

**Московский Государственный университет имени
М.В. Ломоносова Механико-математический
факультет Кафедра теории упругости**

**О моделировании свойств
нелинейной упругости с помощью
различных мер деформаций и
напряжений**

Студент: Климов Егор Сергеевич

Преподаватель: Бровко Георгий
Леонидович

Группа: 425

Введение

В работе с целью изучения возможностей использования построенных голономных мер для описания свойств упругости при конечных деформациях было выделено пять пар энергетически сопряженных правых и левых голономных мер, в терминах которых построены 10 моделей упругих сред с определяющими соотношениями в форме закона Гука и исследовано поведение этих моделей в простейших квазистатических движениях: чисто объемная деформация, одноосное растяжение-сжатие, простой сдвиг.

Цели и задачи

Цель:

- Исследование возможностей использования новых голономных мер для описания свойств упругости

Задачи:

- Построение тензоров деформаций и напряжений для простейших квазистатических движений
- Построение моделей упругих сред с определяющими соотношениями в форме закона Гука
- Исследование полученных зависимостей

Основные обозначения

Закон движения задается в виде: $x = x(x, t)$;

Деформация сплошной среды в процессе движения характеризуется аффином деформаций: $A = \left\| \frac{\partial x}{\partial x} \right\|$;

Мера деформаций Коши: $C = A^T A = X^2$ и Фингера: $F = A A^T = Y^2$

Где X, Y определяются из полярного разложения аффинора деформаций: $A = QX = YQ$

Тензор истинных напряжений Коши: S

Рассмотрим новые тензоры деформаций и напряжений, определенные по формулам:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c &\equiv (\mathbf{X} - \mathbf{X}^{-1}) [(1+c)\mathbf{X} + (1-c)\mathbf{X}^{-1}]^{-1} \equiv (\mathbf{C} - \mathbf{I})[(1+c)\mathbf{C} + (1-c)\mathbf{I}]^{-1} \equiv \\ &\equiv \mathcal{E}_I [\mathbf{I} + (1+c)\mathcal{E}_I]^{-1} \equiv \mathcal{E}_{II} [\mathbf{I} - (1-c)\mathcal{E}_{II}]^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_c &\equiv \frac{1}{4} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{-1}) [(1+c)\mathbf{Y} + (1-c)\mathbf{Y}^{-1}] \equiv \frac{1}{4} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}) [(1+c)\mathbf{F} + (1-c)\mathbf{I}] \equiv \\ &\equiv \mathbf{E}_I [\mathbf{I} + (1+c)\mathbf{E}_{II}] \equiv \mathbf{E}_{II} [\mathbf{I} - (1-c)\mathbf{E}_I] \equiv \frac{1}{2} [(1+c)\mathbf{E}_{II} + (1-c)\mathbf{E}_I]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_c &\equiv \frac{1}{4} [(1+c)\mathbf{X} + (1-c)\mathbf{X}^{-1}] \mathbf{Q}^T \mathbf{S} \mathbf{Q} [(1+c)\mathbf{X} + (1-c)\mathbf{X}^{-1}] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{4} [(1+c)\mathbf{C} + (1-c)\mathbf{I}] \Sigma_I [(1+c)\mathbf{C} + (1-c)\mathbf{I}] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{4} [(1+c)\mathbf{I} + (1-c)\mathbf{C}^{-1}] \Sigma_{II} [(1+c)\mathbf{I} + (1-c)\mathbf{C}^{-1}]\end{aligned}$$

Будем рассматривать 10 моделей нелинейно упругих сред, свойства которых задаются соотношениями в форме закона Гука между энергетически сопряженными тензорами, а именно, правые моде

$$\Sigma_c = \lambda \theta_c I + 2\mu \varepsilon_c,$$

где $\theta_c = \text{tr}(\varepsilon_c)$; $c = \pm 1, \pm 0.5, 0$; и левые модели:

$$S = \lambda \theta_c I + 2\mu E_c,$$

где $\theta_c = \text{tr}(E_c)$; $c = \pm 1, \pm 0.5, 0$; S – тензор напряжений Коши.

Чисто объемная деформация

Рассмотрим квазистатическое равновесие тела под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки (всестороннего давления) при отсутствии массовых сил. Тензор истинных напряжений Коши S определяется равенством для его компонент:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Закон движения (деформацию) примем в виде:

$$x_i = \lambda_i X_i,$$

где $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha$ - кратность удлинения. Посчитаем аффино́р деформации:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

И меры деформаций Коши C и Фингера F :

$$C = F = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

выразим левые и правые тензорные меры деформаций и напряжений через α :

$$\varepsilon_c = \text{diag}\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2} \cdot (1 + (1 + c)\frac{\alpha^2 - 1}{2})^{-1}\right),$$

$$E_c = \text{diag}\left(\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot ((1 + c)\alpha^2 + (1 - c))\right).$$

$$\Sigma_c = \text{diag}\left(\frac{1}{4}((1 + c)\alpha^2 + (1 - c))^2 \cdot \frac{p}{\alpha^2}\right),$$

Подставив, тензоры деформаций и напряжений в закон Гука, найдем связь параметра нагружения p и параметра деформации (кратности удлинения) α :

