau} \perp OM;$$

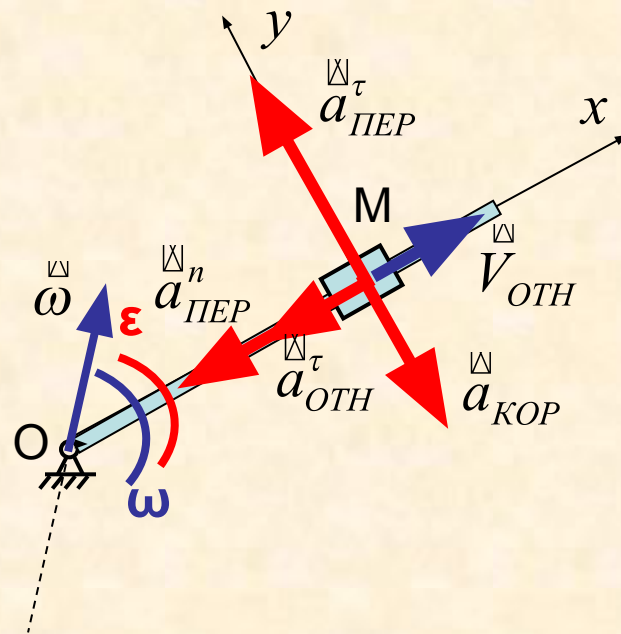
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2(c^{-2});$$

$$|\vec{a}_{ПЕР}^{\tau}| = 2 \cdot 3 = 6 \left(\frac{M}{c^2} \right);$$

$$|\vec{a}_{ПЕР}^n| = \omega^2 \cdot OM = (-1)^2 \cdot 3 = 3 \left(\frac{M}{c^2} \right);$$

$$|\vec{a}_{КОР}| = 2 \cdot |\vec{\omega}| \cdot |V_{ОТН}| \cdot \sin(\vec{\omega} \wedge V_{ОТН}) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \left(\frac{M}{c^2} \right).$$

Ответ: $V = 3,6 \left(\frac{M}{c} \right); a = 5,39 \left(\frac{M}{c^2} \right).$



$$a_{\overline{OTN}} - a_{ПЕР}^{\tau} - a^n = -2 - 3 = -5 \left(\frac{M}{c^2} \right),$$

$$a_{ПЕР}^{\tau} - a_{КОР}^{\tau} - a = 6 - 4 = 2 \left(\frac{M}{c^2} \right),$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = 5,39 \left(\frac{M}{c^2} \right).$$

