Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова Механико-математический факультет Кафедра теории упругости

О моделировании свойств нелинейной упругости с помощью различных мер деформаций и напряжений

Студент: Климов Егор Сергеевич

Преподаватель: Бровко Георгий Леонидович

Группа: 425

Введение

В работе с целью изучения возможностей использования построенных голономных мер для описания свойств упругости при конечных деформациях было выделено пять пар энергетически сопряженных правых и левых голономных мер, в терминах которых построены 10 моделей упругих сред с определяющими соотношениями в форме закона Гука и исследовано повередение этих моделей в простейших квазистатических движениях: чисто объемная деформация, одноосное растяжение-сжатие, простой сдвиг.

Цели и задачи

Цель:

- Исследование возможностей использования новых голономных мер для описания свойств упругости

Задачи:

- Построение тензоров деформаций и напряжений для простейших квазистатических движений
- Построение моделей упругих сред с определяющими соотношениями в форме закона Гука
- Исследование полученных зависимостей

Основные обозначения

Закон движения задается в виде: $x = x(\mathrm{x}, t)$;

Деформация сплошной среды в процессе движения характеризуется аффинором деформаций: $A = ||\frac{\partial x}{\partial \mathrm{x}}||$;

Мера деформаций Коши: $C = A^{\mathrm{T}}A = \mathrm{X}^2$ и Фингера: $F = AA^{\mathrm{T}} = Y^2$

Где X, Y определяются из полярного разложения аффинора деформаций: $\mathrm{A} = QX = YQ$

Тензор истинных напряжений Коши: S

Рассмотрим новые тензоры деформаций и напряжений, определенные по формулам:

$$\mathcal{E}_c \equiv \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{-1}\right)\left[(1+c)\mathbf{X} + (1-c)\mathbf{X}^{-1}\right]^{-1} \equiv (\mathbf{C} - \mathbf{I})[(1+c)\mathbf{C} + (1-c)\mathbf{I}]^{-1} \equiv$$
$$\equiv \mathcal{E}_{\mathrm{I}}\left[\mathbf{I} + (1+c)\mathcal{E}_{\mathrm{I}}\right]^{-1} \equiv \mathcal{E}_{\mathrm{II}}\left[\mathbf{I} - (1-c)\mathcal{E}_{\mathrm{II}}\right]^{-1}$$

$$\mathbf{E}_c \equiv \frac{1}{4}\left(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{-1}\right)\left[(1+c)\mathbf{Y} + (1-c)\mathbf{Y}^{-1}\right] \equiv \frac{1}{4}\left(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}\right)\left[(1+c)\mathbf{F} + (1-c)\mathbf{I}\right] \equiv$$
$$\equiv \mathbf{E}_{\mathrm{I}}\left[\mathbf{I} + (1+c)\mathbf{E}_{\mathrm{II}}\right] \equiv \mathbf{E}_{\mathrm{II}}\left[\mathbf{I} - (1-c)\mathbf{E}_{\mathrm{I}}\right] \equiv \frac{1}{2}\left[(1+c)\mathbf{E}_{\mathrm{II}} + (1-c)\mathbf{E}_{\mathrm{I}}\right]$$

$$\Sigma_c \equiv \frac{1}{4}\left[(1+c)\mathbf{X} + (1-c)\mathbf{X}^{-1}\right]\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{Q}\left[(1+c)\mathbf{X} + (1-c)\mathbf{X}^{-1}\right] \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{4}[(1+c)\mathbf{C} + (1-c)\mathbf{I}]\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{I}}[(1+c)\mathbf{C} + (1-c)\mathbf{I}] \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{4}\left[(1+c)\mathbf{I} + (1-c)\mathbf{C}^{-1}\right]\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{II}}\left[(1+c)\mathbf{I} + (1-c)\mathbf{C}^{-1}\right]$$

Будем рассматривать 10 моделей нелинейно упругих сред, свойства которых задаются соотношениями в форме закона Гука между энергетически сопряженными тензорами, а именно, правые моде

$$\Sigma_c = \lambda\theta_c \mathrm{I} + 2\mu\varepsilon_c,$$

Где $\theta_c = tr(\varepsilon_c)$; $\mathrm{c} = \pm 1, \pm 0.5, 0$; и левые модели:

$$S = \lambda\theta_c \mathrm{I} + 2\mu \mathrm{E}_c,$$

Где $\theta_c = tr(E_c)$; $\mathrm{c} = \pm 1, \pm 0.5, 0$; S – тензор напряжений Коши.

Чисто объемная деформация

Рассмотрим квазистатическое равновесие тела под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки (всестороннего давления) при отсутствии массовых сил. Тензор истинных напряжений Коши S определяется равенством для его компонент:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Закон движения (деформацию) примем в виде:

$$x_i = \lambda_i \mathrm{x}_i,$$

где $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha$ - кратность удлинения. Посчитаем аффинор деформации:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

И меры деформаций Коши C и Фингера F:

$$C = F = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

выразим левые и правые тензорные меры деформаций и напряжений через α:

$$\varepsilon_c = diag(\frac{\alpha^2 - 1}{2} \cdot (1 + (1 + c)\frac{\alpha^2 - 1}{2})^{-1}),$$

$$\mathrm{E}_c = diag(\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{\alpha^2}) \cdot ((1 + c)\alpha^2 + (1 - c))).$$

$$\Sigma_c = diag(\frac{1}{4}((1 + c)\alpha^2 + (1 - c))^2 \cdot \frac{p}{\alpha^2}),$$

Подставив, тензоры деформаций и напряжений в закон Гука, найдем связь параметра нагружения *p* и параметра деформации (кратности удлинения) α:

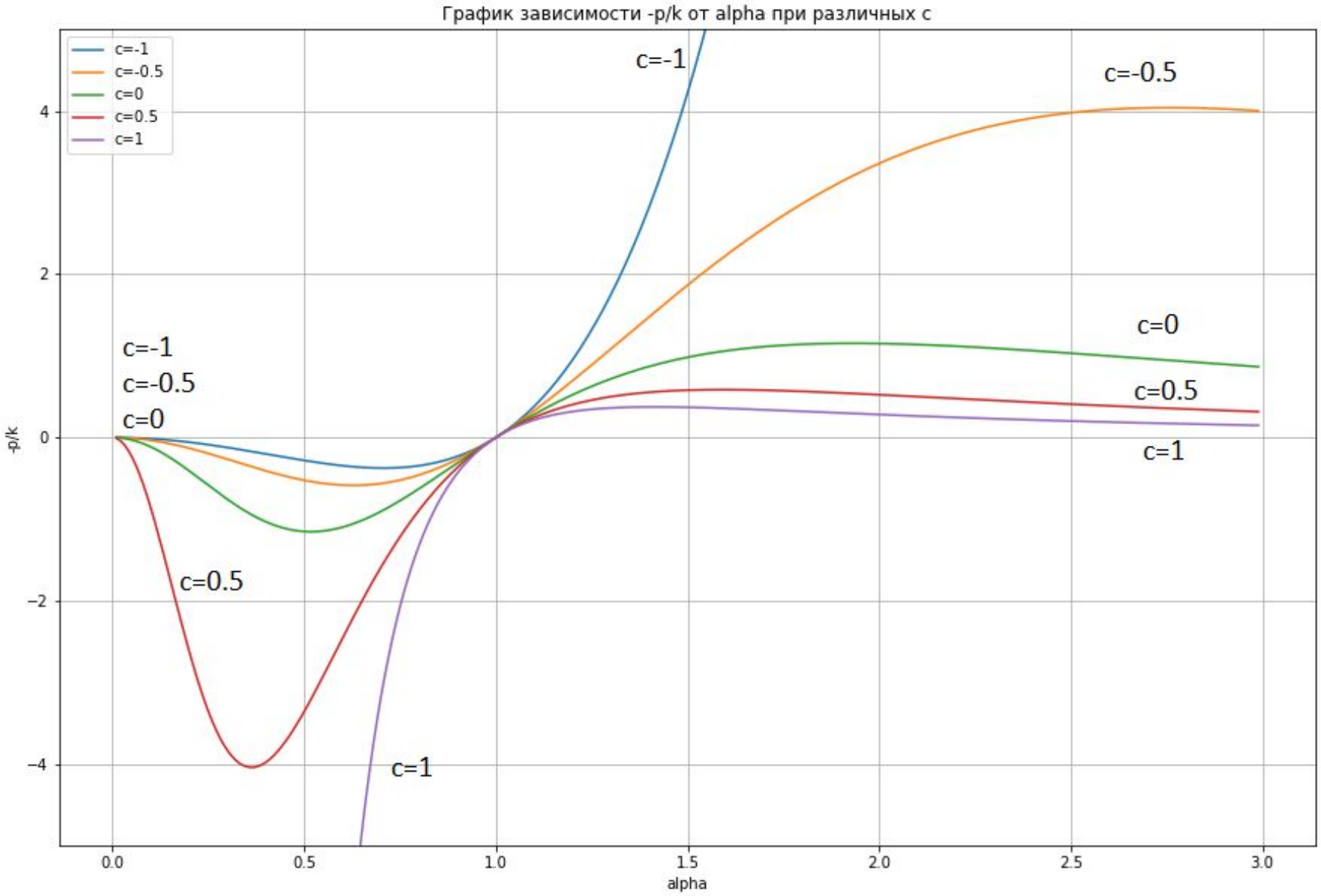
$$-\frac{p}{K} = 12 \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{2} \cdot (1 + (1 + c)\frac{\alpha^2 - 1}{2})^{-1} / (((1 + c)\alpha^2 + (1 - c))^2 \frac{1}{\alpha^2}),$$