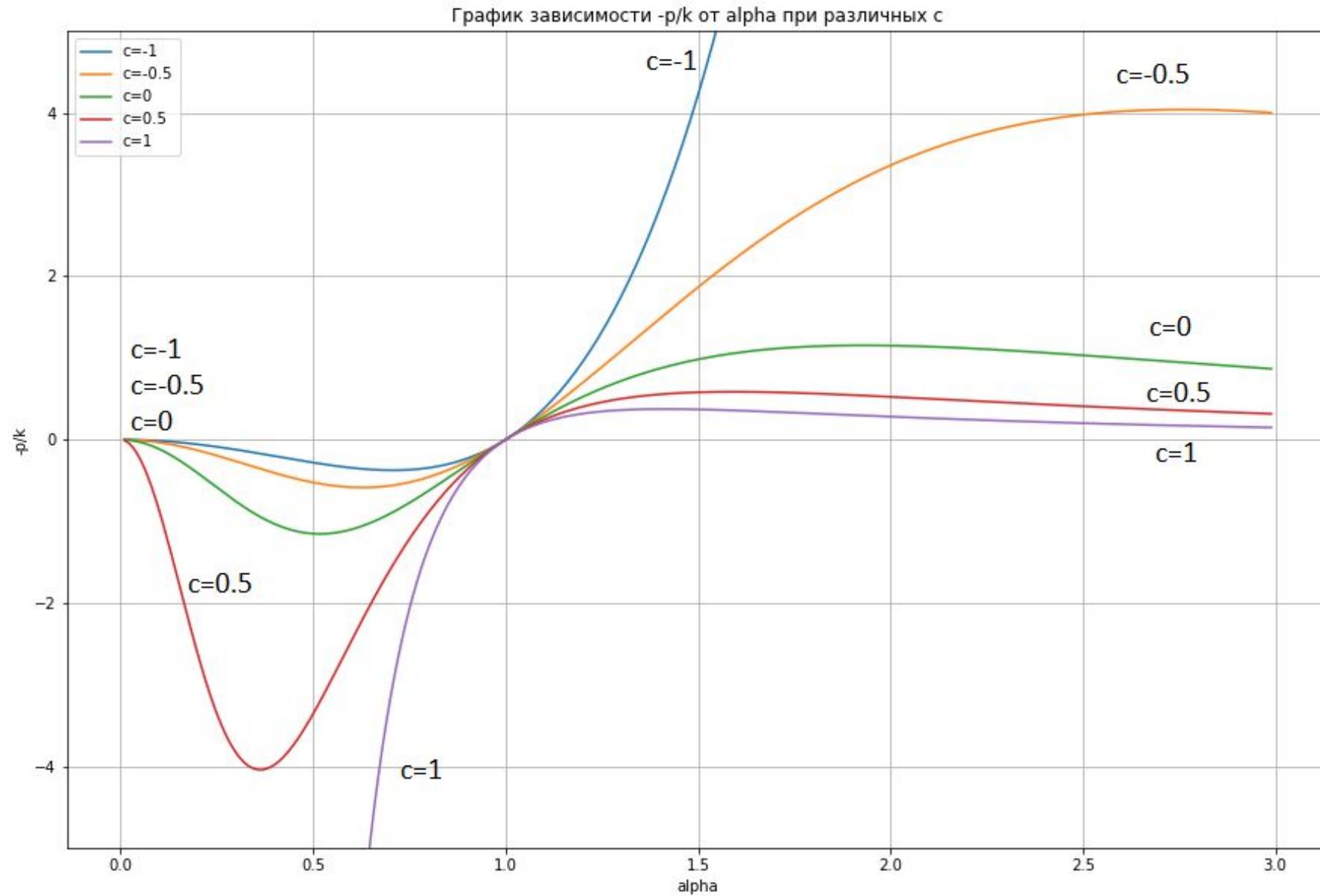
$$-\frac{p}{K} = 12 \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{2} \cdot \left(1 + (1 + c) \frac{\alpha^2 - 1}{2}\right)^{-1} / \left(\left((1 + c)\alpha^2 + (1 - c)\right)^2 \frac{1}{\alpha^2}\right),$$

$$-\frac{p}{K} = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot \left(\left((1 + c)\alpha^2 + (1 - c)\right)\right),$$

