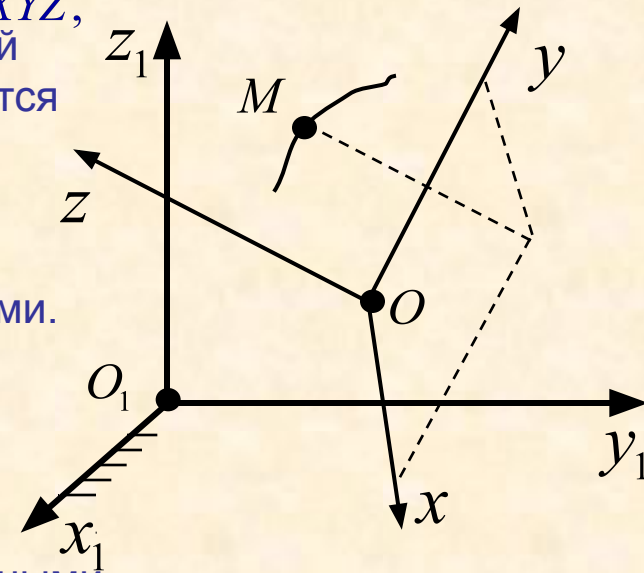


# СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Пусть точка  $M$  движется относительно системы отсчета  $OXYZ$ , которая в свою очередь, движется относительно неподвижной системы отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$ . Такое движение точки  $M$  называется составным или сложным.



● Движение точки  $M$  относительно неподвижной системы отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$  называется абсолютным, а траектория, скорость и ускорение точки  $M$  в этом движении – абсолютными.

● Обозначения:  $(\vec{v}_{abs}, \vec{a}_{abs})$   $(\vec{v}, \vec{a})$ .

● Движение точки  $M$  относительно подвижной системы отсчета  $OXYZ$  называется относительным, а траектория, скорость и ускорение точки  $M$  в этом движении – относительными.

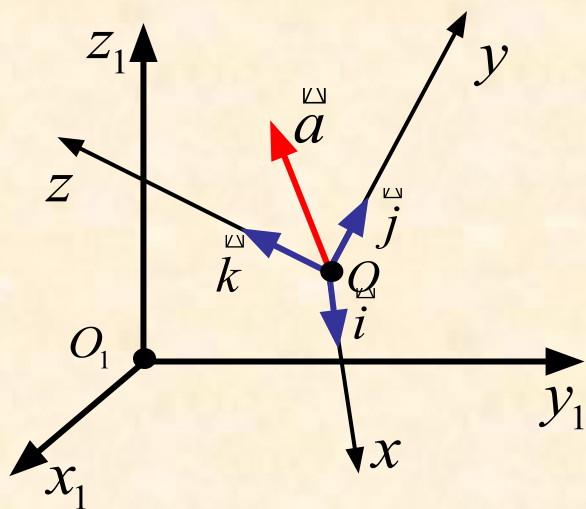
● Обозначения:  $(\vec{v}_{отн}, \vec{a}_{отн})$   $(\vec{v}_r, \vec{a}_r)$ .

● Движение точки  $M$  вместе с подвижной системой отсчета  $OXYZ$  относительно неподвижной системы отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$  называется переносным, а скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета  $OXYZ$ , с которой совпадает движущаяся точка  $M$  в данный момент времени – переносными.

● Обозначения:  $(\vec{v}_{пер}, \vec{a}_{пер})$   $(\vec{v}_e, \vec{a}_e)$ .

● Основной задачей кинематики сложного движения точки является установление зависимостей между скоростями и ускорениями абсолютного, относительного и переносного движений.

# АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕКТОРА



Пусть вектор  $\overset{\Delta}{a}$  задан в подвижной системе отсчета  $OXYZ$ :  $\overset{\Delta}{a}(t) = a_x(t) \cdot \overset{\Delta}{i} + a_y(t) \cdot \overset{\Delta}{j} + a_z(t) \cdot \overset{\Delta}{k}$ .

Определим правило нахождения производной этого вектора в неподвижной системе отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$  – (абсолютной производной), учитывая, что единичные векторы  $\overset{\Delta}{i}$ ,  $\overset{\Delta}{j}$ ,  $\overset{\Delta}{k}$  меняют свое направление вследствие движения подвижной системы отсчета  $OXYZ$ .

$$\frac{d\overset{\Delta}{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \overset{\Delta}{i} + \frac{da_y}{dt} \overset{\Delta}{j} + \frac{da_z}{dt} \overset{\Delta}{k} + a_x \frac{d\overset{\Delta}{i}}{dt} + a_y \frac{d\overset{\Delta}{j}}{dt} + a_z \frac{d\overset{\Delta}{k}}{dt}$$

Обозначим  $\frac{da_x}{dt} \overset{\Delta}{i} + \frac{da_y}{dt} \overset{\Delta}{j} + \frac{da_z}{dt} \overset{\Delta}{k} = \frac{d\overset{\Delta}{a}}{dt}$  – относительная производная вектора  $\overset{\Delta}{a}$ .