$$-\frac{p}{K} = \frac{3}{4} \cdot (1 - \frac{1}{\alpha^2}) \cdot ((1 + c)\alpha^2 + (1 - c)),$$

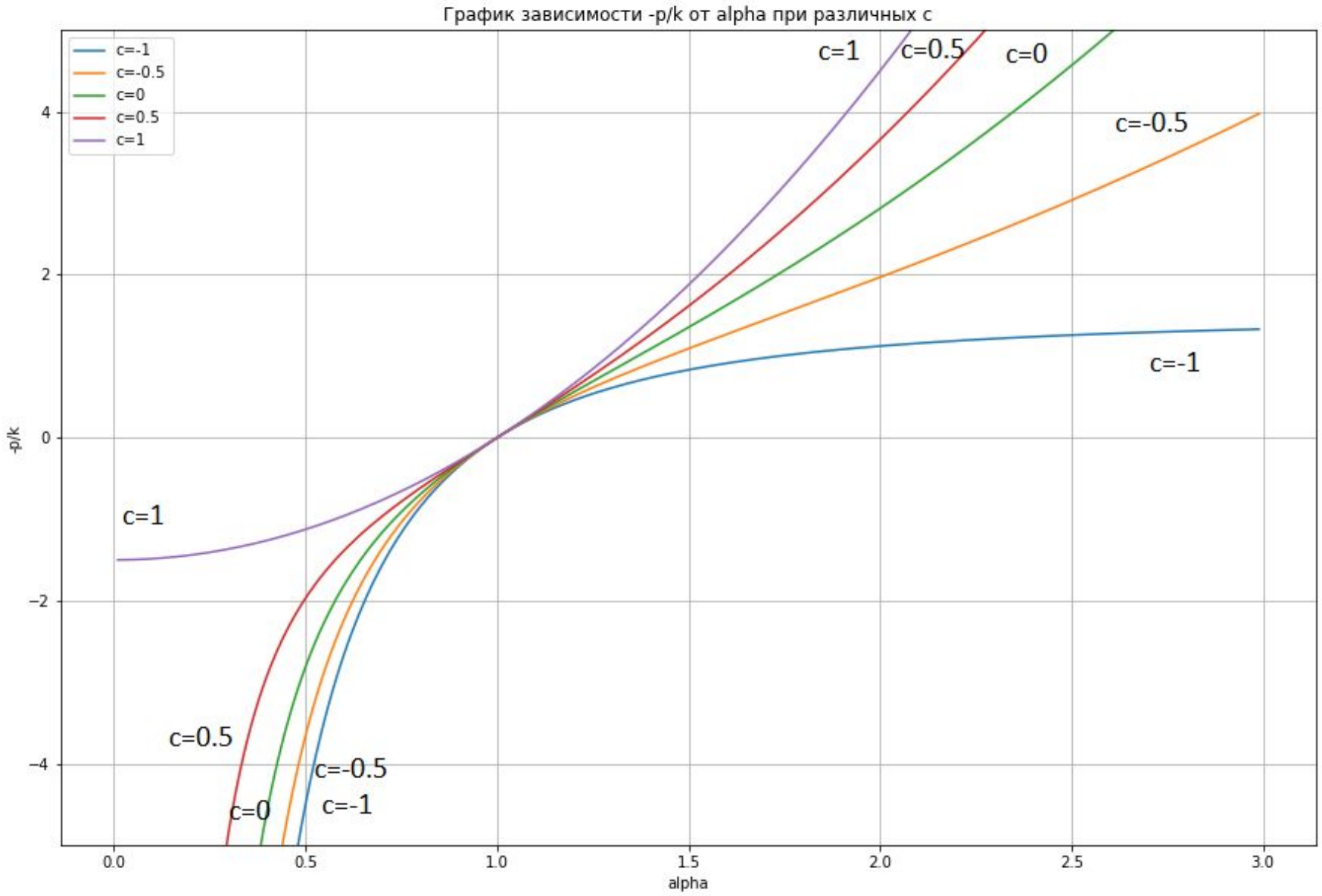
Соответственно для правых и левых моделей

Изобразим полученные зависимости графически:

Для правых моделей:



Для левых моделей:



Одноосное растяжение-сжатие

Закон движения примем в виде: $x_1 = \alpha \mathrm{x}_1, x_2 = \beta \mathrm{x}_2, x_3 = \beta \mathrm{x}_3$

Тензор истинных напряжений имеет вид $S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Аналогично чисто объемной деформации запишем тензоры деформаций и напряжений, подставим в закон Гука и выразим параметры напряжения через параметры деформации:
Для правых моделей:

$$\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha) = \frac{4\alpha^2(\alpha^2-1)}{(2+(1+c)(\alpha^2-1))((1+c)\alpha^2+(1-c))^2},$$

$$\frac{F}{F_0} = \beta^2 = 1 - \frac{2\nu\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha)}{1+\nu\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha)+\nu\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha)c},$$

$$\frac{P}{\mathrm{E}F_0} = \frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha)\cdot\frac{F}{F_0}(\alpha);$$

Для левых моделей:

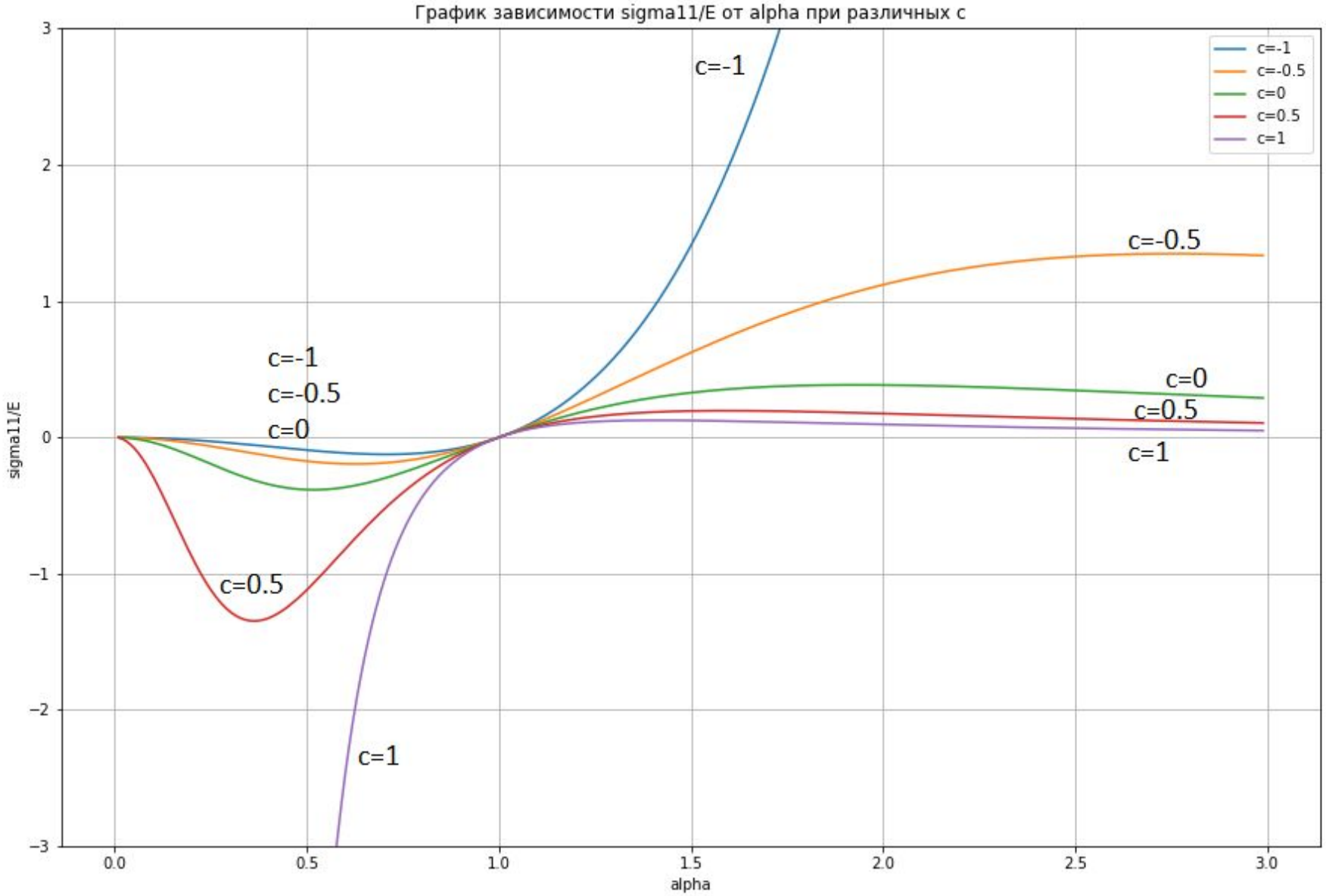
$$\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{\alpha^2}((1+c)\alpha^2 + (1-c)),$$

$$\frac{F}{F_0} = \beta^2 = \frac{\sqrt{2\nu\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha) - c)^2 + (1-c^2)} + c - 2\nu\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha)}{1+c},$$

$$\frac{P}{\mathrm{E}F_0} = \frac{\sigma_{11}}{\mathrm{E}}(\alpha) \cdot \frac{F}{F_0}(\alpha),$$

Изобразим, полученные зависимости графически при фиксированном v=0.5

Графики для правых моделей:



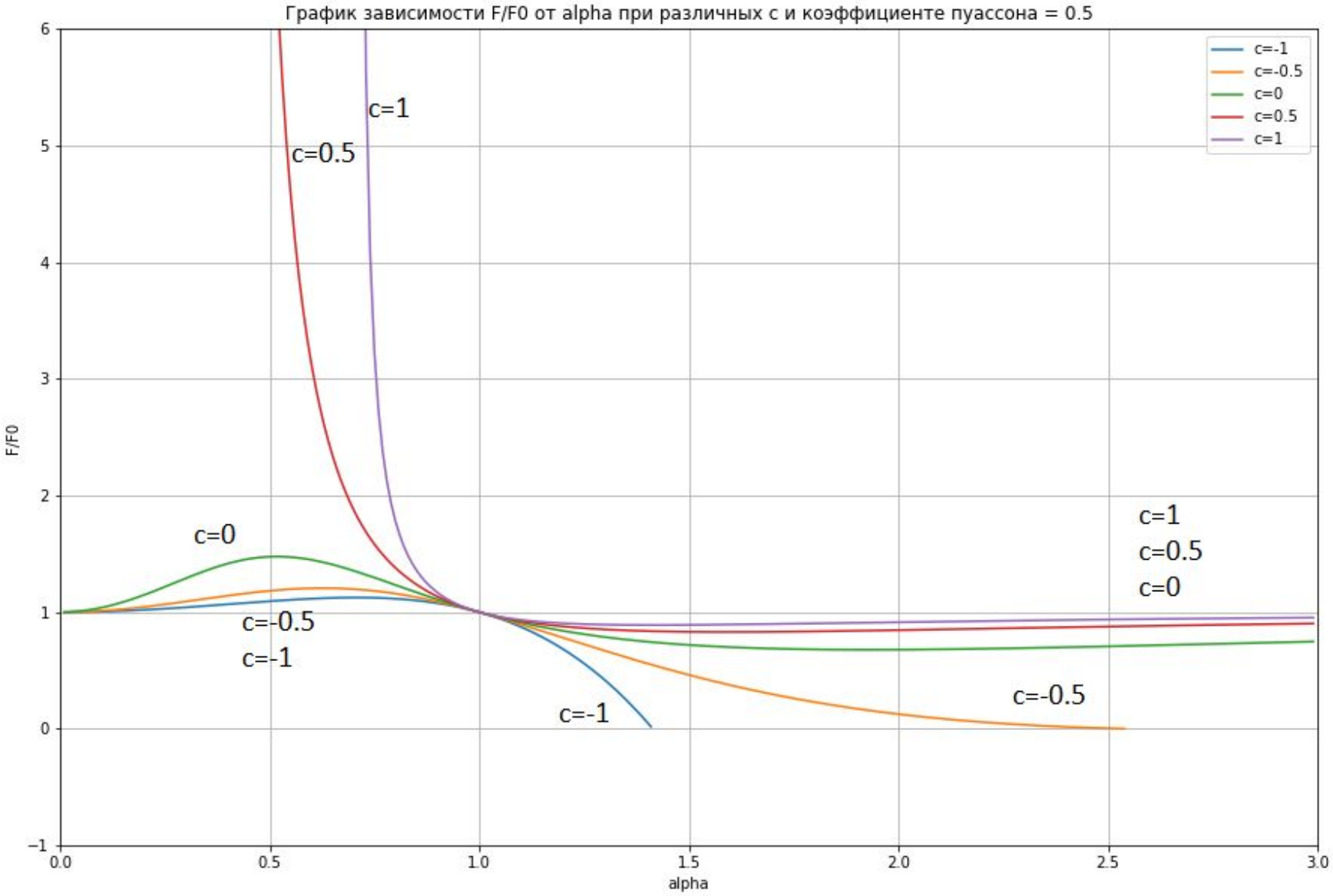


График зависимости F/F0 от alpha при различных c и коэффициенте пуассона = 0.5
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
c=1
c=0.5
c=0
c=-0.5
c=-1
c=-1
c=-0.5
c=1
c=0.5
c=0
F/F0
alpha
6
5
4
3
2
1
0
−1
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