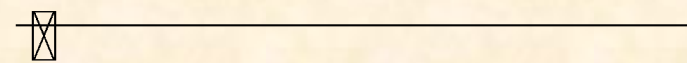
ПРИМЕР 3

$$R = 0.6 \quad ; \quad m = 0.8 \quad ;$$

$$\varphi(t) = 3t^2 - 8t \quad ;$$

$$s(t) = \overline{AM} = \frac{\pi}{3} R (2t^2 - t^3) \quad .$$

$$t_1 = 1 \text{ с}$$



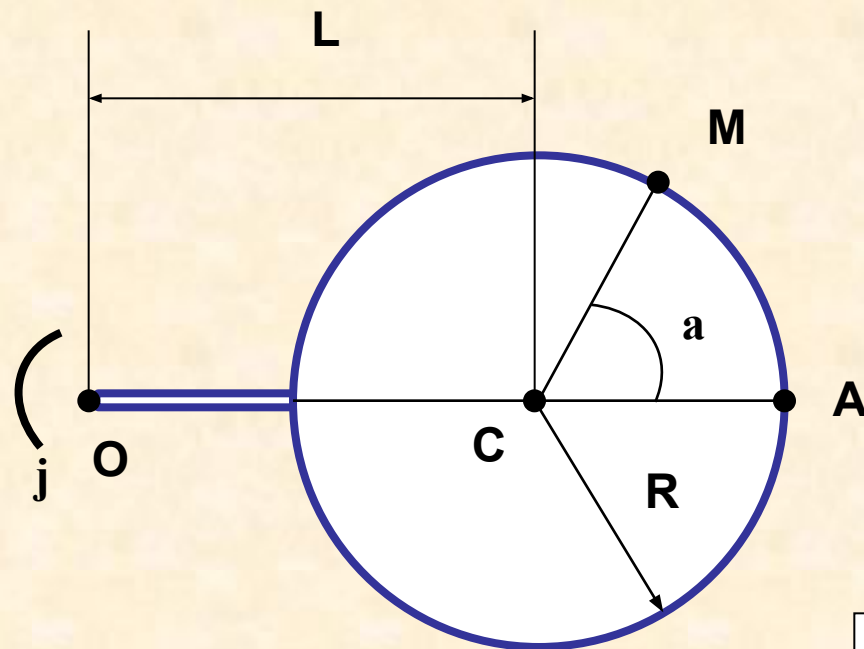
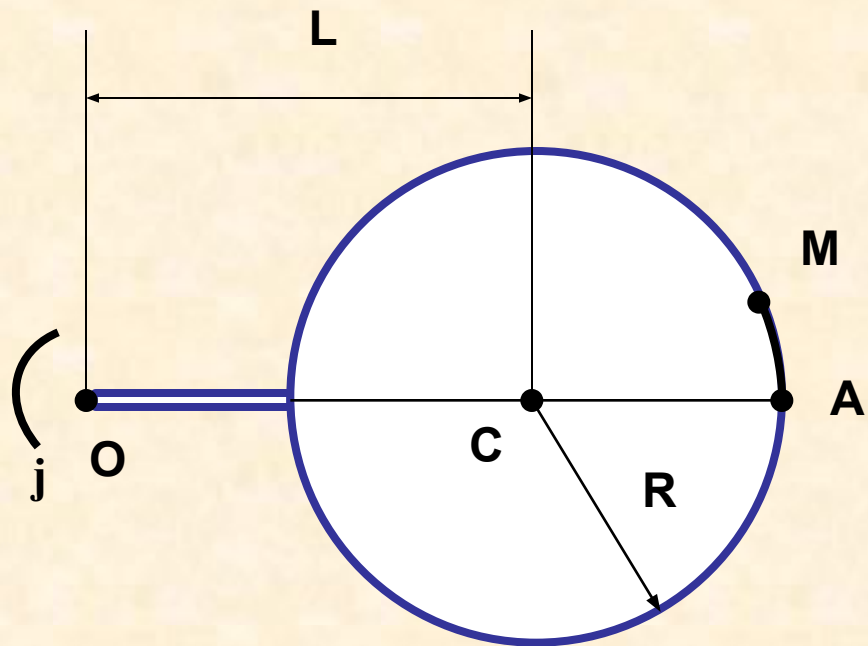
$$V_{ABC}(t_1) = ? ;$$

$$a_{ABC}(t_1) = ? .$$

Решение

1. Определим положение точки М на диске в момент t_1 .

$$\begin{cases} S(t_1) = \frac{\pi}{3} R (2 \cdot 1^2 - 1^3) = \frac{\pi}{3} R \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \\ S = R \alpha \end{cases}$$



ПРИМЕР 3 (продолжение)

2. Абсолютную скорость точки найдем по теореме о сложении скоростей:

$$\vec{V}_{ABC} = \vec{V}_{ПЕР} + \vec{V}_{ОТН}$$

$$|\vec{OM}_{ПЕР}| = \omega_{ПЕР} OM, \quad \vec{V}_{ПЕР} \perp$$

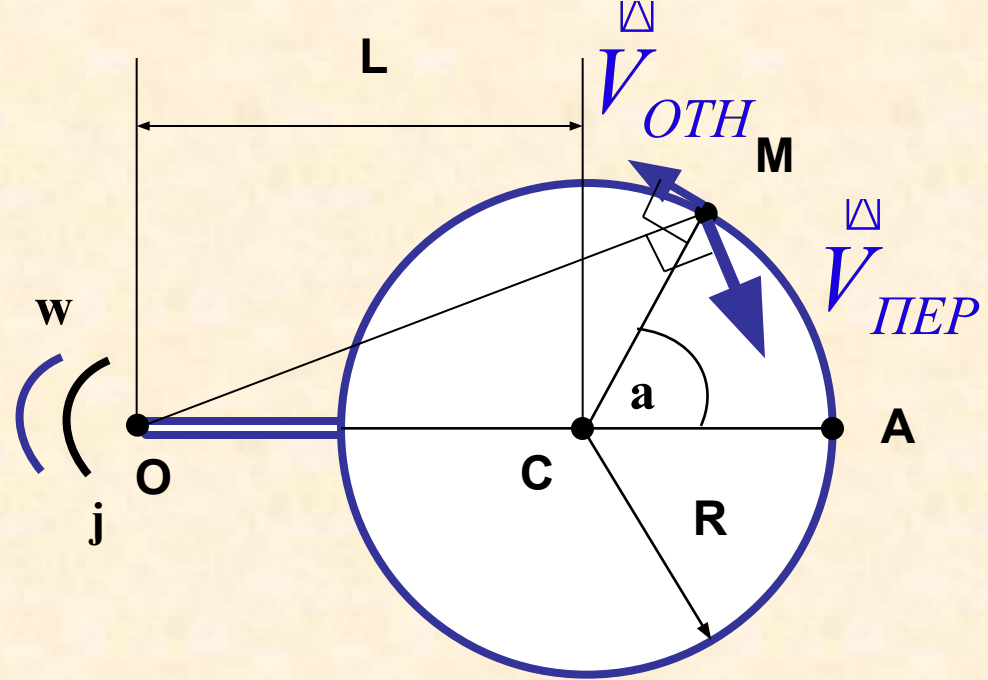
$$OM = \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR \cos 120^\circ} =$$