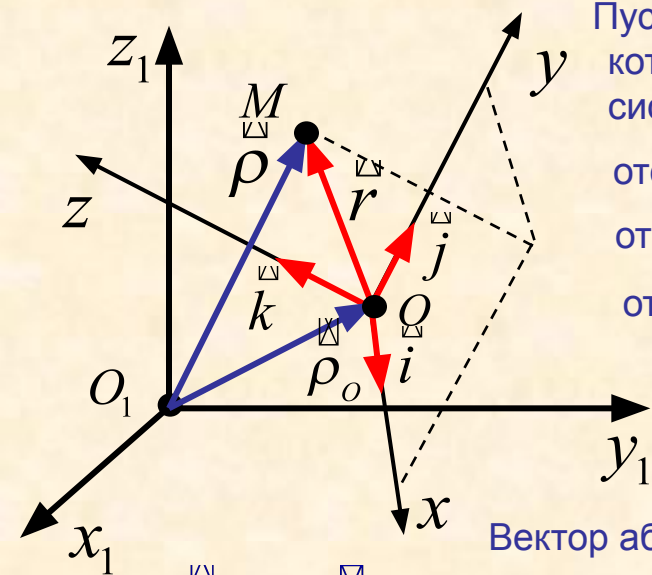
По формуле Эйлера  $\frac{d\overset{\Delta}{i}}{dt} = \omega \times \overset{\Delta}{i}$ ,  $\frac{d\overset{\Delta}{j}}{dt} = \omega \times \overset{\Delta}{j}$ ,  $\frac{d\overset{\Delta}{k}}{dt} = \omega \times \overset{\Delta}{k}$ , поэтому выражение

$$a_x \frac{d\overset{\Delta}{i}}{dt} + a_y \frac{d\overset{\Delta}{j}}{dt} + a_z \frac{d\overset{\Delta}{k}}{dt} = \omega \times (a_x \cdot \overset{\Delta}{i} + a_y \cdot \overset{\Delta}{j} + a_z \cdot \overset{\Delta}{k}) = \omega \times \overset{\Delta}{a}. \text{ Окончательно}$$

получим: 
$$\frac{d\overset{\Delta}{a}}{dt} = \frac{d\overset{\Delta}{a}}{dt} + \omega \times \overset{\Delta}{a}.$$

**Абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной и векторного произведения угловой скорости подвижной системы отсчета на этот вектор.**

# ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ



Пусть точка М движется относительно подвижной системы отсчета  $OXYZ$ , которая совершает произвольное движение относительно неподвижной системы отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$ . Положение точки М в подвижной системе отсчета задается радиусом – вектором  $\vec{r}$ , а в неподвижной системе отсчета радиусом – вектором  $\vec{\rho}$ . Положение начала подвижной системы отсчета задается радиусом – вектором  $\vec{\rho}_0$ . Тогда:

$$\forall t > 0, \vec{\rho} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}, \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Вектор абсолютной скорости точки М: 
$$\vec{V} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt},$$

где  $\frac{d\vec{\rho}_0}{dt} = \vec{V}_0$  – скорость начала подвижной системы отсчета.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \vec{V}_{отн}.$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер} + \vec{\omega} \times \vec{r} (*)$$

Переносную скорость точки М можно получить

из (\*), если зафиксировать положение точки в подвижной системе отсчета: положить  $\vec{r} = const$ :

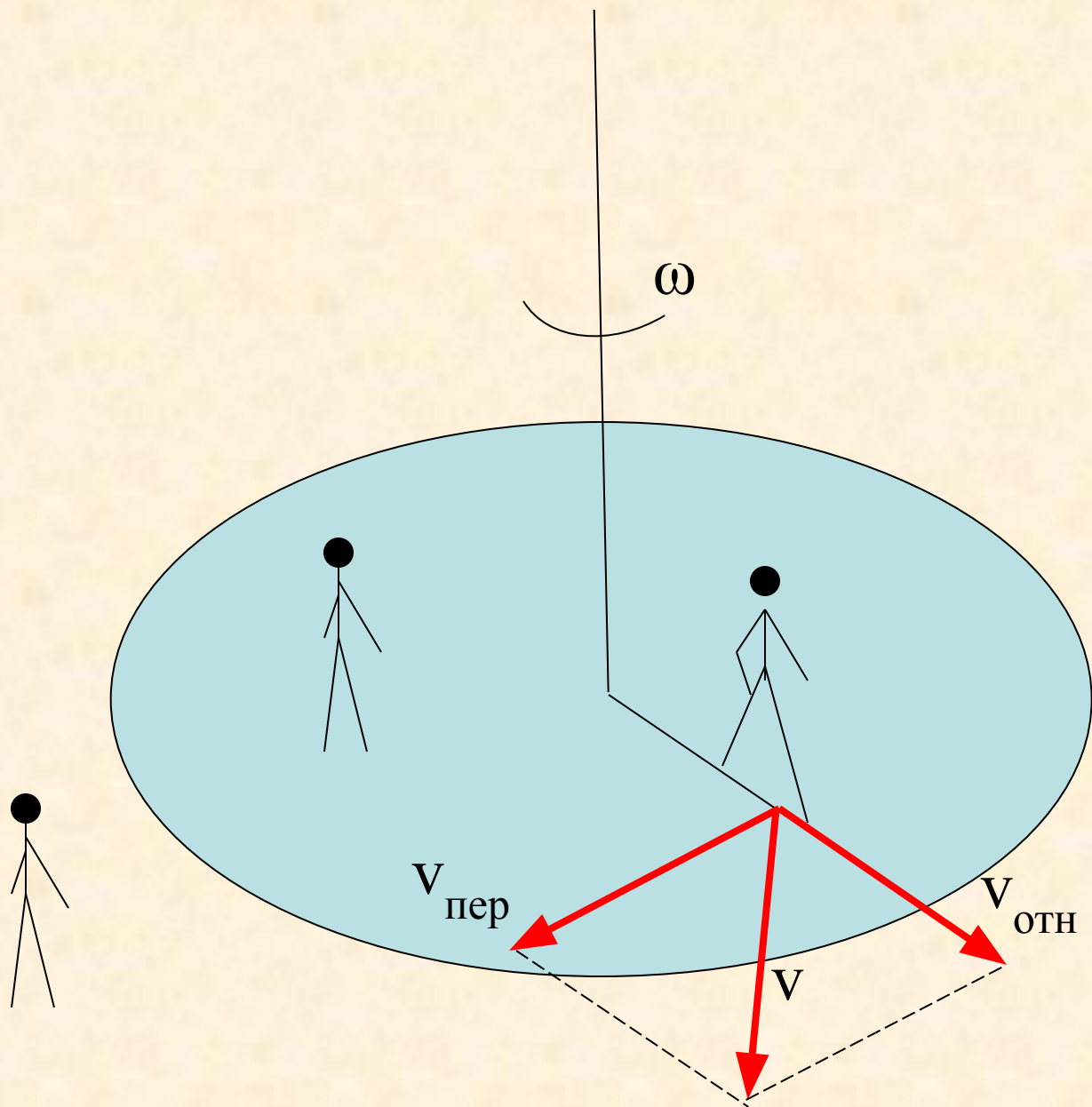
$$\vec{V}_{пер} = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}.$$