Соответственно для правых и левых моделей

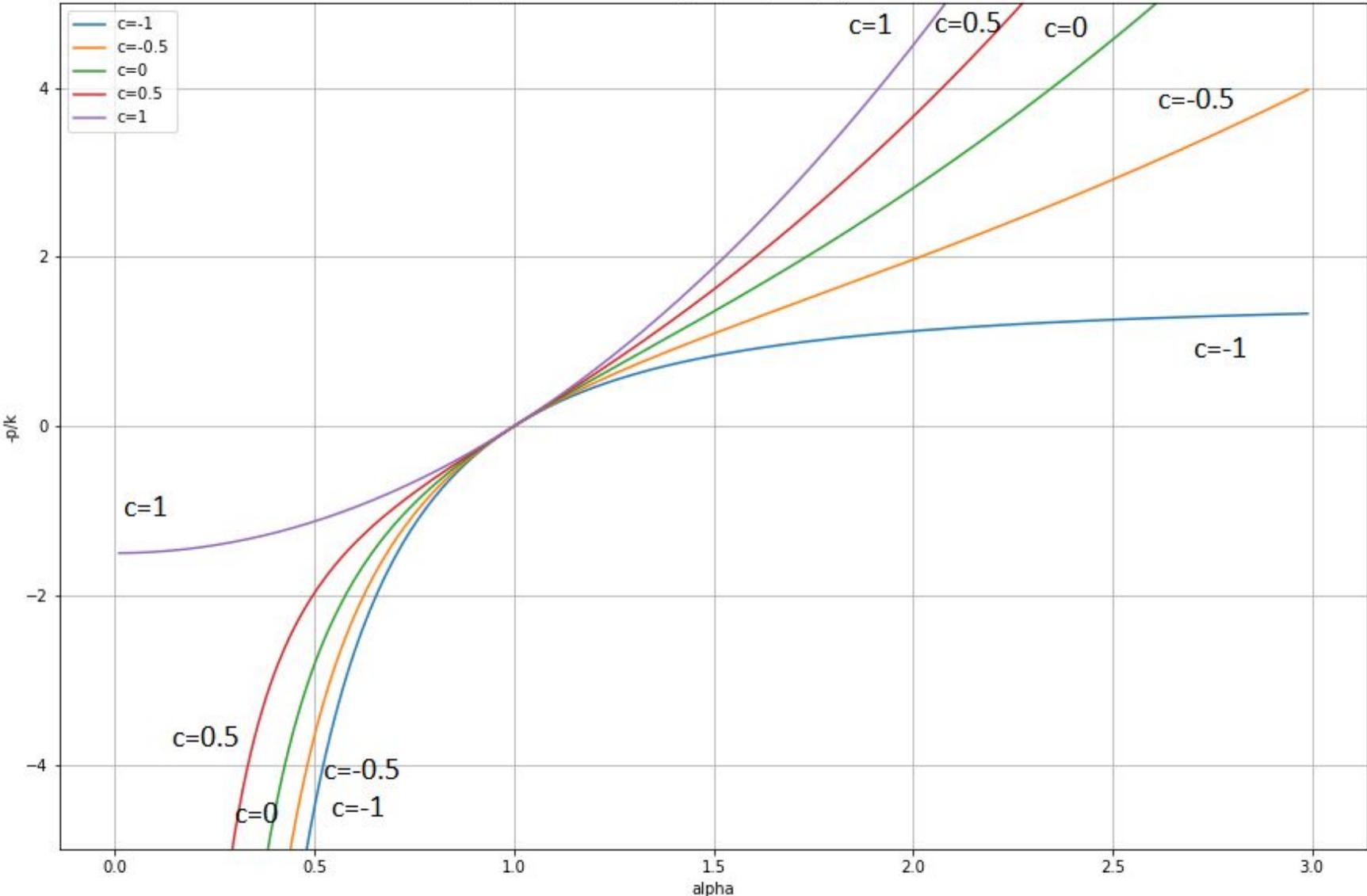
Изобразим полученные зависимости графически:

Для правых моделей:



Для левых моделей:

График зависимости $-p/k$ от α при различных c



Одноосное растяжение-сжатие

Закон движения примем в виде: $x_1 = \alpha X_1, x_2 = \beta X_2, x_3 = \beta X_3$

Тензор истинных напряжений имеет вид $S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Аналогично чисто объемной деформации запишем тензоры деформаций и напряжений, подставим в закон Гука и выразим параметры напряжения через параметры деформации:
Для правых моделей:

$$\frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha) = \frac{4\alpha^2(\alpha^2 - 1)}{(2 + (1 + c)(\alpha^2 - 1))((1 + c)\alpha^2 + (1 - c))^2},$$

$$\frac{F}{F_0} = \beta^2 = 1 - \frac{2\nu \frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha)}{1 + \nu \frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha) + \nu \frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha)c},$$

$$\frac{P}{EF_0} = \frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha) \cdot \frac{F}{F_0}(\alpha);$$

Для левых моделей:

$$\frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \left((1+c)\alpha^2 + (1-c) \right) \right),$$

$$\frac{F}{F_0} = \beta^2 = \frac{\sqrt{2\nu \frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha) - c)^2 + (1 - c^2)} + c - 2\nu \frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha)}{1 + c},$$

$$\frac{P}{EF_0} = \frac{\sigma_{11}}{E}(\alpha) \cdot \frac{F}{F_0}(\alpha),$$

Изобразим, полученные зависимости графически при фиксированном $\nu=0.5$

Графики для правых моделей:

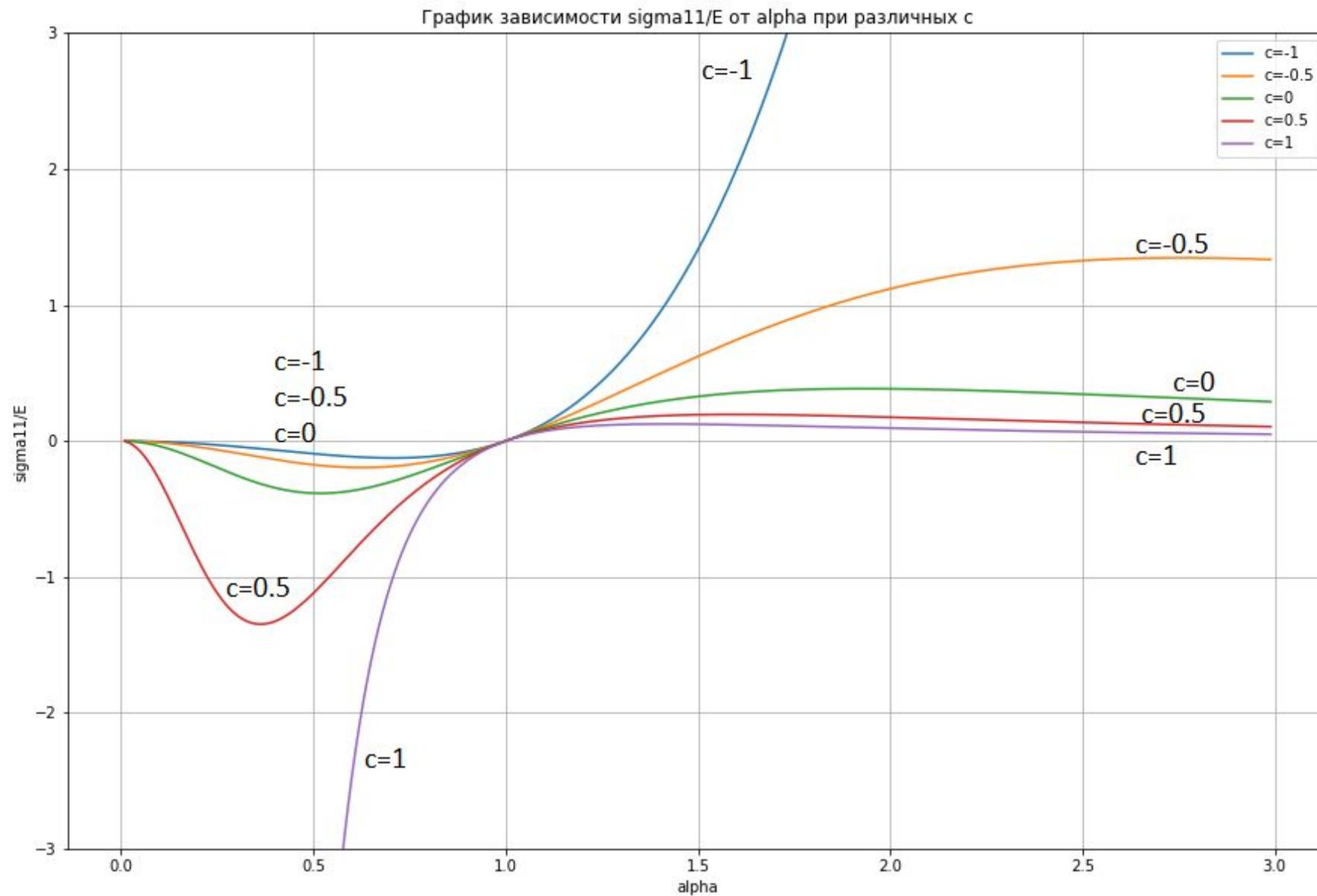


График зависимости F/F_0 от α при различных c и коэффициенте пуассона = 0.5

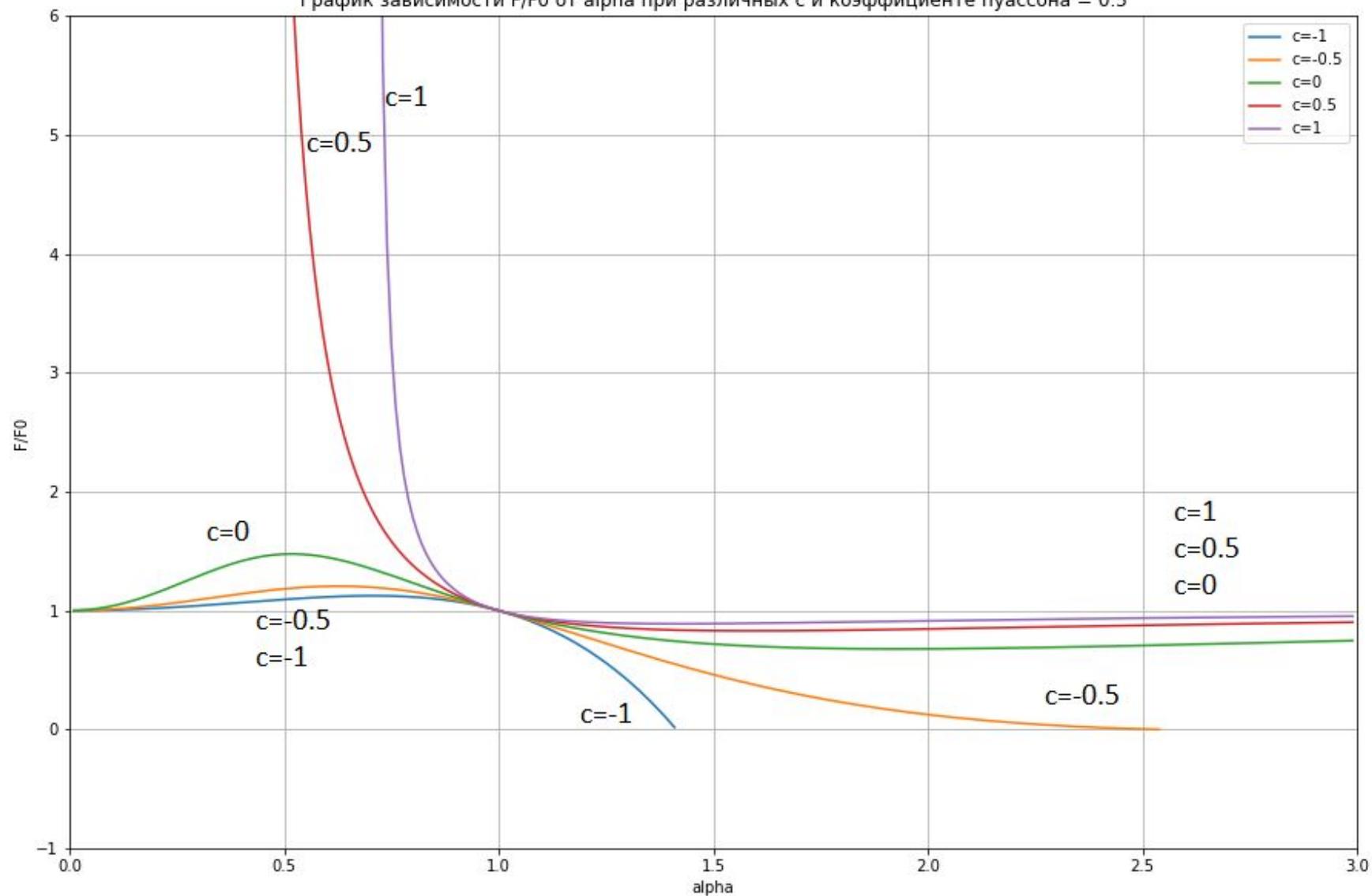