$$= \sqrt{0.8^2 + 0.6^2 + 2 \cdot 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.5} = \sqrt{1.48} = 1.22 \text{ м}$$

$$\omega_{ПЕР} = \dot{\varphi} = 6t - 8; \quad \omega_{ПЕР}(t_1) = 6 \cdot 1 - 8 = -2 \text{ с}^{-1}$$

$$|\vec{OM}_{пер}| = |\omega_{пер}| = 2 \cdot 1.22 = 2.44 \quad /$$

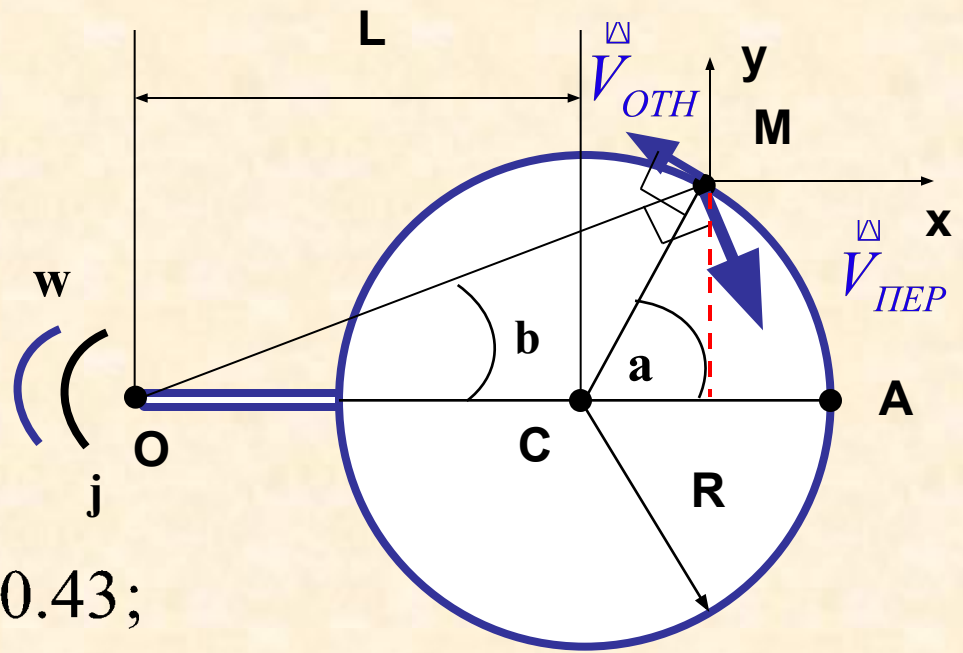
$$V_{отн} = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi R}{3} (4t - 3t^2); \quad M_{отн} c(t_1) = 0.63 \quad /$$



ПРИМЕР 3 (продолжение)

$$V_{\text{вер}} = V \sin \beta - V \sin \alpha,$$

$$V_{\text{вер}} = -V \cos \beta + V \cos \alpha.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \beta = \frac{R \sin \alpha}{OM} = \frac{0.6 \cdot 0.866}{1.22} = 0.43; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta = \frac{R \cos \alpha + L}{OM} = \frac{0.6 \cdot 0.5 + 0.8}{1.22} = 0.9. \end{array} \right.$$

$$V_X = 2.44 \cdot 0.43 - 0.63 \cdot 0.866 = 0.5$$

$$V_Y = -2.44 \cdot 0.9 + 0.63 \cdot 0.5 = -1.88$$

$$|M_{abc}^{\perp}| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{0.5^2 + 1.88^2} = 1.95 \quad /$$