Заметим, что это скорость точки свободного твердого тела.

Окончательно 
$$\vec{V} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн} \quad (\text{при } \vec{\omega}_{пер} = 0, \vec{V}_{пер} = \vec{V}_0).$$

**Абсолютная скорость точки равна векторной сумме переносной и относительной скорости.**

# ПРИМЕР 1



# ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Для нахождения абсолютного ускорения точки М продифференцируем по времени выражение (\*) учитывая, что векторы  $\vec{V}_{отн}$  и  $\vec{r}$  заданы в подвижной системе отсчета.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{пер} \times \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{где}$$

$$\frac{d\vec{V}_O}{dt} = \vec{a}_O \quad \text{- ускорение начала подвижной системы отсчета;} \quad \frac{d\vec{\omega}_{пер}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r};$$

$$\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} +$$

$$+ \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн} = \vec{a}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн};$$

$$\vec{\omega}_{пер} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}_{пер} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r} \right) = \vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}.$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{пер} + \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r}_{пер} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r}_{отн} + \vec{a}_{отн} + 2 \cdot (\vec{\omega}_{отн} \times \vec{V}_{отн}) \quad (**).$$

Переносное ускорение точки М можно получить из выражения (\*\*) положив в нем  $\vec{r} = const$ :

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{пер} \times \vec{r} \quad (\vec{\omega}_{пер} = \vec{\varepsilon}_{пер} = 0, \quad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_O)$$



# ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Слагаемое  $2 \cdot (\overset{\Delta}{\omega}_{пер} \times \overset{\Delta}{V}_{отн}) = \overset{\Delta}{a}_{кор}$  называется Кориолисовым (поворотным) ускорением.

Окончательно получим:

$$\overset{\Delta}{a} = \overset{\Delta}{a}_{пер} + \overset{\Delta}{a}_{отн} + \overset{\Delta}{a}_{кор} .$$

## **Теорема Кориолиса**

Абсолютное ускорение точки равно векторной сумме ее переносного, относительного и Кориолисова ускорений.

- ✓ относительное ускорение точки характеризует изменение относительной скорости в относительном движении;
- ✓ переносное ускорение точки характеризует изменение переносной скорости в переносном движении;
- ✓ ускорение Кориолиса характеризует изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении.  
Оно возникает вследствие взаимного влияния движений, в которых участвует точка.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ КОРИОЛИСА ПРАВИЛО ЖУКОВСКОГО

Модуль ускорения Кориолиса вычисляется по правилу нахождения модуля векторного произведения векторов:

$$|\vec{a}_{кор}| = 2 \cdot |\vec{\omega}_{пер}| \cdot |\vec{V}_{отн}| \cdot \sin(\angle \vec{\omega}_{пер} \wedge \vec{V}_{отн}).$$

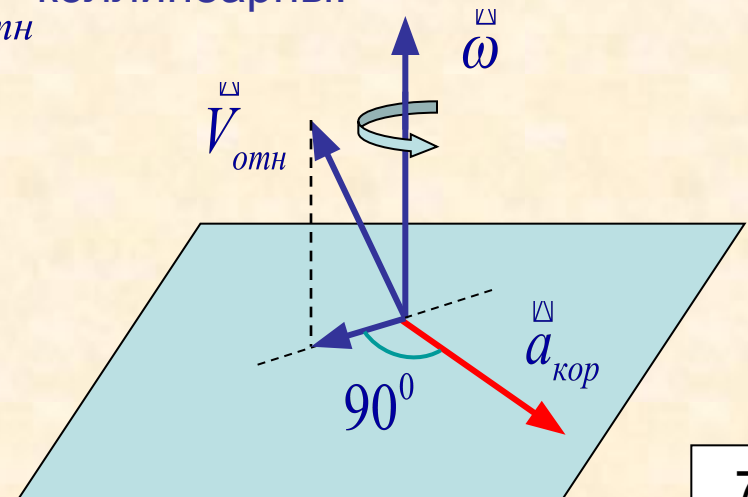
Из данной формулы следует, что ускорение Кориолиса обращается в нуль в следующих случаях:

- $\vec{\omega}_{пер} = 0$  - подвижная система отсчета совершает поступательное движение;
- $\vec{V}_{отн} = 0$  - точка находится в покое в подвижной системе отсчета;
- $\sin(\angle \vec{\omega}_{пер} \wedge \vec{V}_{отн}) = 0$  - векторы  $\vec{\omega}_{пер}$  и  $\vec{V}_{отн}$  коллинеарны.