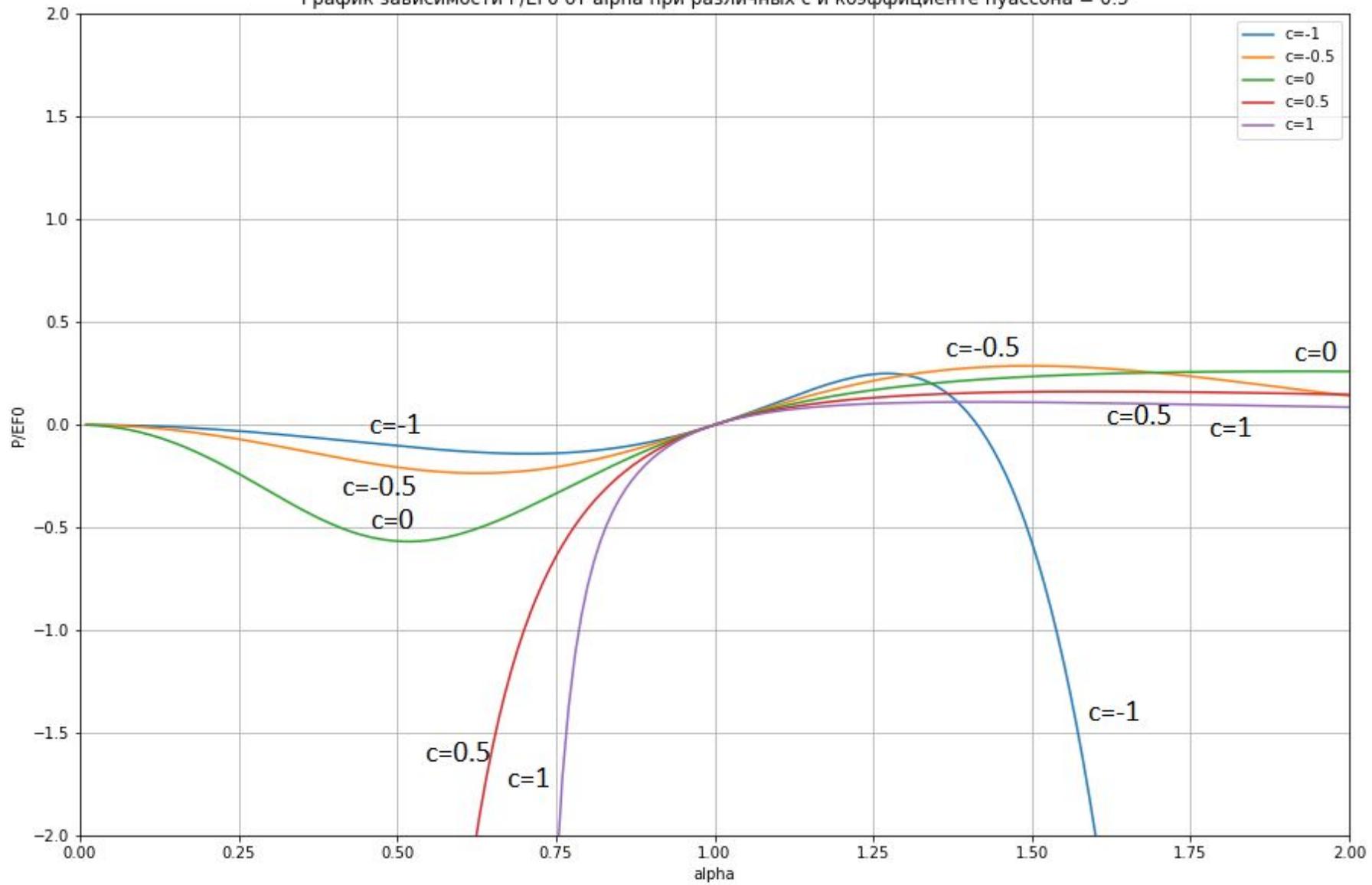


График зависимости $P/EF0$ от α при различных c и коэффициенте пуассона = 0.5



Для левых моделей:

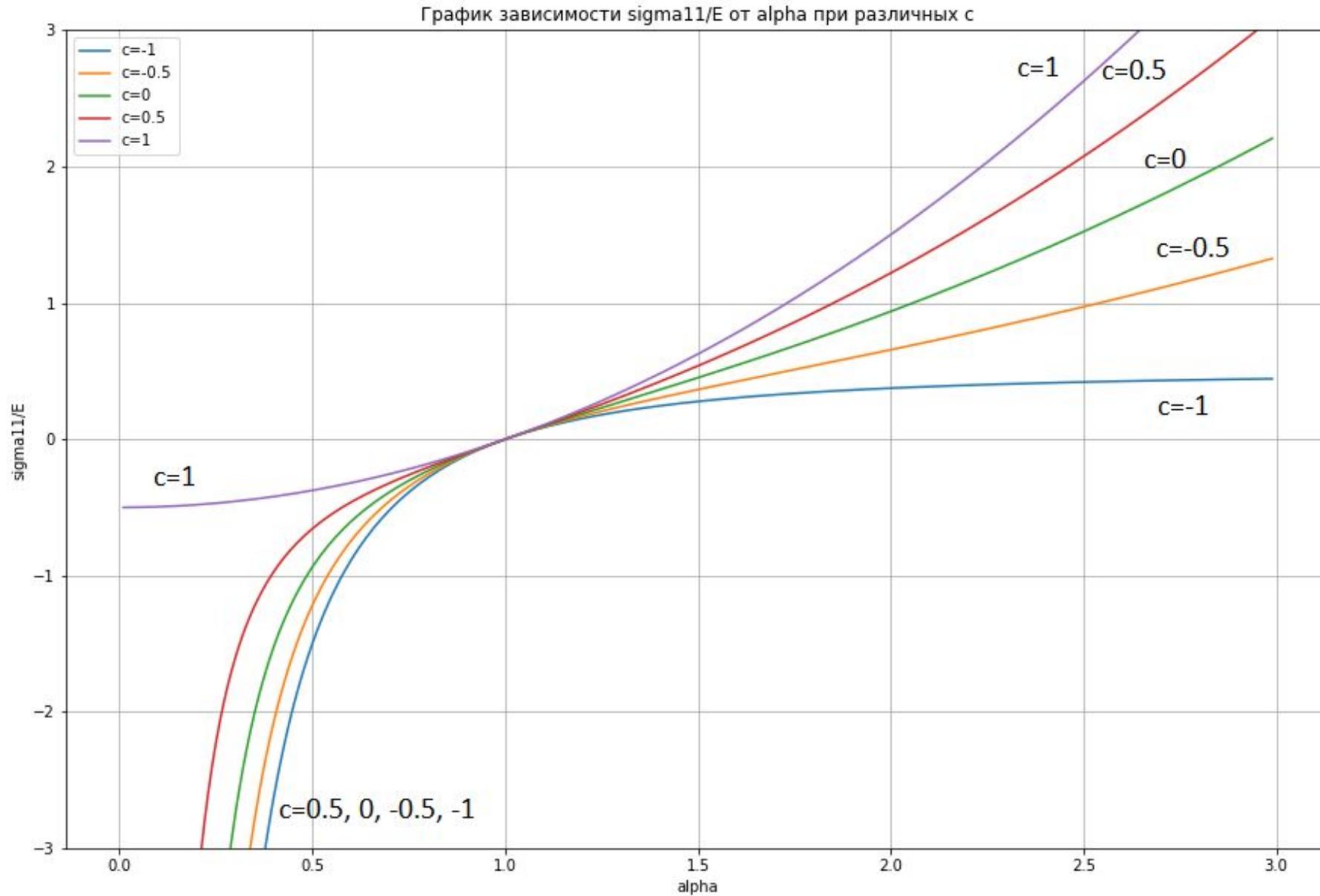


График зависимости F/F_0 от α при различных c

