



AMANZHOLOV  
UNIVERSITY

# СТАТИСТИКА

## ЛЕКЦИЯ №7

### Индексы

**Байгужинова А.Ж.**

MSc, сениор-лектор кафедры экономики,  
менеджмента и финансов.

# ВОПРОСЫ

**01**

**Понятие индексов**

**02**

**Способы построения индексов.**

**03**

**Агрегатные индексы**



## Индекс -

*представляет собой относительную величину, получаемую в результате сопоставления уровней сложных социально-экономических показателей во времени, в пространстве или по сравнению с планом.*

# Индексируемая величина

- ▶ **величина, изменение которой изучается в данном конкретном случае с помощью индекса**

# Способы построения индексов.

# Каждая индексируемая величина имеет свое символическое обозначение:

- ▶ Количество единиц данного вида продукции -  $q$
- ▶ Цена единицы изделия -  $p$
- ▶ Себестоимость единицы изделия -  $z$
- ▶ Трудоемкость единицы изделия -  $t$

# Индивидуальные индексы

- ▶ характеризуют изменение только одного элемента совокупности

$$i_q = \frac{q_1}{q_0} \quad i_p = \frac{p_1}{p_0}$$

*или*

# Задача 1.

Вид продукции	Выпуск, шт.		Отпускная цена за шт, уе	
	I кв. ( $q_0$ )	II кв. ( $q_1$ )	I кв. ( $p_0$ )	II кв. ( $p_1$ )
Автомобиль модель А	2500	2610	4,8	5,4
Автомобиль модель В	3000	2950	7,1	7,6
Автомобиль модель С	3600	3700	5,0	5,7

## Задача 1. Определить: изменение (в %) выпуска каждого вида продукции

$$i_{qA} = \frac{q_1}{q_0} = \frac{2610}{2500} = 1,044$$

- ▶ Производство автомобиля А в отчетном году по сравнению с прошлым годом составило 104,4%, т.е. возросло на 4,4%

$$i_{qB} = \frac{q_1}{q_0} = \frac{2950}{3000} = 0,983$$

- ▶ Производство автомобиля В - составило 98,3%, т.е. снизилось на 1,7%

# Задача 1.

- ▶ Производство автомобиля С в отчетном году выросло на 2,8% по сравнению с прошлым годом.

$$i_{qC} = \frac{q_1}{q_0} = \frac{3700}{3600} = 1,028$$

# Задача № 1 Определить изменение цен ( в %) по каждому виду продукции

▶ Автомобиль модели А

$$i_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{5,4}{4,8} = 1,125 \text{ или } 112,5\%$$

следовательно цена повысилась на  
12,5% (112,5-100)

# Задача 1

- ▶ Автомобиль модели В

$$i_p = \frac{7,6}{7,1} = 1,070 \text{ или } 107,0\% \text{ т.е.}$$

цена возросла на 7%

# Задача 1

- ▶ Автомобиль модели С

$$i_p = \frac{5,7}{5,0} = 1,14 \text{ или } 114,0\%, \text{ т.е.}$$

увеличение цены на 14,0%

# Сводный индекс

- ▶ отражает изменение по всей совокупности элементов сложного явления
- ▶ Если индексы охватывают не все элементы сложного явления, а лишь часть, то их называют *групповыми* или субиндексами.
- ▶ Обозначаются *сводные индексы I*

*Индекс стоимости продукции  
(товарооборота).*

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

$$\Delta^{qp} \Sigma_{qp} = \Sigma p_1 q_1 - \Sigma p_0 q_0$$

- ▶ показывает абсолютное изменение общей стоимости продукции за счет изменения количества продукции и цен.

Задача 1. Определить изменение  
товарооборота в целом по  
предприятию.

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{5,4 * 2610 + 7,6 * 2950 + 5,7 * 3700}{4,8 * 2500 + 7,1 * 3000 + 5,0 * 3600} = \frac{57604}{51300} = 1,123$$

- ▶ Общая стоимость произведенной продукции увеличилась на 12,3% (112,3% - 100%). Это привело к росту товарооборота на сумму:
- ▶  $57604 - 51300 = 6304$  у.е.

# *Агрегатные индексы*

**Индексы количественных  
показателей.**

**Индексы качественных показателей**

# Внешняя отличительная особенность агрегатного индекса

- ▶ В числителе и в знаменателе меняется индексируемая величина.
- ▶ Значения другой, являющейся соизмерителем, остаются неизменными

# Индекс физического объема товарооборота.

- ▶ Если мы хотим узнать как на стоимость проданной продукции повлияло изменение количества проданных товаров, то необходимо устранить (элиминировать) влияние изменения цен.