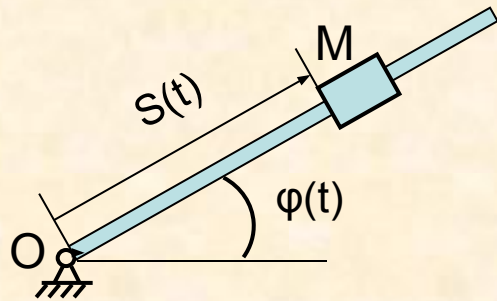
## Правило Жуковского

Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо:

- спроектировать вектор относительной скорости точки на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости переносного вращательного движения и
- повернуть проекцию в ее плоскости на угол  $90^\circ$  в сторону переносного вращения



## ПРИМЕР 2



Дано:

$$OM = s(t) = 4t - t^2 \text{ (м);}$$

$$\varphi(t) = t^2 - 3t \text{ (рад);}$$

$$t_1 = 1 \text{ с.}$$

Найти:

$$V(t_1) = ? , \quad a(t_1) = ?$$

Решение

$$OM = s(t) = 4t - t^2 \text{ (м)}$$

По теореме о сложении скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_{ПЕР} + \vec{V}_{ОТН}$$

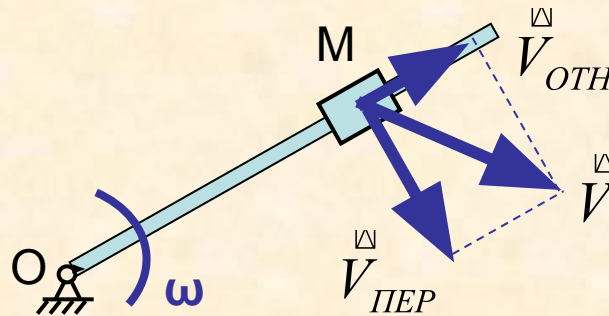
$$|\vec{V}_{ПЕР}| = \omega_{ПЕР} \cdot OM, \quad \vec{V}_{ПЕР} \perp OM;$$

$$\omega_{ПЕР} = \frac{d\varphi}{dt} = 2t - 3, \quad \omega_{ПЕР}(t_1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$|\vec{V}_{ПЕР}| = |\omega_{ПЕР}| \cdot OM = 1 \cdot 3 = 3 \text{ (м/с)};$$

$$V_{ОТН} = \frac{ds}{dt} = 4 - 2t; \quad V_{ОТН}(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \text{ (м/с)}.$$

$$V_{ОТН} \perp V_{ПЕР} \text{ ПОЭТОМУ } |\vec{V}| = \sqrt{|V_{ОТН}|^2 + |V_{ПЕР}|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3,6 \text{ (м/с)}$$





## ПРИМЕР 2 (продолжение)

По теореме о сложении ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_{ОТН}^{\tau} + \vec{a}_{ОТН}^n + \vec{a}_{ПЕР}^{\tau} + \vec{a}_{ПЕР}^n + \vec{a}_{КОР}.$$

$$a_{ОТН}^{\tau} = \frac{dV_{ОТН}}{dt} = -2 \left( \frac{M}{c^2} \right);$$

$$a_{ОТН}^n = \frac{V_{ОТН}^2}{\rho_{ОТН}} = 0. \text{ к. траектория относительного}$$

движения - прямая линия;

$$|\vec{a}_{ПЕР}^{\tau}| = \varepsilon \cdot OM, \quad \vec{a}_{ПЕР}^{\tau} \perp OM;$$

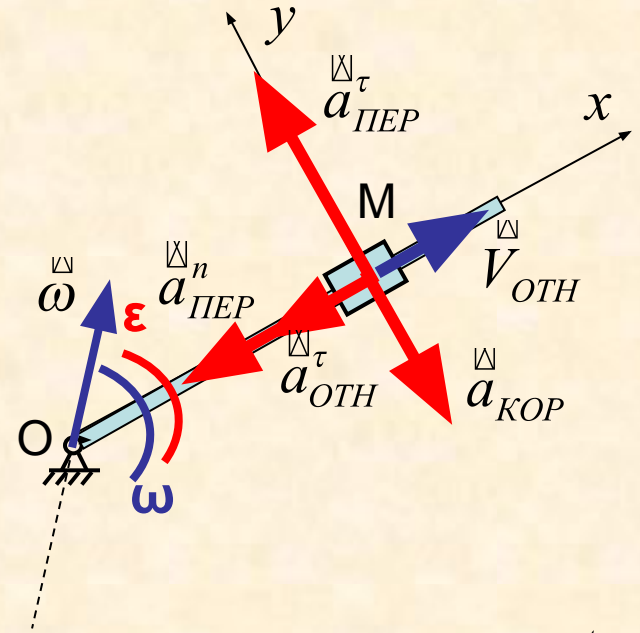
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2(c^{-2});$$

$$|\vec{a}_{ПЕР}^{\tau}| = 2 \cdot 3 = 6 \left( \frac{M}{c^2} \right);$$

$$|\vec{a}_{ПЕР}^n| = \omega^2 \cdot OM = (-1)^2 \cdot 3 = 3 \left( \frac{M}{c^2} \right);$$