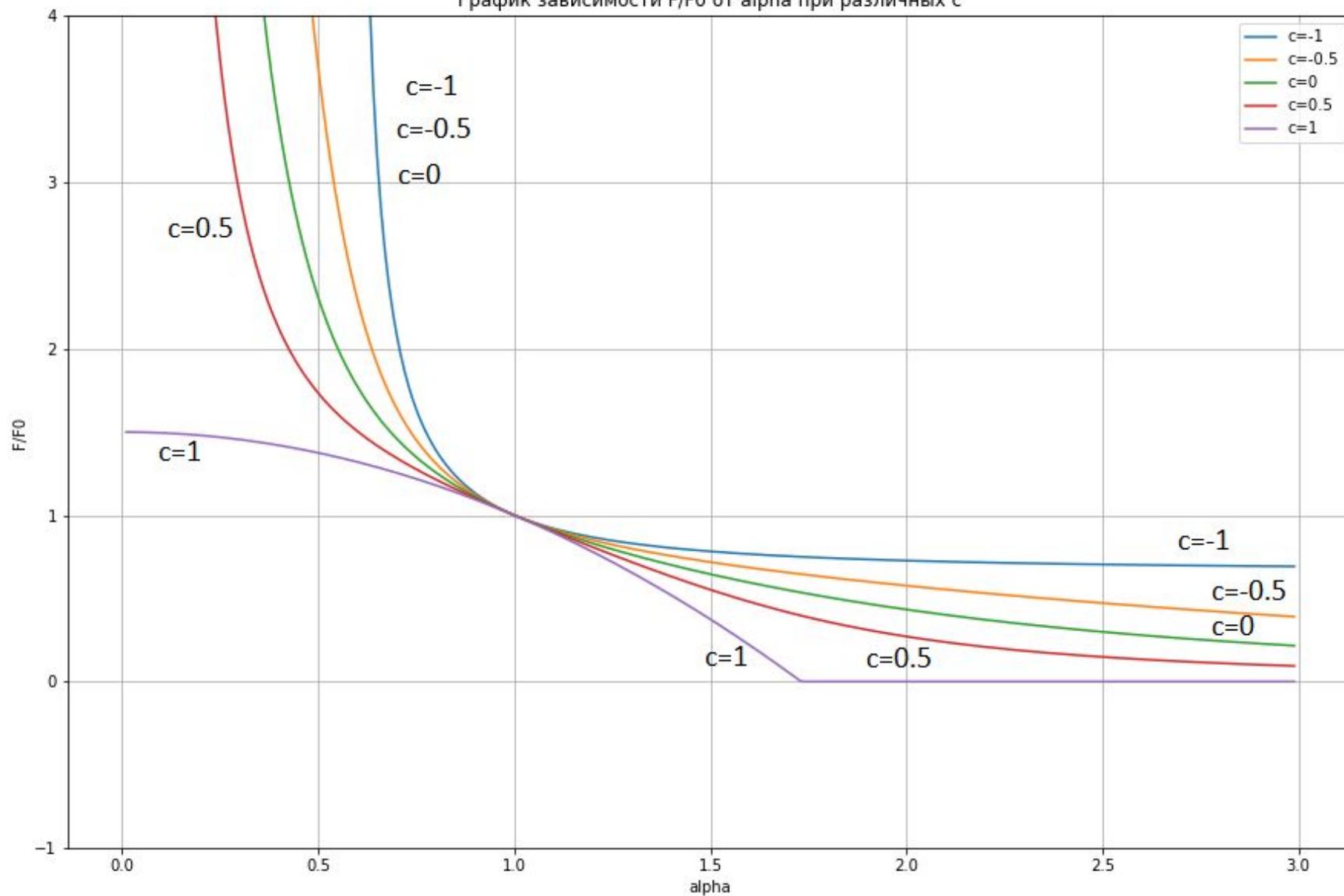
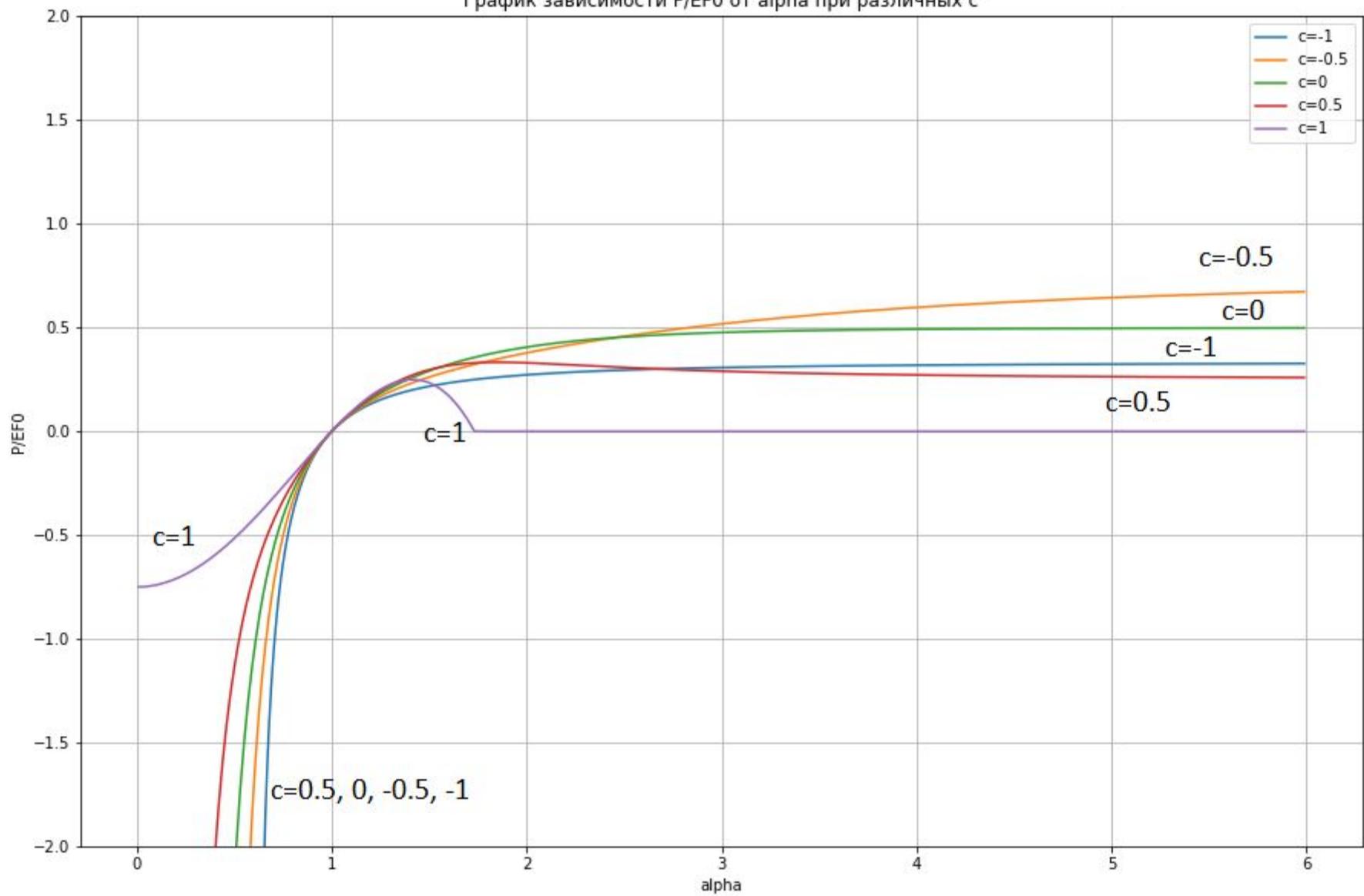