# Индекс Э. Ласпейреса

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

$$\Delta^q \sum_{qp} = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0$$

- ▶ эта разность показывает абсолютное изменение общей стоимости продукции за счет изменения количества продукции

## Индекс Г. Пааше

$$I_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}$$

# Сравнение индекса Ласпейреса и индекса Пааше

Индекс Ласпейреса:

- ▶ В качестве коэффициента соизмерения используются цены базисного периода

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Индекс Пааше

- ▶ В качестве коэффициента соизмерения используются цены отчетного периода или сопоставимые (фиксированные) цены

$$I_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}$$

## Задача 1. Определить изменение выпуска продукции в целом по предприятию.

$$I_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0} = \frac{5,4 * 2610 + 7,6 * 2950 + 5,7 * 3700}{5,4 * 2500 + 7,6 * 3000 + 5,7 * 3600} = \frac{57604}{56820} = 1,014$$

- ▶ Изменение количества произведенных автомобилей привело к росту стоимости произведенной продукции на 1,4% (101,4% - 100%)
- ▶ При этом товарооборот вырос на 784 у.е. (57604 - 56820)

# Индексы качественных показателей:

- ▶ Агрегатный индекс цен
- ▶ Индексируемой величиной в данном случае является цена ( $p$ ), количество продукции ( $q$ ) носит название веса.

# Индекс Пааше

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

Абсолютное изменение всей стоимости продукции за счет изменения цен.

$$\Delta^p \Sigma_{qp} = \Sigma p_1 q_1 - \Sigma p_0 q_1$$

# Индекс Ласпейреса

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

# Сравнение индекса цен Пааше и Ласпейреса

## Индекс Пааше

- ▶ В качестве веса используется количество товара отчетного периода

## Индекс Ласпейреса

- ▶ В качестве веса используется количество товара базисного периода
- ▶ Рекомендуется для характеристики среднего изменения цен на потребительские товары

## Задача 1. Определить среднее изменение цен по всему ассортименту продукции.

- ▶ Среднее изменение цен по всему ассортименту продукции

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{5,4 * 2500 + 7,6 * 3000 + 5,7 * 3600}{4,8 * 2500 + 7,1 * 3000 + 5,0 * 3600} = \frac{56820}{51300} = 1,107$$

- ▶ Таким образом цены на продукцию предприятия повышены в среднем на 10,8%, за счет чего стоимость продукции повысилась на 5520 уе ( 56820- 51300)

# Цепные и базисные индексы.

- ▶ Произведение цепных индивидуальных индексов равно последнему базисному:

$$i_{q1/0} \times i_{q2/1} = i_{q2/0}$$

- ▶ Базисный агрегатный индекс может быть получен как произведение цепных агрегатных индексов при постоянных соизмерителях

**Задача 4** По фирме имеются следующие данные об объеме производства и стоимости продукции:

Вид продукции	Ед. измерения	Произведено продукции			Цена в 2014 г. крон
		2014	2015	2016	
А	Тыс.т	60	64	69	50
Б	Млн. шт	5,5	6,2	7,0	2

Расчитать индексы физического объема с постоянной и переменной базой.

# Задача 4

- ▶ Расчитаем цепные индексы:

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{64000 * 50 + 6200000 * 2}{60000 * 50 + 5500000 * 2} = \frac{15600000}{14000000} = 1,114$$

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_2}{\sum p_0 q_1} = \frac{69000 * 50 + 7000000 * 2}{64000 * 50 + 6200000 * 2} = \frac{17450000}{15600000} = 1,119$$

## Задача № 4.

- ▶ Расчитаем базисные индексы

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{64000 * 50 + 6200000 * 2}{60000 * 50 + 5500000 * 2} = \frac{15600000}{14000000} = 1,114$$

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_2}{\sum p_0 q_0} = \frac{69000 * 50 + 7000000 * 2}{60000 * 50 + 5500000 * 2} = \frac{17450000}{14000000} = 1,2464$$