$$|\vec{a}_{КОР}| = 2 \cdot |\vec{\omega}| \cdot |V_{ОТН}| \cdot \sin(\vec{\omega} \wedge V_{ОТН}) = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \left( \frac{M}{c^2} \right).$$

$$\text{Ответ: } V = 3,6 \left( \frac{M}{c} \right); \quad a = 5,39 \left( \frac{M}{c^2} \right).$$



$$a_{\overline{OTN}} - a_{ПЕР}^{\tau} - a^n = -2 - 3 = -5 \left( \frac{M}{c^2} \right),$$

$$a_{ПЕР}^{\tau} - a_{КОР}^{\tau} - a = 6 - 4 = 2 \left( \frac{M}{c^2} \right),$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = 5,39 \left( \frac{M}{c^2} \right).$$

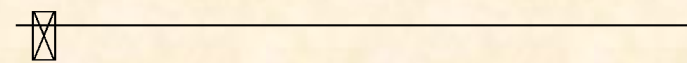
### ПРИМЕР 3

$$R = 0.6 \quad ; \quad m = 0.8 \quad ;$$

$$\varphi(t) = 3t^2 - 8t \quad ;$$

$$s(t) = \overline{AM} = \frac{\pi}{3} R (2t^2 - t^3) \quad .$$

$$t_1 = 1 \text{ c}$$



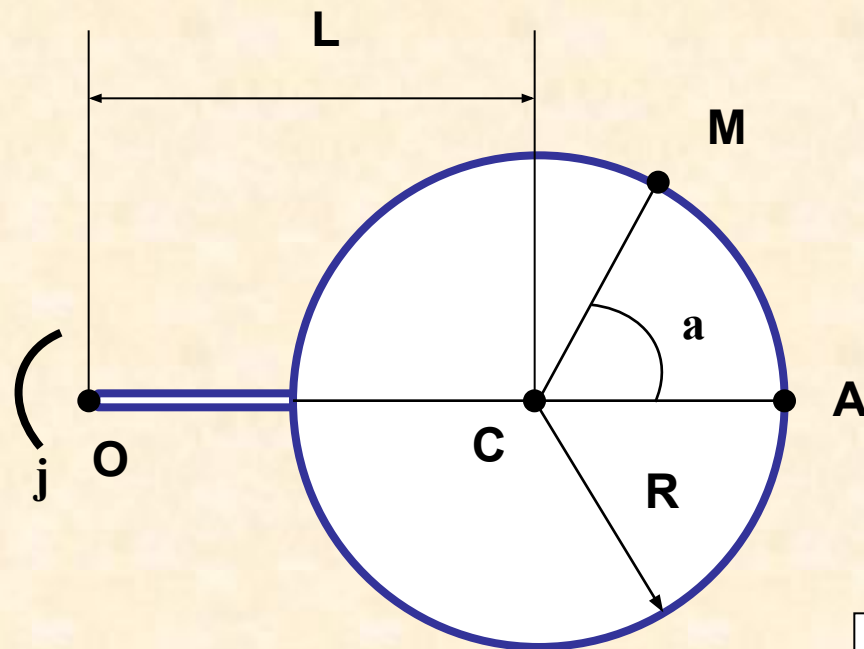
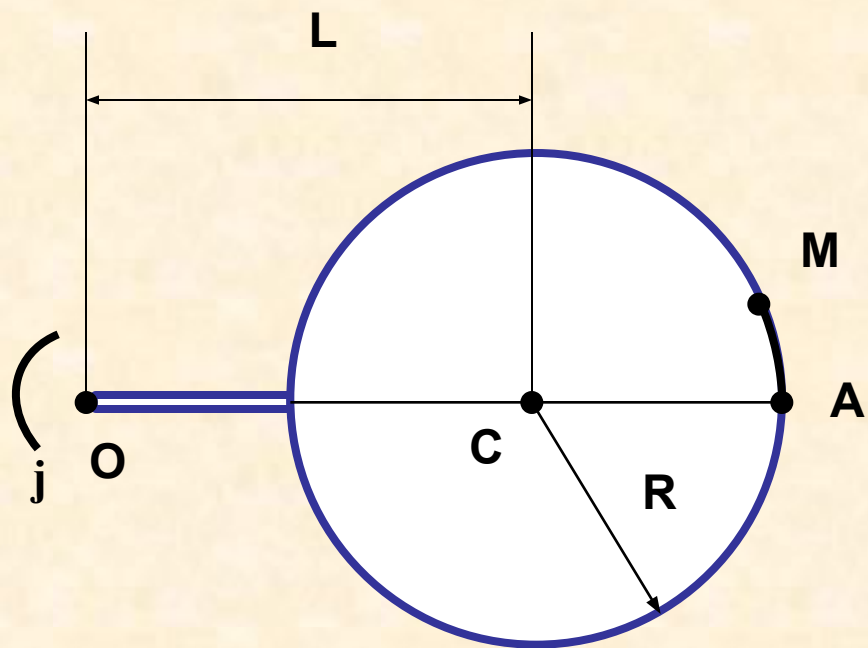
$$V_{ABC}(t_1) = ? ;$$

$$a_{ABC}(t_1) = ? .$$

Решение

1. Определим положение точки М на диске в момент  $t_1$ .

$$\begin{cases} S(t_1) = \frac{\pi}{3} R (2 \cdot 1^2 - 1^3) = \frac{\pi}{3} R \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \\ S = R \alpha \end{cases}$$