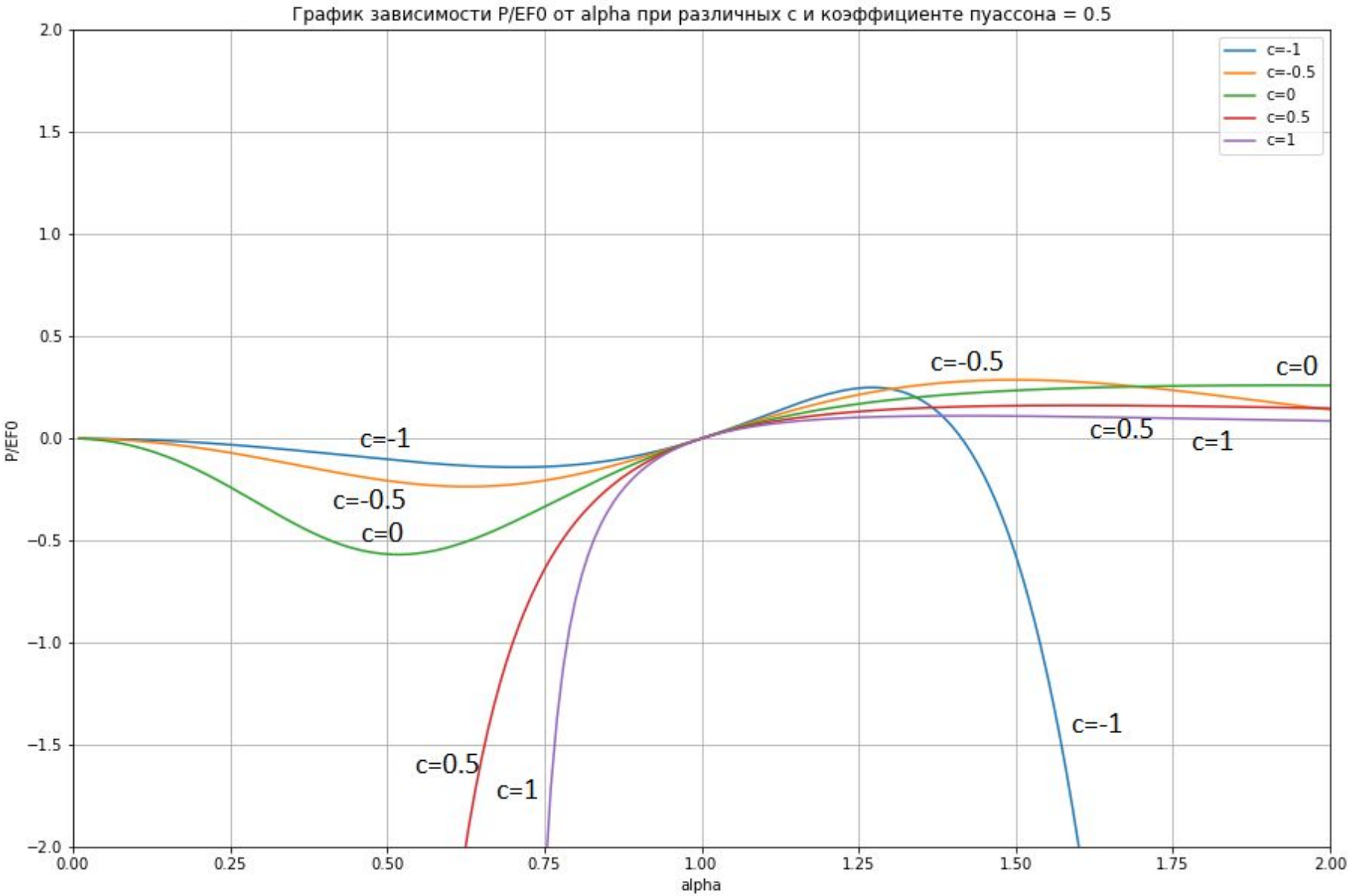
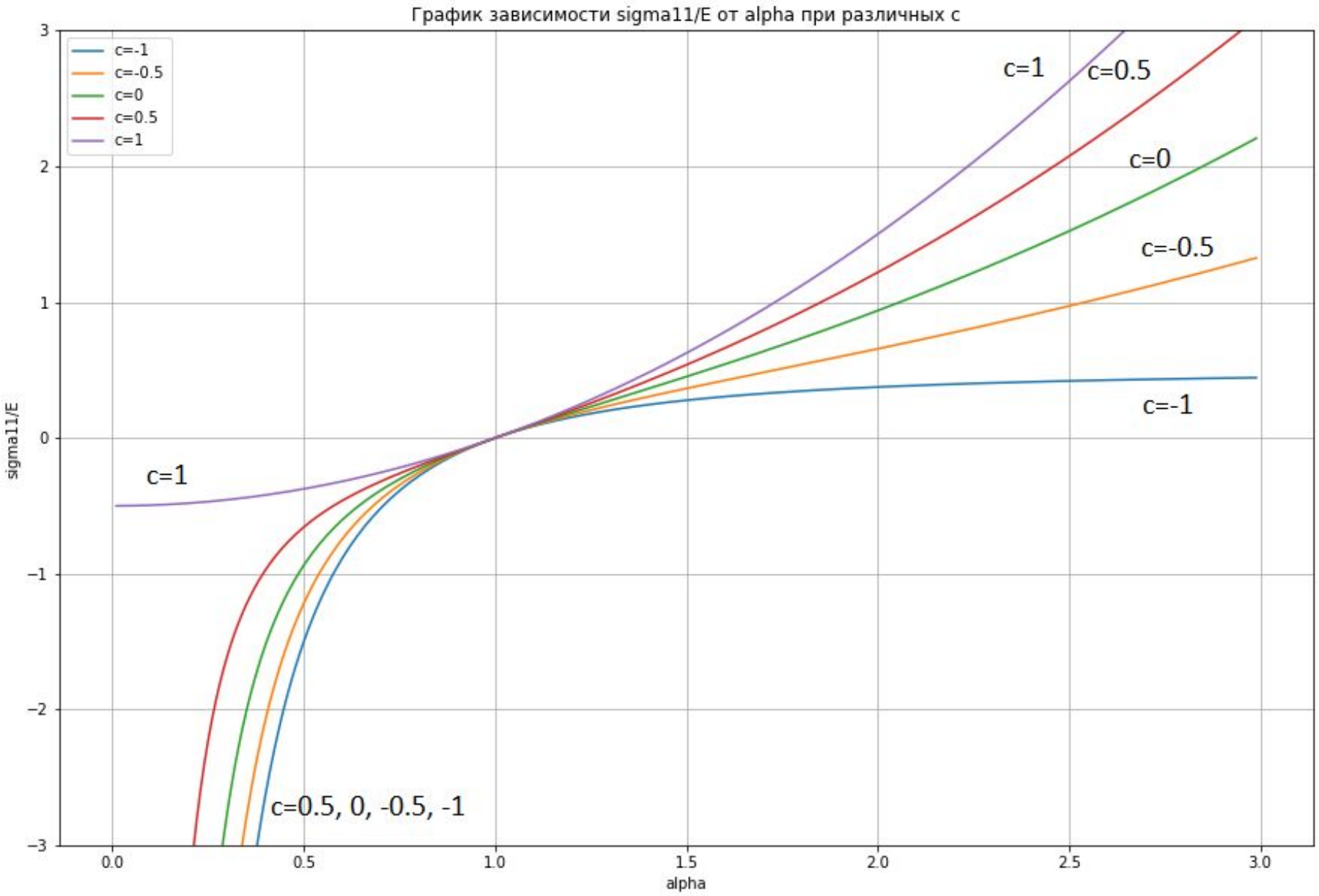


График зависимости P/EF0 от alpha при различных c и коэффициенте пуассона = 0.5
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
P/EF0
alpha
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Для левых моделей:



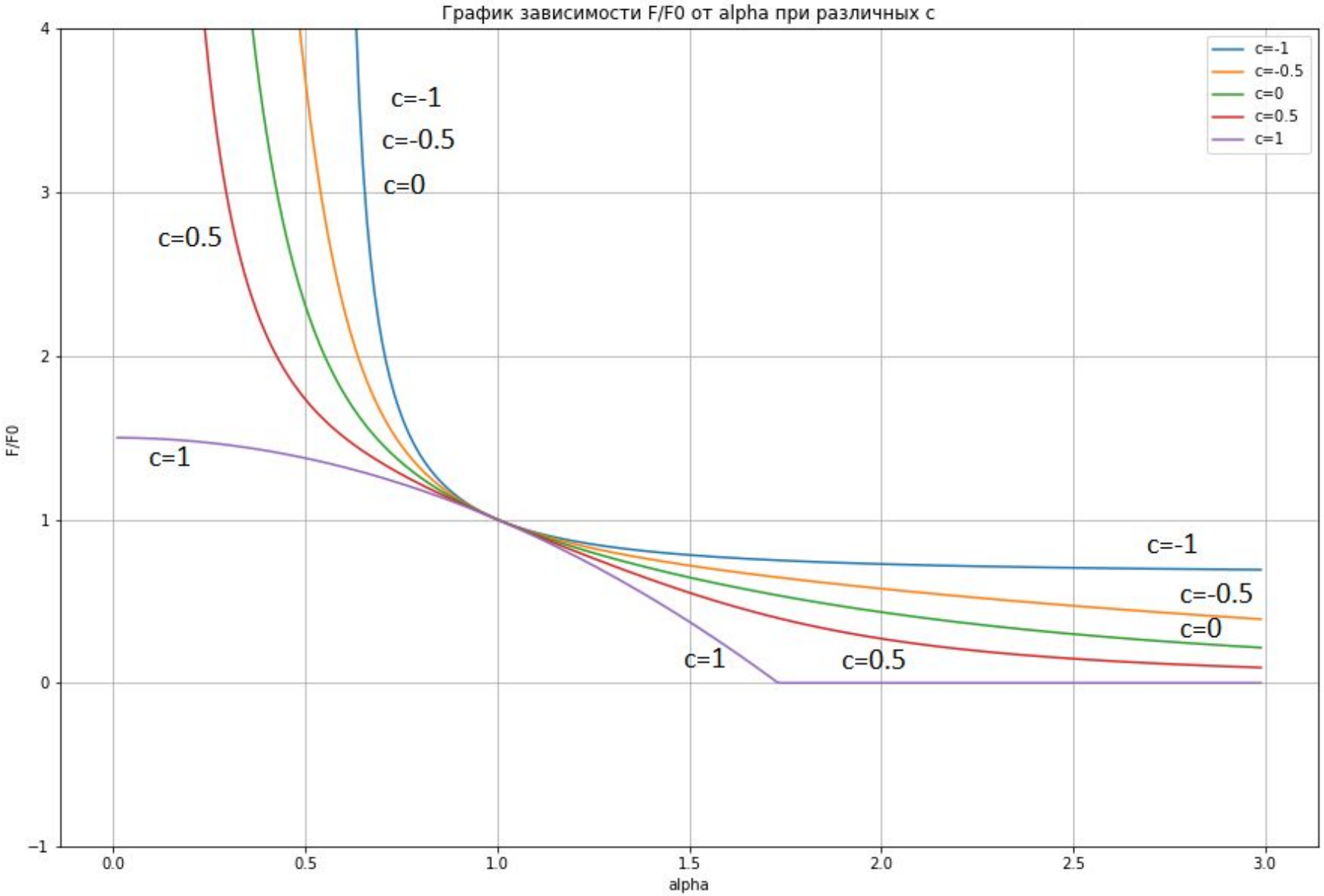


График зависимости F/F0 от alpha при различных c
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
c=-1
c=-0.5
c=0
c=1
c=0.5
F/F0
alpha
4
3
2
1
0
−1
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

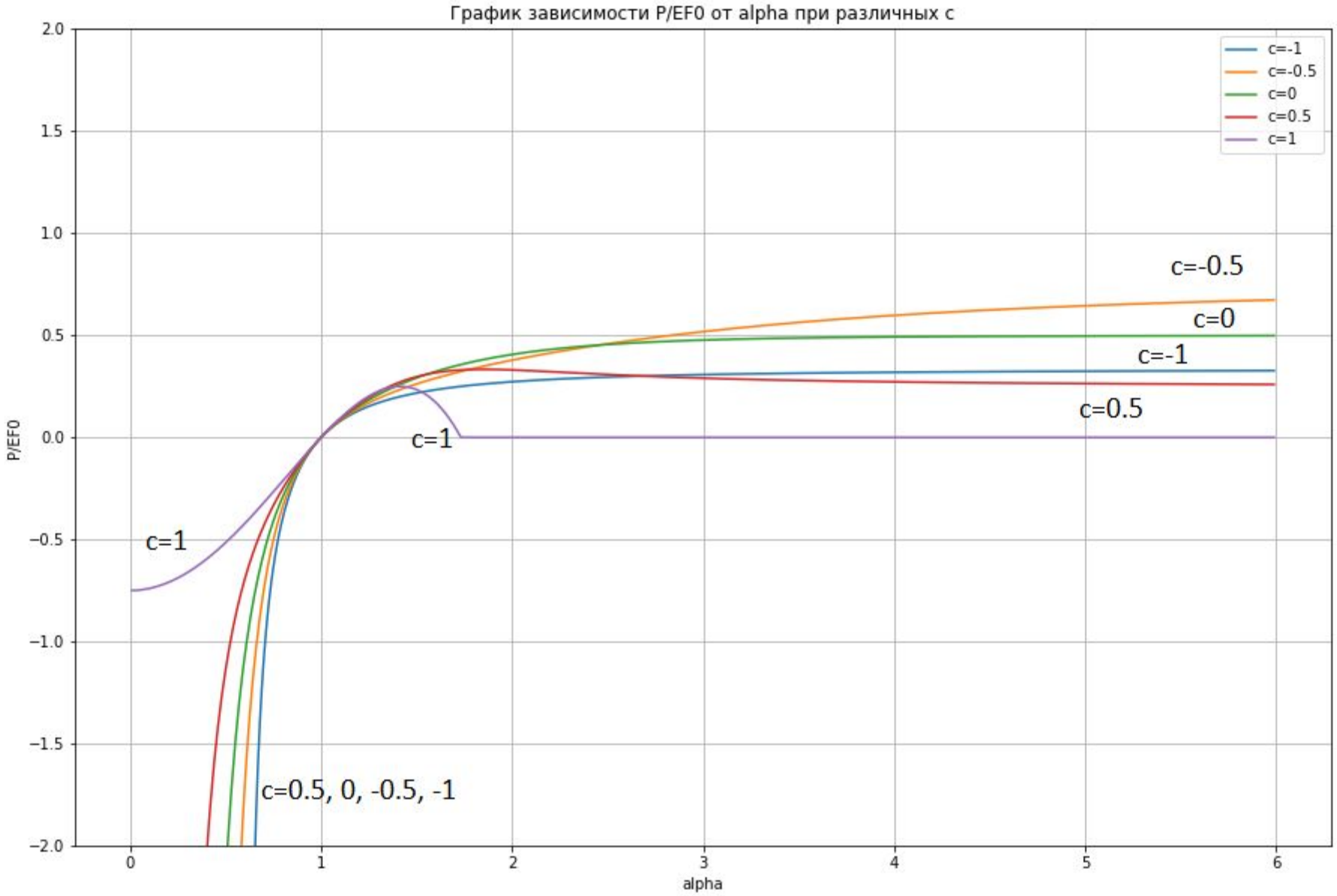


График зависимости P/EF0 от alpha при различных c
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
c=-0.5
c=0
c=-1
c=0.5
c=1
c=1
c=0.5, 0, -0.5, -1
P/EF0
alpha
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0
1
2
3
4
5
6

Простой сдвиг

Закон движения примем в виде $x_1 = \mathrm{x}_1,\ x_2 = \mathrm{x}_2 + \gamma \mathrm{x}_3,\ x_3 = \mathrm{x}_3,$

Получим зависимости ненулевых компонент тензора напряжений Коши:

Правые модели:

$$\frac{\sigma_{22}}{\mu} = \frac{4(-4\gamma^2 - \gamma^4 + 12c\gamma^2 + 3c\gamma^4 - 3c^2\gamma^4 + c^3\gamma^4)}{(-4 - \gamma^2 + c^2\gamma^2)^3}$$

$$\frac{\sigma_{23}}{\mu} = \frac{8(4\gamma + \gamma^3 + 3c^2\gamma^3)}{(-4 - \gamma^2 + c^2\gamma^2)^3}$$

$$\frac{\sigma_{33}}{\mu} = \frac{4(4\gamma^2 + \gamma^4 + 12c\gamma^2 + 3c\gamma^4 + 3c^2\gamma^4 + c^3\gamma^4)}{(-4 - \gamma^2 + c^2\gamma^2)^3},$$

Левые модели:

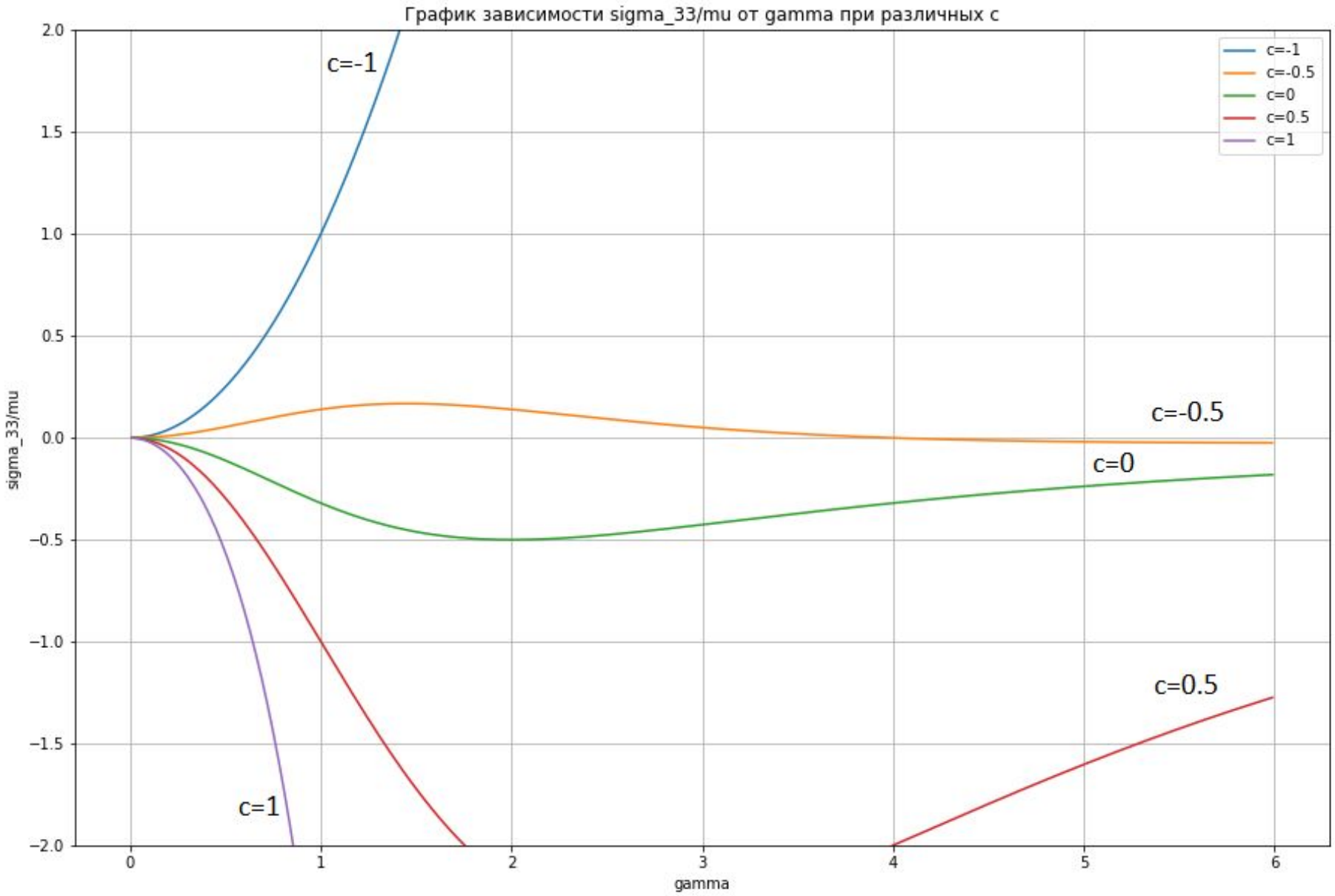
$$\frac{\sigma_{22}}{\mu} = 1/4\gamma^2(1+c)$$

$$\frac{\sigma_{23}}{\mu} = 1/2\gamma$$

$$\frac{\sigma_{33}}{\mu} = 1/4\gamma^2(1+c) - 2\gamma^2,$$

Фиксируем λ=0 и построим графики:

Правые модели:



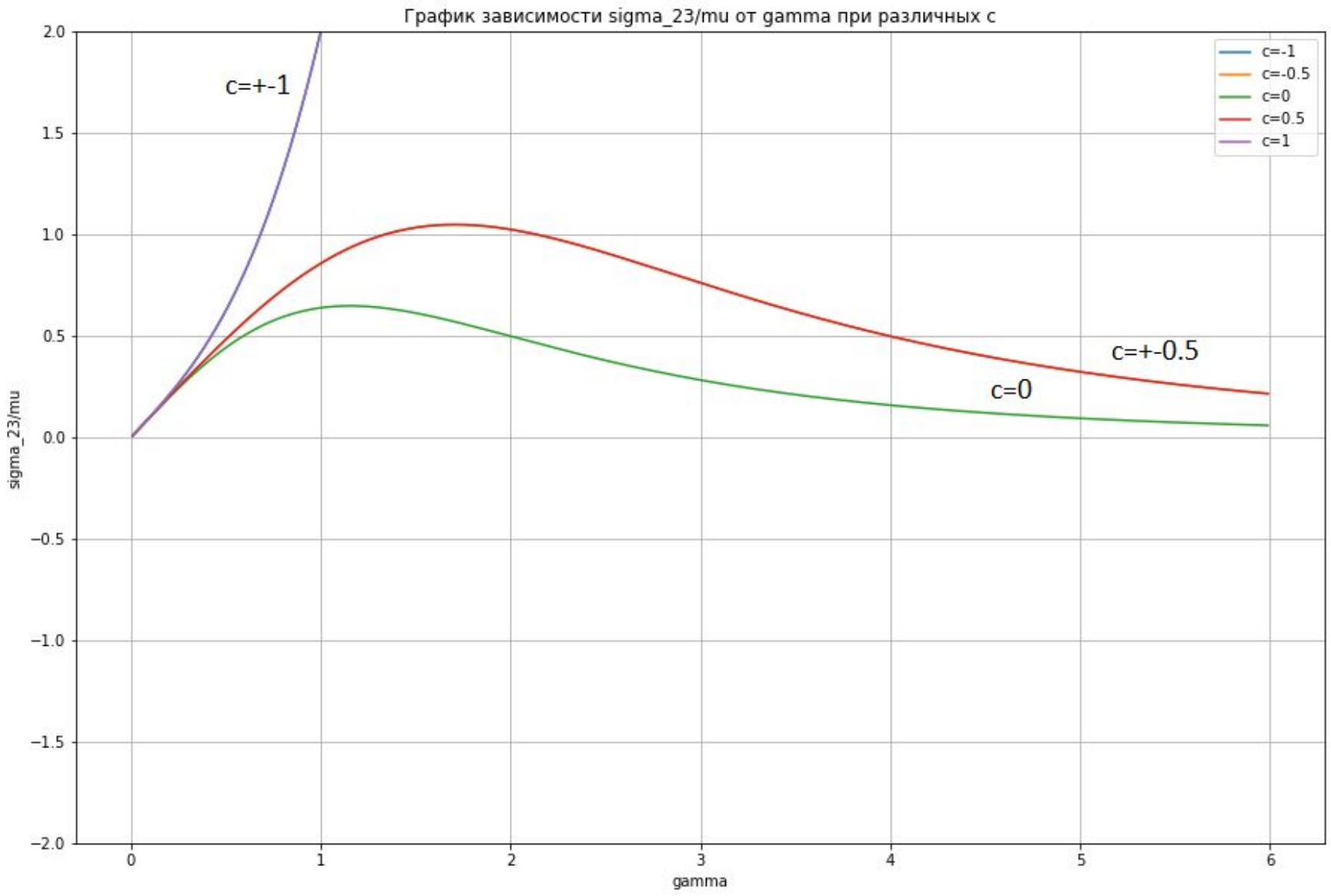


График зависимости sigma_23/mu от gamma при различных c
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
c=+-1
c=+-0.5
c=0
sigma_23/mu
gamma
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0
1
2
3
4
5
6