ПРИМЕР 3 (продолжение)

3. Абсолютное ускорение точки определим по теореме Кориолиса:

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{nep} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор}$$

$$\vec{a}_{nep} = \vec{a}_{nep}^{\tau} + \vec{a}_{nep}^n$$

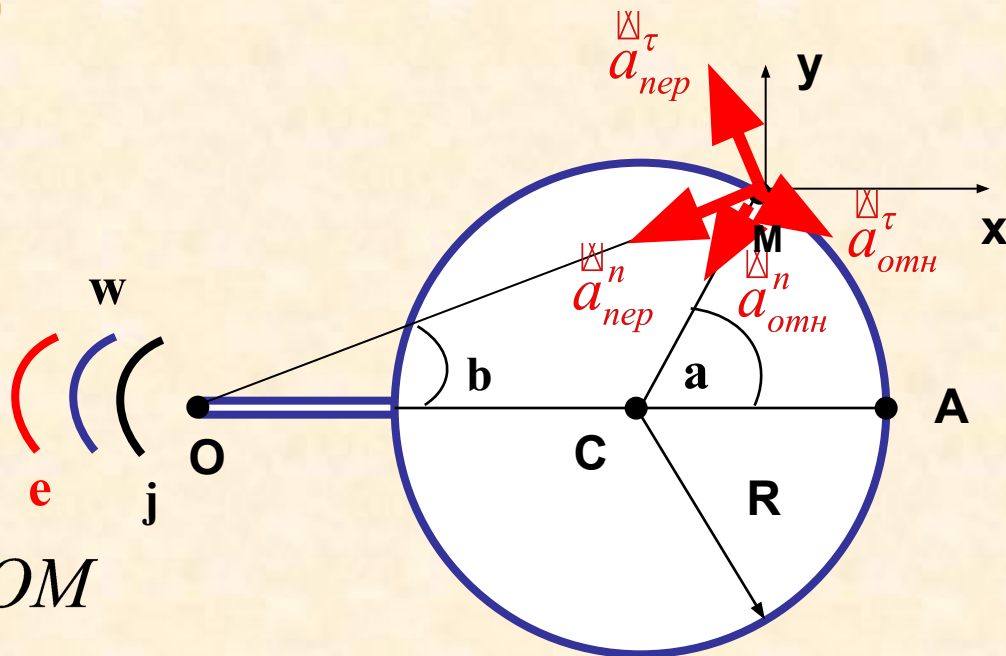
$$|\vec{a}_{nep}^{\tau}| = |\varepsilon_{nep}| OM, \quad |\vec{a}_{nep}^n| = \omega_{nep}^2 OM$$

$$\varepsilon_{nep} = \dot{\omega}_{nep} = 6t \text{ cек} \quad \varepsilon_{nep}(t_1) = 6 \cdot 1 = 6 \quad \text{с}^{-2}$$

$$|\vec{a}_{nep}^{\tau}| = 6 \cdot 1.22 = 7.32 \quad / \quad ; \quad |\vec{a}_{nep}^n| = 2^2 \cdot 1.22 = 4.88 \quad / \quad \text{с}^2.$$

$$\vec{a}_{отн}^{\tau} = \frac{dV_{отн}}{dt} = \frac{\pi R}{3} (4 - 6t); \quad a_{отн}^{\tau}(t_1) = \frac{\pi R}{3} (4 - 6 \cdot 1) = -1.26 \quad / \quad \text{с}^2$$

$$\vec{a}_{отн}^n = \frac{V_{отн}^2}{\rho_{отн}} = \frac{V_{отн}^2}{R} = \frac{0.63^2}{0.6} = 0.66 \quad / \quad \text{с}^2$$