# *Произведение цепных индексов равно базисному*

▶  $1,114 * 1,119 = 1,2465$

# Вывод:

- ▶ на предприятии в 2015 году по сравнению с 2014 годом наблюдается рост производства за счет увеличения количества выпускаемой продукции на  $1,114 * 100\% = 111,4\% - 100\% = 11,4\%$ ;
- ▶ В 2016 г. по сравнению с 2014 г также наблюдается рост производства, который составил  $1,246 * 100\% - 100\% = 24,6\%$ . Причиной такого роста является увеличение количества выпущенных изделий
- ▶ В 2016 г по сравнению с 2015 г рост объема производства за счет увеличения количества изделий А и Б составил  $1,119 * 100\% - 100\% = 11,9\%$

## Цепные индивидуальные индексы

$$i_{qA} = \frac{64}{60} = 1,07 \quad i_{qB} = \frac{6,2}{5,5} = 1,127$$

$$i_{qA} = \frac{69}{64} = 1,08 \quad i_{qB} = \frac{7,0}{6,2} = 1,129$$

## Базисные индивидуальные индексы

$$i_{qA} = \frac{64}{60} = 1,07 \quad i_{qB} = \frac{6,2}{5,5} = 1,127$$

$$i_{qA} = \frac{69}{60} = 1,15 \quad i_{qB} = \frac{7,0}{5,5} = 1,273$$

## Связь индивидуальных цепных и базисных индексов.

$$i_{qA} = 1,07 * 1,08 = 1,1556$$

$$i_{qB} = 1,127 * 1,129 = 1,272$$

# Расчеты с помощью индексных систем недостающих индесов.

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} * \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

или  $I_p * I_q = I_{pq}$

Задача № 8. Как изменились цены, если физический объем товарооборота увеличился на 12%, а товарооборот вырос на 9%?

▶  $I_q = 100\% + 12\% = 112\%$

▶  $I_{pq} = 100\% + 9\% = 109\%$

$$I_p = \frac{I_{pq}}{I_q} = \frac{109\%}{112\%} * 100\% = 97,3\%$$

▶  $97,3\% - 100\% = -2,7\%$

▶ Т.е. цены снизились на 2,7%

# Расчет средних арифметических индексов.

- ▶ Агрегатный индекс физического объема имеет вид

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

- ▶ Если из условия известна стоимость произведенной или проданной продукции

$$(\sum p_0 q_0)$$

а также изменение количества произведенной или проданной продукции

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

- ▶  $q_1 = i_q * q_0$  тогда средний арифметический индекс физического объема приобретает вид:

$$I_q = \frac{\sum i_q p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

# Средний гармонический индекс цен

- ▶  $p_1 q_1$  в качестве исходных данных имеем и изменение цен, т.е.

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}$$

Тогда

$$p_0 = \frac{p_1}{i_p}$$

заменяя

в формуле агрегатного индекса цен

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

- ▶ Получим средний гармонический индекс цен

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{p_1 q_1}{i_p}}$$

# Индексы структурных сдвигов

- ▶ *Индекс переменного состава* представляет собой соотношение средних уровней изучаемого явления, относящихся к разным периодам:

$$I_{\text{пер.}} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} \cdot \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}$$

# На изменение признака влияет два фактора:

1. изменения значений осредняемого признака ( $x$ ) у отдельных единиц совокупности;
2. структурных изменений, под которыми понимается изменение доли отдельных единиц совокупности в общей их численности ( $d=f / \Sigma f$ ).

# Индекс постоянного (фиксированного) состава

- ▶ отражает изолированное действие первого фактора

$$I_{\text{пост.}} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} \cdot \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1}$$

- ▶ Индекс постоянного состава может быть рассчитан и в агрегатной форме:

$$I_{\text{пост.}} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1}$$

# Индекс структурных сдвигов

- ▶ характеризует влияние изменения структуры изучаемой совокупности на динамику среднего уровня признака:

$$I_{стр.} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} \cdot \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}$$

# Связь индексов переменного, постоянного состава и структурных сдвигов

- ▶ Индексы переменного, постоянного состава и структурных сдвигов увязываются в следующую систему:

$$I_{пер.} = I_{пост.} \cdot I_{стр.}$$

# Задача

Филиалы объединения	Объем продукции (тыс. кр.)		Среднегодовая стоимость основных производственных фондов (тыс. кр.)	
	базисный год	отчетный год	базисный год	отчетный год
№ 1	450	520	200	250
№ 2	90	85	50	50
В целом по объединению	540	605	250	300

Необходимо определить:

- ▶ уровни фондоотдачи в отдельных филиалах объединения в отчетном и базисном периодах;
- ▶ средний уровень фондоотдачи в целом по объединению в отчетном и базисном периодах;
- ▶ изменение среднего по объединению уровня фондоотдачи в отчетном периоде по сравнению с базисным, в том числе за счет: а) изменения уровня фондоотдачи в отдельных филиалах; б) структурных изменений.