### ПРИМЕР 3 (продолжение)

2. Абсолютную скорость точки найдем по теореме о сложении скоростей:

$$\vec{V}_{ABC} = \vec{V}_{ПЕР} + \vec{V}_{ОТН}$$

$$|\vec{OM}_{ПЕР}| = \omega_{ПЕР} OM, \quad \vec{V}_{ПЕР} \perp$$

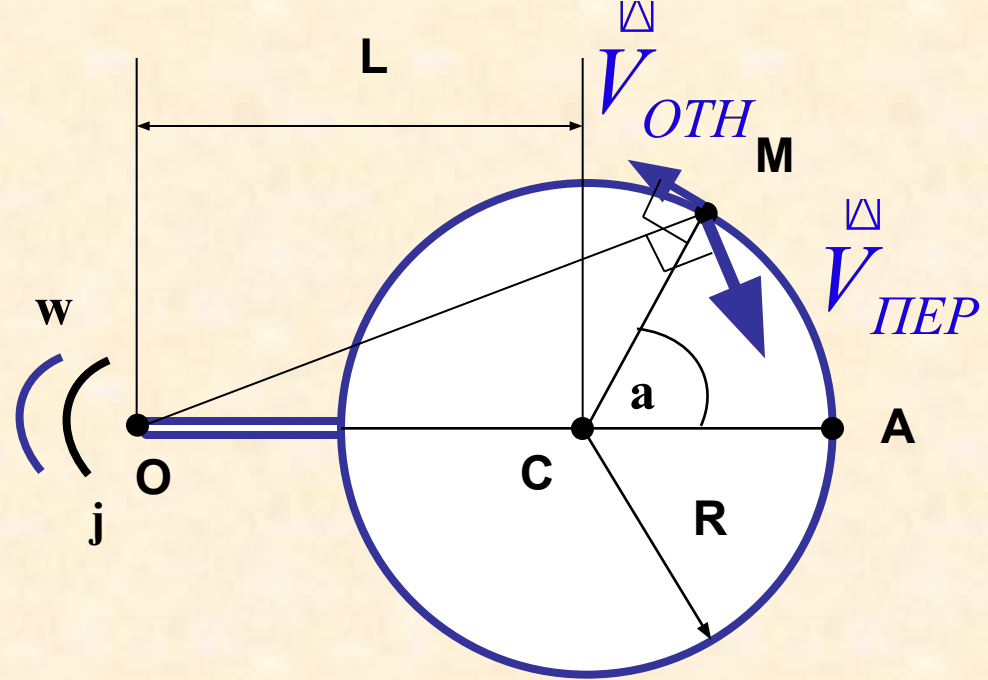
$$OM = \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR \cos 120^\circ} =$$

$$= \sqrt{0.8^2 + 0.6^2 + 2 \cdot 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.5} = \sqrt{1.48} = 1.22 \text{ м}$$

$$\omega_{ПЕР} = \dot{\varphi} = 6t - 8; \quad \omega_{ПЕР}(t_1) = 6 \cdot 1 - 8 = -2 \text{ с}^{-1}$$

$$|\vec{OM}_{пер}| = |\omega_{пер}| = 2 \cdot 1.22 = 2.44 \quad /$$

$$V_{отн} = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi R}{3} (4t - 3t^2); \quad M_{отн} c(t_1) = 0.63 \quad /$$





## ПРИМЕР 3 (продолжение)

3. Абсолютное ускорение точки определим по теореме Кориолиса:

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{nep} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор}$$

$$\vec{a}_{nep} = \vec{a}_{nep}^{\tau} + \vec{a}_{nep}^n$$

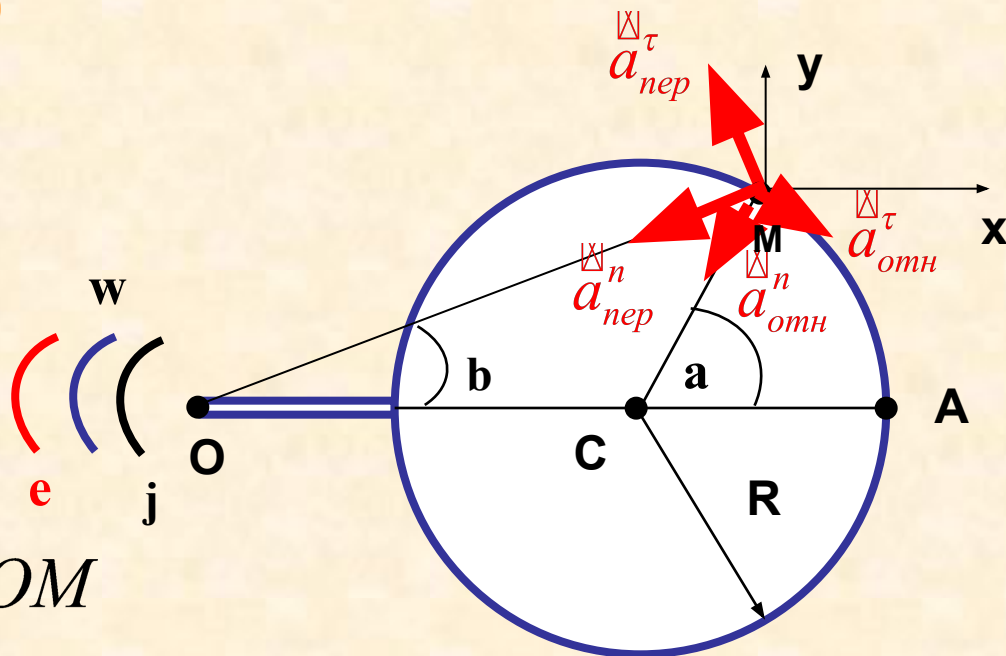
$$|\vec{a}_{nep}^{\tau}| = |\varepsilon_{nep}| OM, \quad |\vec{a}_{nep}^n| = \omega_{nep}^2 OM$$