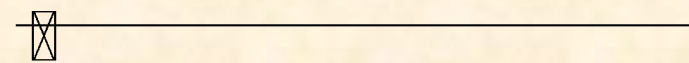
ПРИМЕР 4

$$R = 0.6 \quad ; \quad m = 0.8 \quad ;$$

$$\varphi(t) = 3t^2 - 8t \quad ;$$

$$s(t) = AM = \frac{\pi}{3} R(2t^2 - t^3) \quad .$$

$$t_1 = 1 \text{ с}$$



$$V_{ABC}(t_1) = ? ;$$

$$a_{ABC}(t_1) = ? .$$

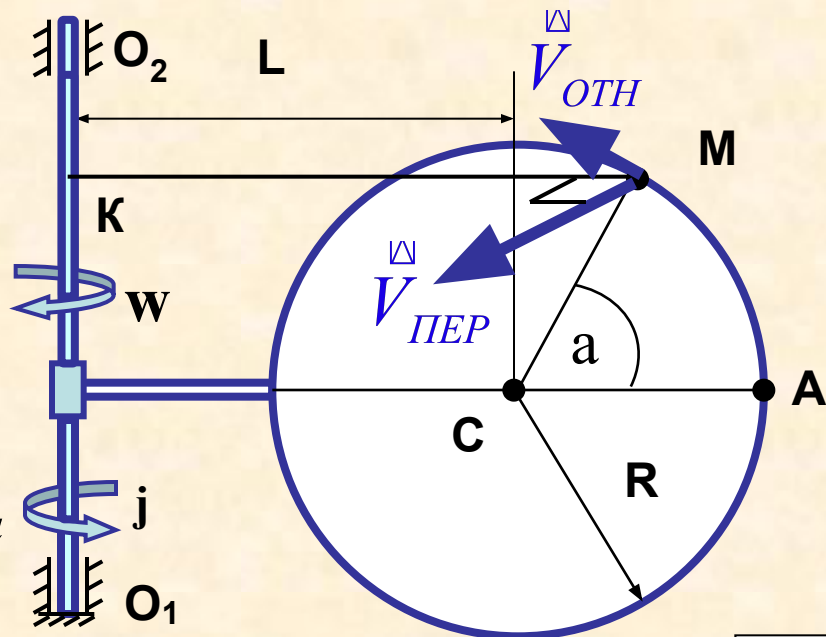
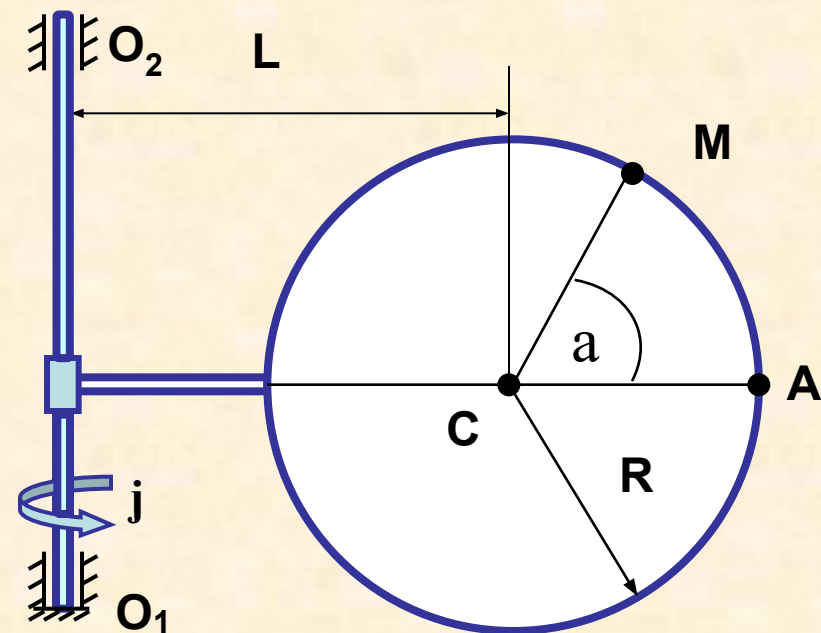
Относительное движение остается прежним.

$$|M_{пер}| \neq |\omega_{пер}| KM, \quad \perp$$

$$KM = L + R \cos \alpha = 0.8 + 0.6 \cdot 0.5 = 1.1$$

$$|M_{пер}| = 2 \cdot 1.1 = 2.2 \quad / \quad ; \quad V_{пер} \perp V_{отн}$$

$$|M_{abc}| = \sqrt{|V_{пер}|^2 + |V_{отн}|^2} = \sqrt{2.2^2 + 0.63^2} = 2.28 \quad /$$



ПРИМЕР4 (продолжение)

2. Переносное ускорение

$$|\mathbf{a}_{пер}^{\tau}| = |\varepsilon_{пер}| KM = 6 \cdot 1.1 = 6.6 \quad / \quad ^2$$

$$|\mathbf{a}_{пер}^n}| = \omega_{пер}^2 \cdot KM = 2^2 \cdot 1.1 = 4.4 \quad / \quad ^2$$