# Фондоотдача

- ▶ обобщающий показатель, характеризующий уровень использования производственных фондов. Отдача основных производственных фондов рассчитывается путем деления объема выпущенных за определенный период продукции на среднюю за этот период стоимость основных производственных фондов.

$$f = \frac{Q}{F}$$

- ▶ Где  $f$  - уровень фондоотдачи
- ▶  $Q$  - объем выпускаемой продукции
- ▶  $F$  - среднегодовая стоимость фондов.

Вычислим фондоотдачу для  
каждого филиала в отчетном и  
базисном периодах

$$f_0^I = \frac{450}{200} = 2,25$$

$$f_1^I = \frac{520}{250} = 2,08$$

$$f_0^{II} = \frac{90}{50} = 1,8$$

$$f_1^{II} = \frac{85}{50} = 1,7$$

Средний по объединению уровень фондоотдачи в базисном и отчетном периоде:

$$\bar{f}_0 = \frac{\sum f_0 F_0}{\sum F_0} = \frac{\sum Q_0}{\sum F_0} = \frac{540}{250} = 2,16$$

$$\bar{f}_1 = \frac{\sum f_1 F_1}{\sum F_1} = \frac{\sum Q_1}{\sum F_1} = \frac{605}{300} = 2,02$$

# Динамика среднего по объединению уровня фондоотдачи:

- ▶ индекс переменного состава

$$I_{пер.} = \frac{f_1}{f_0} = \frac{\sum f_1 F_1}{\sum F_1} : \frac{\sum f_0 F_0}{\sum F_0} = \frac{2,02}{2,16} = 0,935$$

- ▶ или 93,5%, т.е. фондоотдача снизилась на 6,5% под влиянием двух факторов:
  - 1) уменьшения фондоотдачи в отдельных филиалах и
  - 2) структурных изменений в распределении фондов между филиалами.

# Выявим отдельное влияние каждого из факторов:

1. уменьшение фондоотдачи в отдельных филиалах

$$I_{\text{пост.}} = \frac{\sum f_1 F_1}{\sum F_1} : \frac{\sum f_0 F_1}{\sum F_1} = 2,02 : \frac{2,25 \cdot 250 + 1,8 \cdot 50}{300} =$$

2. = ~~2,02~~ ~~2,18~~ = ~~0,927~~ структурные изменения в распределении фондов между филиалами

$$I_{\text{стр.}} = \frac{\sum f_0 F_1}{\sum F_1} : \frac{\sum f_0 F_0}{\sum F_0} = \frac{2,18}{2,16} = 1,009$$

- ▶ Таким образом, фондоотдача в среднем по филиалам объединения снизилась на 7,3%, что привело к аналогичному снижению среднего уровня фондоотдачи в целом по объединению.
- ▶ Структурные изменения, а именно увеличение доли фондов первого филиала, который характеризуется более эффективным уровнем их использования, обусловили рост среднего уровня фондоотдачи по объединению на 0,9%.

- ▶ Проверим увязку индексов в систему

$$I_{пер.} = I_{пост.} \cdot I_{стр.} = 0,927 \cdot 1,009 = 0,935$$

Задача № 7. Рассчитать индексы цен, физического объема товарооборота и товарооборота по трем товарам вместе.

товар	Продано, кг		Цена 1 кг, крон	
	Базисный период	Отчетный период	Базисный период	Отчетный пер.
Картофель	5000	6000	3,5	4,0
Морковь	2000	2500	5,0	6,0
Капуста	4000	3800	2,5	4,0

## Задача № 7. Решение:

$$I_q = \frac{3,5 * 6000 + 5,0 * 2500 + 2,5 * 3800}{3,5 * 5000 + 5,0 * 2000 + 2,5 * 4000} = \frac{43000}{37500} = 1,147$$

$$I_p = \frac{4.0 * 6000 + 6.0 * 2500 + 4.0 * 3800}{3.5 * 6000 + 5.0 * 2500 + 2.5 * 3800} = \frac{57200}{43000} = 1.260$$

$$I_{pq} = \frac{4,0 * 6000 + 6,0 * 2500 + 4,0 * 3800}{3,5 * 5000 + 5,0 * 2000 + 2,5 * 4000} = \frac{57200}{37500} = 1,525$$



*Спасибо за внимание!*