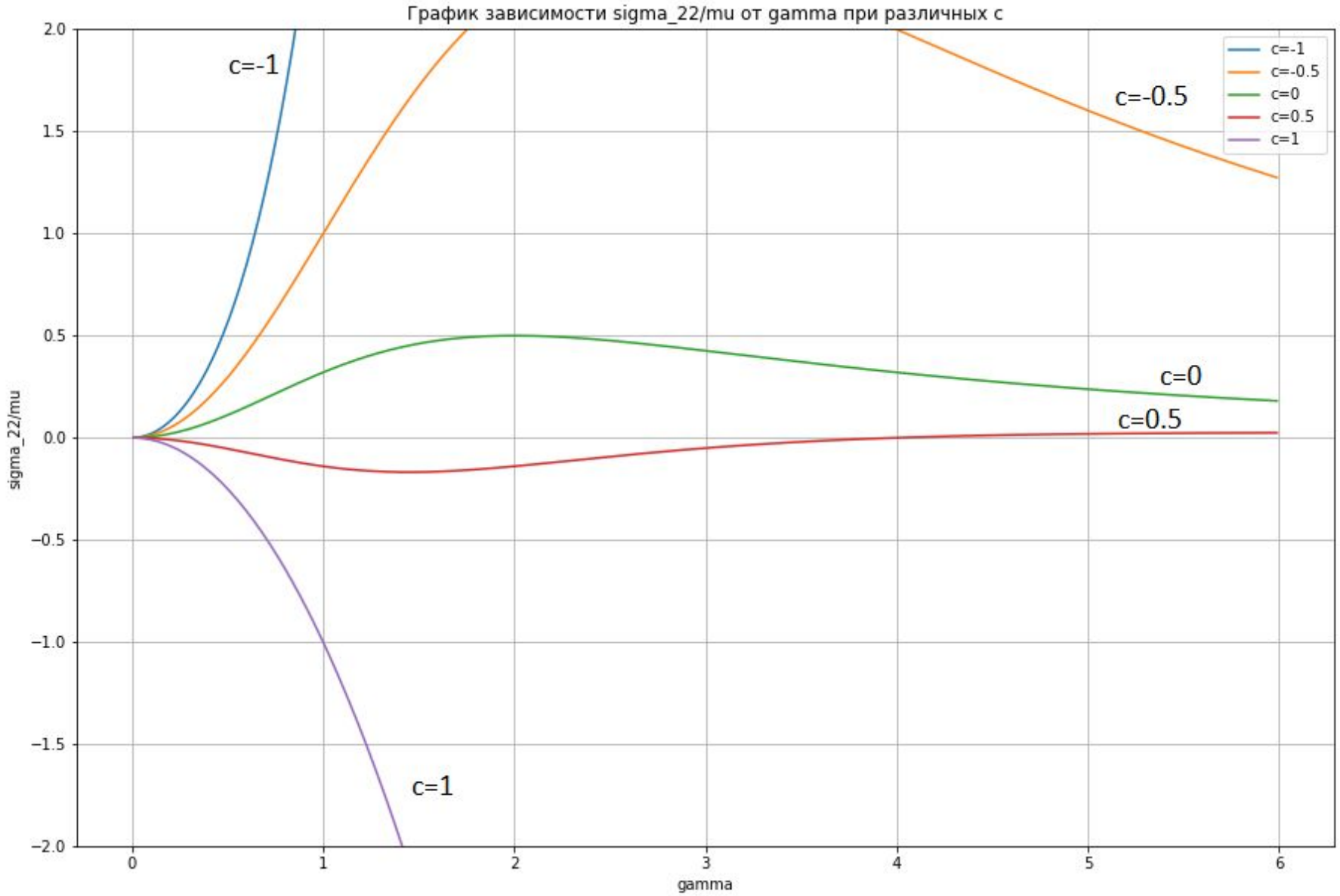
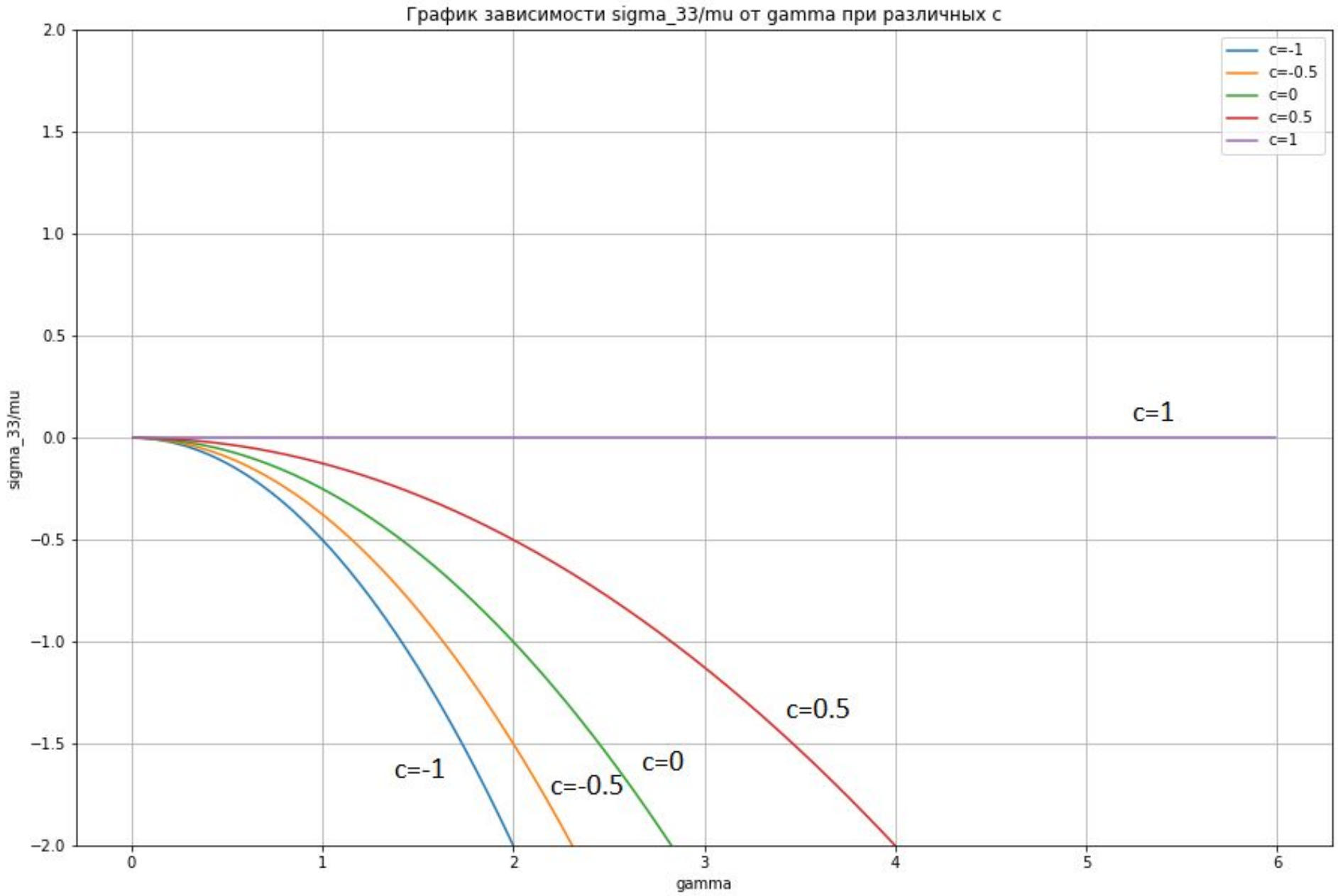


График зависимости sigma_22/mu от gamma при различных c
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
sigma_22/mu
gamma
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0
1
2
3
4
5
6

Левые модели:



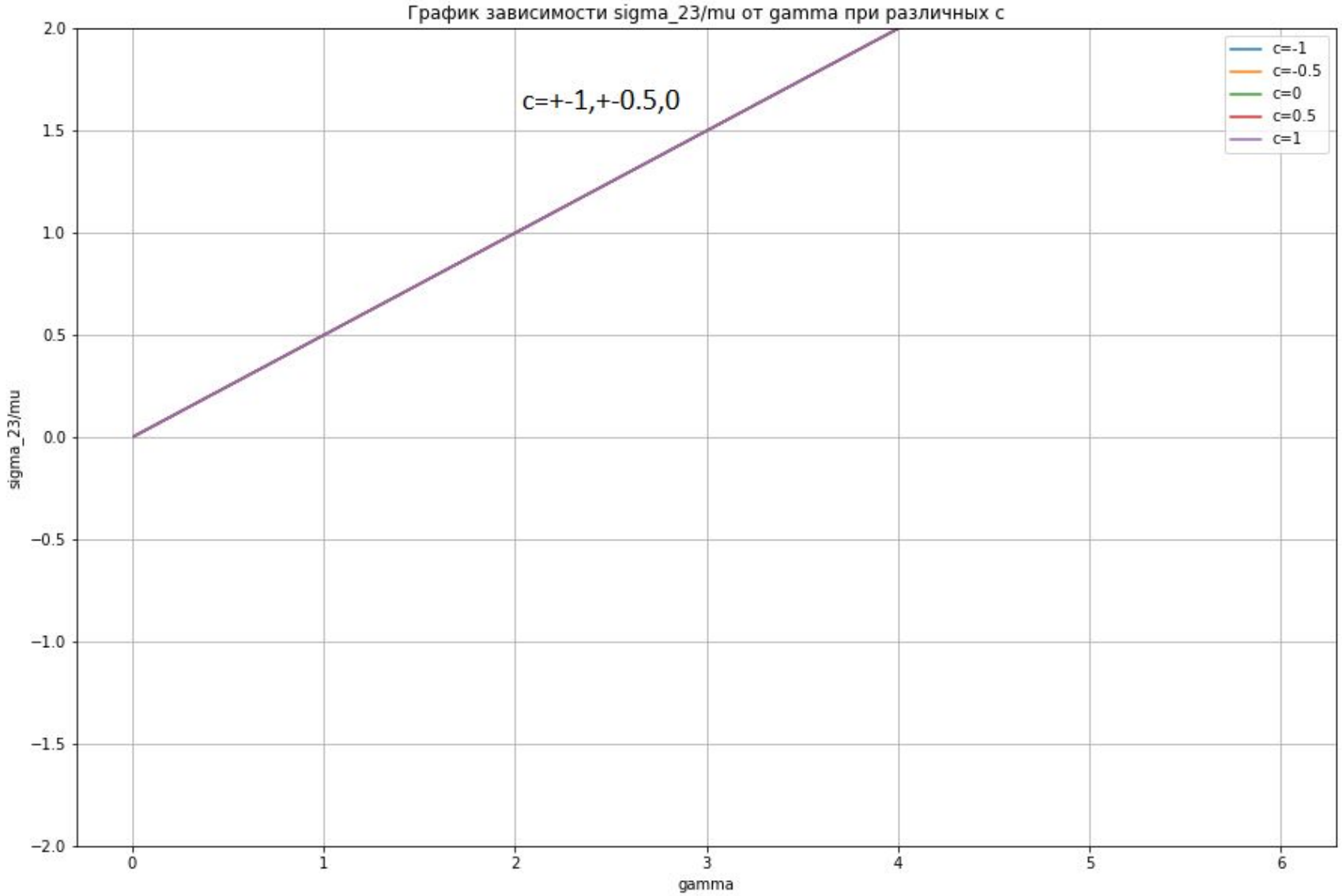


График зависимости sigma_23/mu от gamma при различных c
c=+-1,+-0.5,0
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
sigma_23/mu
gamma
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0
1
2
3
4
5
6

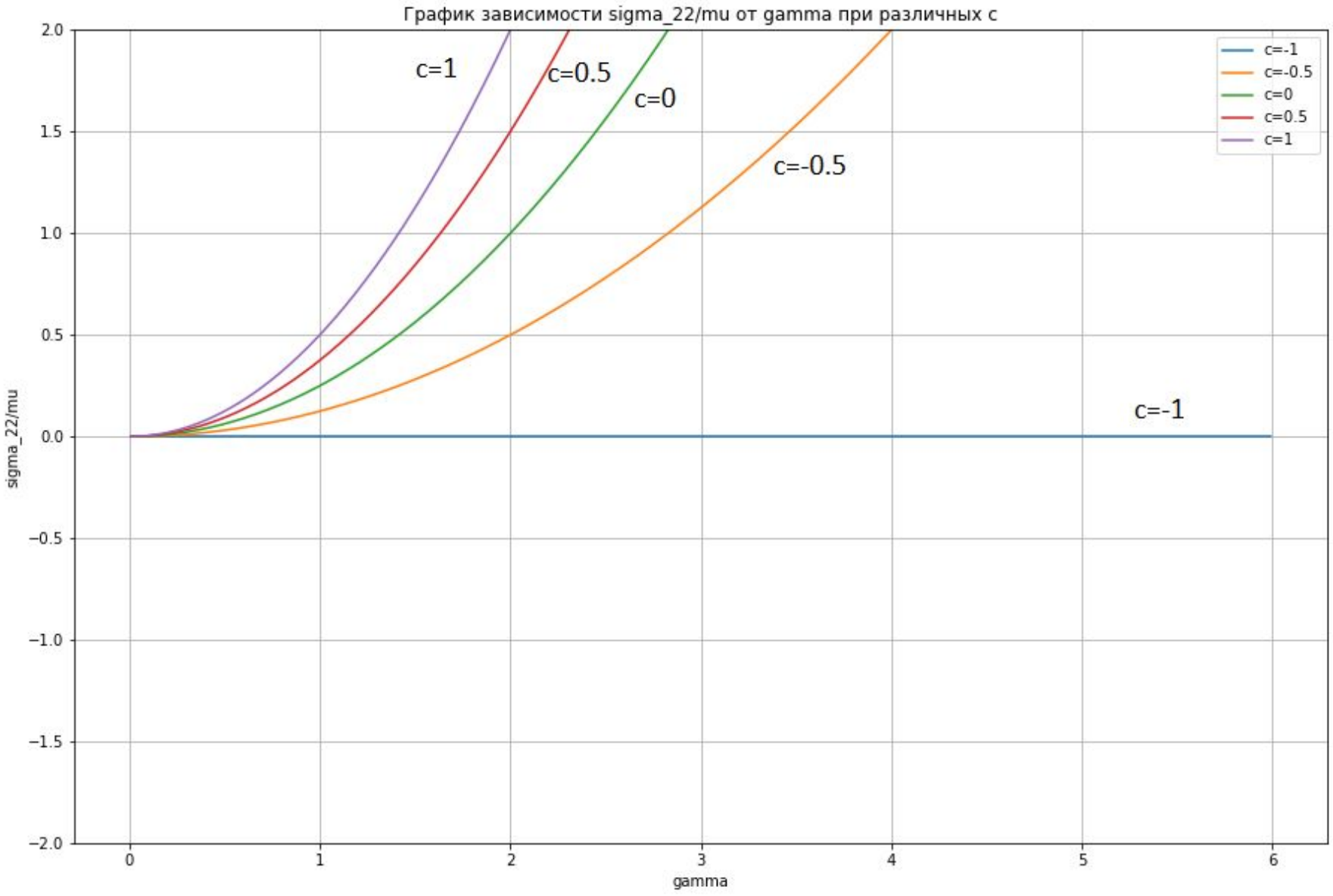


График зависимости sigma_22/mu от gamma при различных c
c=-1
c=-0.5
c=0
c=0.5
c=1
c=1
c=0.5
c=0
c=-0.5
c=-1
sigma_22/mu
gamma
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0
1
2
3
4
5
6

Заключение

Все рассмотренные модели при развитых конечных деформациях заметно отличаются друг от друга не только количественно, но и качественно. Путем выбора различных тензоров деформаций и напряжений в рамках одной формы определяющих соотношений (здесь в форме закона Гука) можно существенно варьировать свойства моделей, получая широкий спектр для описания свойств нелинейно упругих сред.

Следует отметить, что при малых деформациях все модели совпадают друг с другом и выражают классические свойства линейной упругости, описываемые законом Гука.

Список литературы

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с. (См. также: М.: 1965-1966; М.: 1971; М.: 1978)
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. М.: Наука, 1973.Т.1.-536 с. Т.2.-584 с.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592с.
4. Jaric J. Mehanika Kontinuuma. Beograd: IRO Gradevinska knjiga, 1988. 392 pp.
5. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006.272 с.
6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. Бровко Г.Л. Основы механики сплошной среды. М.: Изд-во <<Попечительский совет механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова>>. Ч. 1. ---2011. 96 с. Ч.2. --- 2013. 128 с.
8. Бровко Г.Л. Обобщенная теория тензорных мер деформаций и напряжений в классической механике сплошной среды. М.: Вестник МГУ, 2018.
9. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с
10. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 399-с.
11. Gurtin M. E., Fried E., Anand L. The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge University Press: Cambridge, New York, 2010. 694 pp.
12. Черных К.Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения). СПб.: Изд-во «Соло», 2004.
13. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309~с.