$$\varepsilon_{nep} = \dot{\omega}_{nep} = 6t \text{ cек} \quad \varepsilon_{nep}(t_1) = 6 \cdot 1 = 6 \quad \text{с}^{-2}$$

$$|\vec{a}_{nep}^{\tau}| = 6 \cdot 1.22 = 7.32 \quad / \quad ; \quad |\vec{a}_{nep}^n| = 2^2 \cdot 1.22 = 4.88 \quad / \quad \text{с}^2.$$

$$\vec{a}_{отн}^{\tau} = \frac{dV_{отн}}{dt} = \frac{\pi R}{3} (4 - 6t); \quad a_{отн}^{\tau}(t_1) = \frac{\pi R}{3} (4 - 6 \cdot 1) = -1.26 \quad / \quad \text{с}^2$$

$$\vec{a}_{отн}^n = \frac{V_{отн}^2}{\rho_{отн}} = \frac{V_{отн}^2}{R} = \frac{0.63^2}{0.6} = 0.66 \quad / \quad \text{с}^2$$







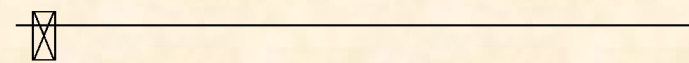
## ПРИМЕР 4

$$R = 0.6 \quad ; \quad m = 0.8 \quad ;$$

$$\varphi(t) = 3t^2 - 8t \quad ;$$

$$s(t) = AM = \frac{\pi}{3} R(2t^2 - t^3) \quad .$$

$$t_1 = 1 \text{ c}$$



$$V_{ABC}(t_1) = ? ;$$

$$a_{ABC}(t_1) = ? .$$

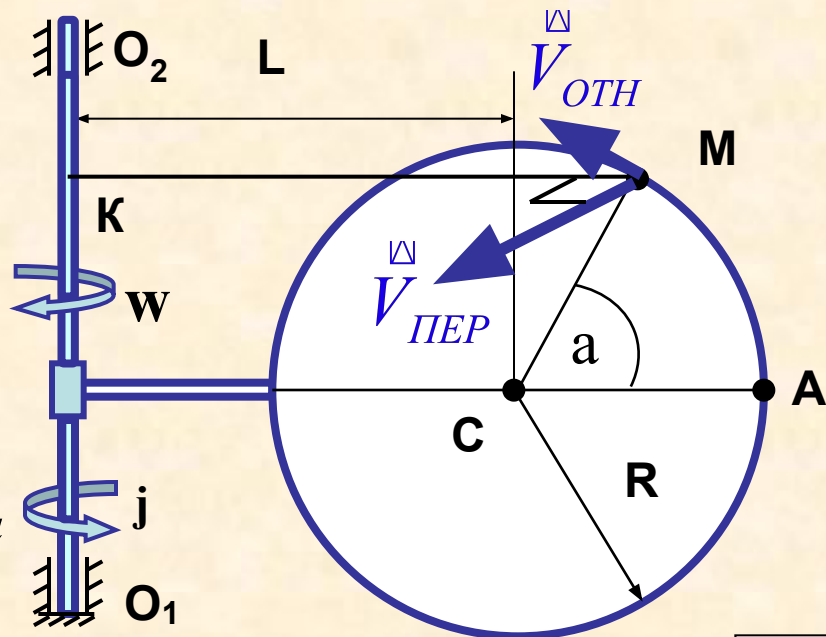
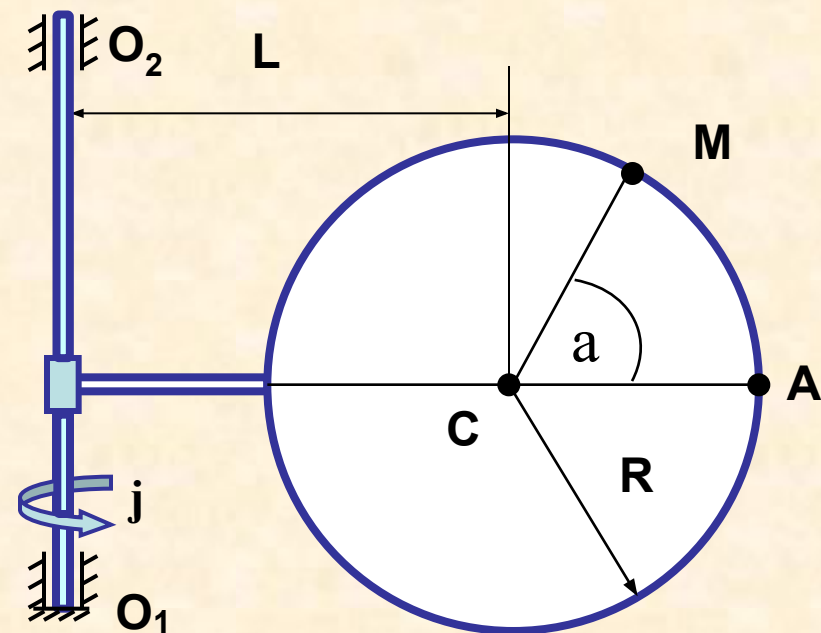
Относительное движение остается прежним.