3. Ускорение Кориолиса

$$|\mathbf{a}_{кор}| = 2 \cdot |\omega_{пер}| \cdot |V_{отн}| \sin(\omega_{пер} \wedge V_{отн})$$

$$|\mathbf{a}_{кор}| = 2 \cdot |\omega_{пер}| \cdot |V_{отн}| \sin 120^\circ =$$

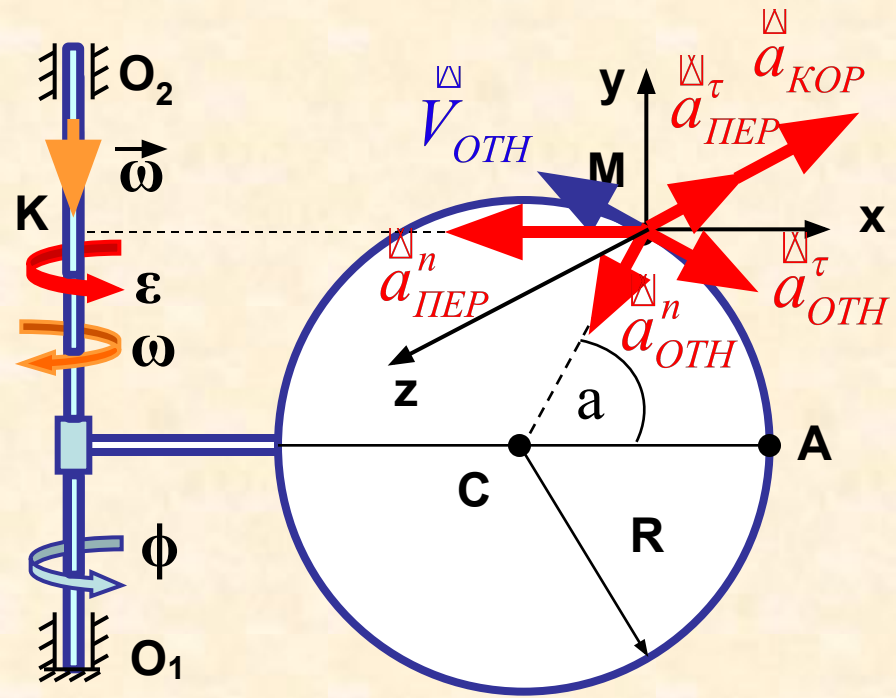
$$= 2 \cdot 2 \cdot 0.63 \cdot 0.866 = 2.18 \text{ м/с}^2$$

$$a_{x_{отн}} = -a_{пер}^n \cos \alpha - a_{отн}^n + a_{пер}^{\tau} \sin \alpha = -0.66 \cdot 0.5 - 4.4 + 1.26 \cdot 0.866 = -3.64 \quad / \quad ^2,$$

$$a_{y_{отн}} = -a_{пер}^n \sin \alpha - a_{отн}^{\tau} \cos \alpha = -0.66 \cdot 0.866 - 1.26 \cdot 0.5 = 1.2 \quad / \quad ^2,$$

$$a_{z_{пер}} = -a_{кор}^{\tau} - a = -6.6 - 2.18 = -8.78 \quad / \quad ^2.$$

$$|\mathbf{a}_{abc}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3.64^2 + 1.2^2 + 8.78^2} = 9.58 \quad / \quad ^2$$



НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ



Никола́й Егорович Жуко́вский
(5 (17) января 1847 с. Орехово,
ныне Владимирской области –
17 марта 1921, Москва)

Русский ученый-механик, создатель аэродинамики как науки. Заслуженный профессор Московского университета, профессор теоретической механики Императорского Московского технического училища (с 1918 г. — МВТУ). В 1894 г. Жуковский был избран членом-корреспондентом Академии наук по разряду математических наук . При его активном участии были созданы Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), Московский авиатехникум (Военно-воздушная академия).

Гюстав Гаспар Кориолис (Coriolis G.G., 21.05.1792 – 19.09.1843)



Родился в Париже в 1792г.
В 1810 г. окончил Политехническую школу, а в 1812 г. Школу мостов и дорог. С 1816 г. начал преподавать в Политехнической школе, где вскоре стал профессором, а в 1831 г. – директором учебной части школы. Преподавал также в Центральной школе искусств и ремесел и в Школе мостов и дорог. В 1836 г. был избран в Парижскую академию наук