$$|M_{пер}| \neq |\omega_{пер}| KM, \quad \perp$$

$$KM = L + R \cos \alpha = 0.8 + 0.6 \cdot 0.5 = 1.1$$

$$|M_{пер}| = 2 \cdot 1.1 = 2.2 \quad / ; \quad V_{пер} \perp V_{отн}$$

$$|M_{abc}| = \sqrt{|V_{пер}|^2 + |V_{отн}|^2} = \sqrt{2.2^2 + 0.63^2} = 2.28 \quad /$$



## ПРИМЕР4 (продолжение)

### 2. Переносное ускорение

$$|\vec{a}_{пер}^{\tau}| = |\varepsilon_{пер}| KM = 6 \cdot 1.1 = 6.6 \quad / \quad ^2$$

$$|\vec{a}_{пер}^n}| = \omega_{пер}^2 \cdot KM = 2^2 \cdot 1.1 = 4.4 \quad / \quad ^2$$

### 3. Ускорение Кориолиса

$$|\vec{a}_{кор}| = 2 \cdot |\vec{\omega}_{пер}| \cdot |\vec{V}_{отн}| \sin(\omega_{пер} \wedge V_{отн})$$

$$|\vec{a}_{кор}| = 2 \cdot |\vec{\omega}_{пер}| \cdot |\vec{V}_{отн}| \sin 120^\circ =$$

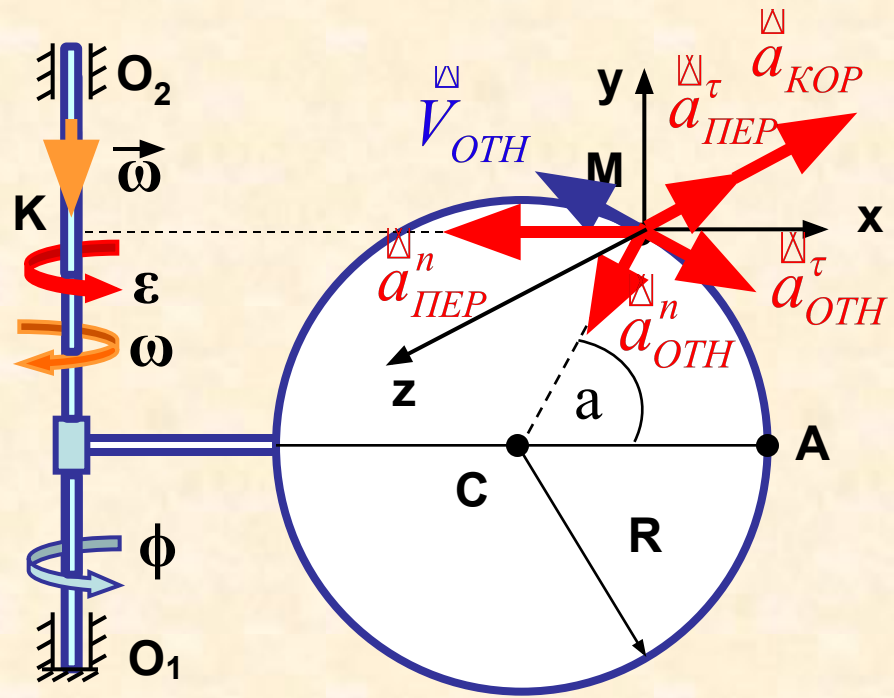
$$= 2 \cdot 2 \cdot 0.63 \cdot 0.866 = 2.18 \text{ м/с}^2$$

$$a_{x_{отн}} = -a_{пер}^n \cos \alpha - a_{отн}^n + a_{пер}^{\tau} \sin \alpha = -0.66 \cdot 0.5 - 4.4 + 1.26 \cdot 0.866 = -3.64 \quad / \quad ^2,$$

$$a_{y_{отн}} = -a_{пер}^n \sin \alpha - a_{отн}^{\tau} \cos \alpha = -0.66 \cdot 0.866 - 1.26 \cdot 0.5 = 1.2 \quad / \quad ^2,$$

$$a_{z_{пер}} = -a_{кор}^{\tau} - a = -6.6 - 2.18 = -8.78 \quad / \quad ^2.$$

$$|\vec{a}_{abc}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3.64^2 + 1.2^2 + 8.78^2} = 9.58 \quad / \quad ^2$$



# НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ



**Никола́й Егорович Жуко́вский**  
(5 (17) января 1847 с. Орехово,  
ныне Владимирской области –  
17 марта 1921, Москва)

Русский ученый-механик, создатель аэродинамики как науки. Заслуженный профессор Московского университета, профессор теоретической механики Императорского Московского технического училища (с 1918 г. — МВТУ). В 1894 г. Жуковский был избран членом-корреспондентом Академии наук по разряду математических наук . При его активном участии были созданы Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), Московский авиатехникум ( Военно-воздушная академия).

## Гюстав Гаспар Кориолис (Coriolis G.G., 21.05.1792 – 19.09.1843)



Родился в Париже в 1792г.  
В 1810 г. окончил Политехническую школу, а в 1812 г. Школу мостов и дорог. С 1816 г. начал преподавать в Политехнической школе, где вскоре стал профессором, а в 1831 г. – директором учебной части школы. Преподавал также в Центральной школе искусств и ремесел и в Школе мостов и дорог. В 1836 г. был избран в Парижскую академию наук