График зависимости P/EF0 от alpha при различных c



Простой сдвиг

Закон движения примем в виде $x_1 = X_1, x_2 = X_2 + \gamma X_3, x_3 = X_3,$

Получим зависимости ненулевых компонент тензора напряжений
Правые модели:

$$\frac{\sigma_{22}}{\mu} = \frac{4(-4\gamma^2 - \gamma^4 + 12c\gamma^2 + 3c\gamma^4 - 3c^2\gamma^4 + c^3\gamma^4)}{(-4 - \gamma^2 + c^2\gamma^2)^3}$$

$$\frac{\sigma_{23}}{\mu} = \frac{8(4\gamma + \gamma^3 + 3c^2\gamma^3)}{(-4 - \gamma^2 + c^2\gamma^2)^3}$$

$$\frac{\sigma_{33}}{\mu} = \frac{4(4\gamma^2 + \gamma^4 + 12c\gamma^2 + 3c\gamma^4 + 3c^2\gamma^4 + c^3\gamma^4)}{(-4 - \gamma^2 + c^2\gamma^2)^3},$$

Левые модели:

$$\frac{\sigma_{22}}{\mu} = 1/4\gamma^2(1 + c)$$

$$\frac{\sigma_{23}}{\mu} = 1/2\gamma$$

$$\frac{\sigma_{33}}{\mu} = 1/4\gamma^2(1 + c) - 2\gamma^2,$$

Фиксируем $\lambda=0$ и построим графики:

Правые модели:

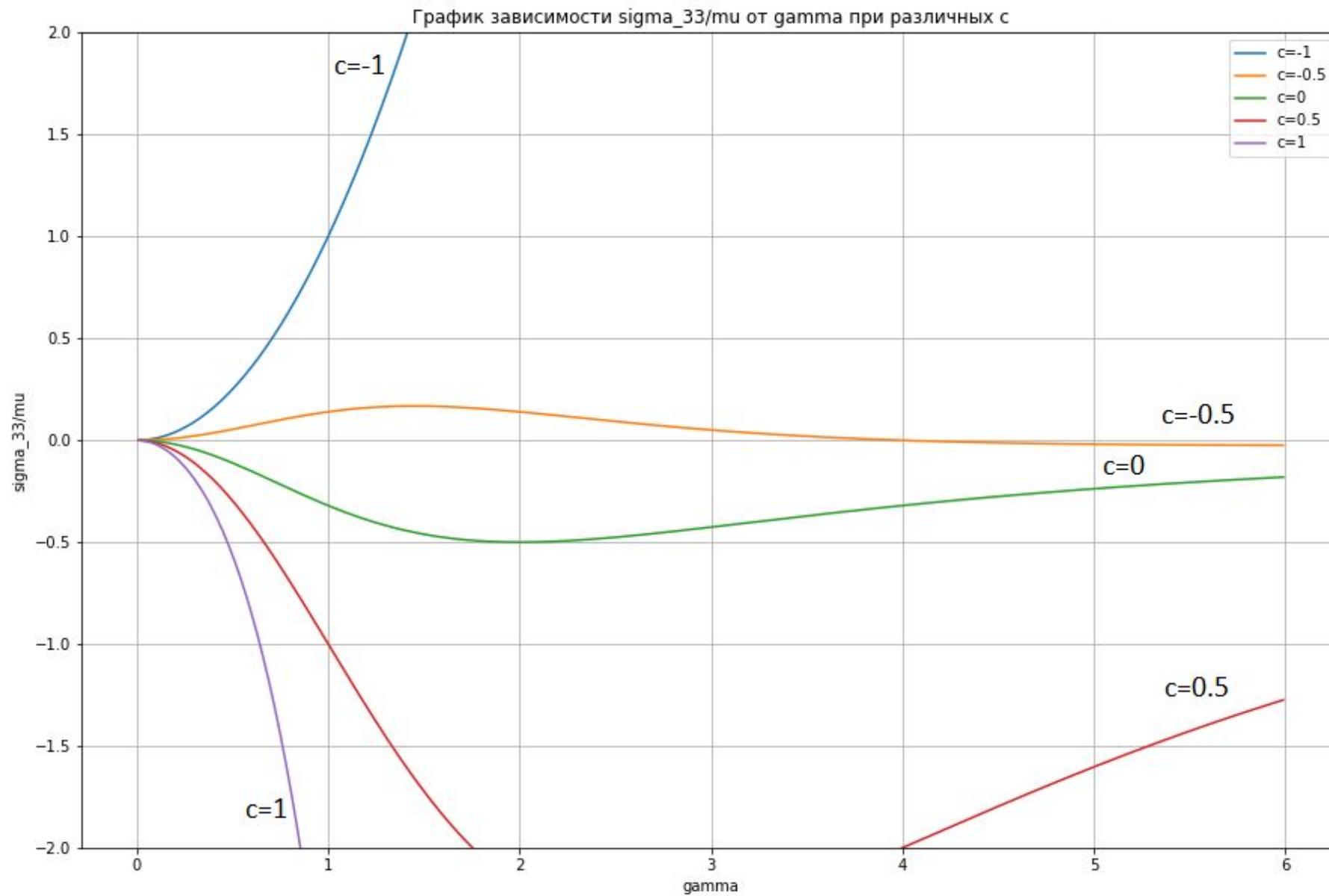


График зависимости σ_{23}/μ от γ при различных c

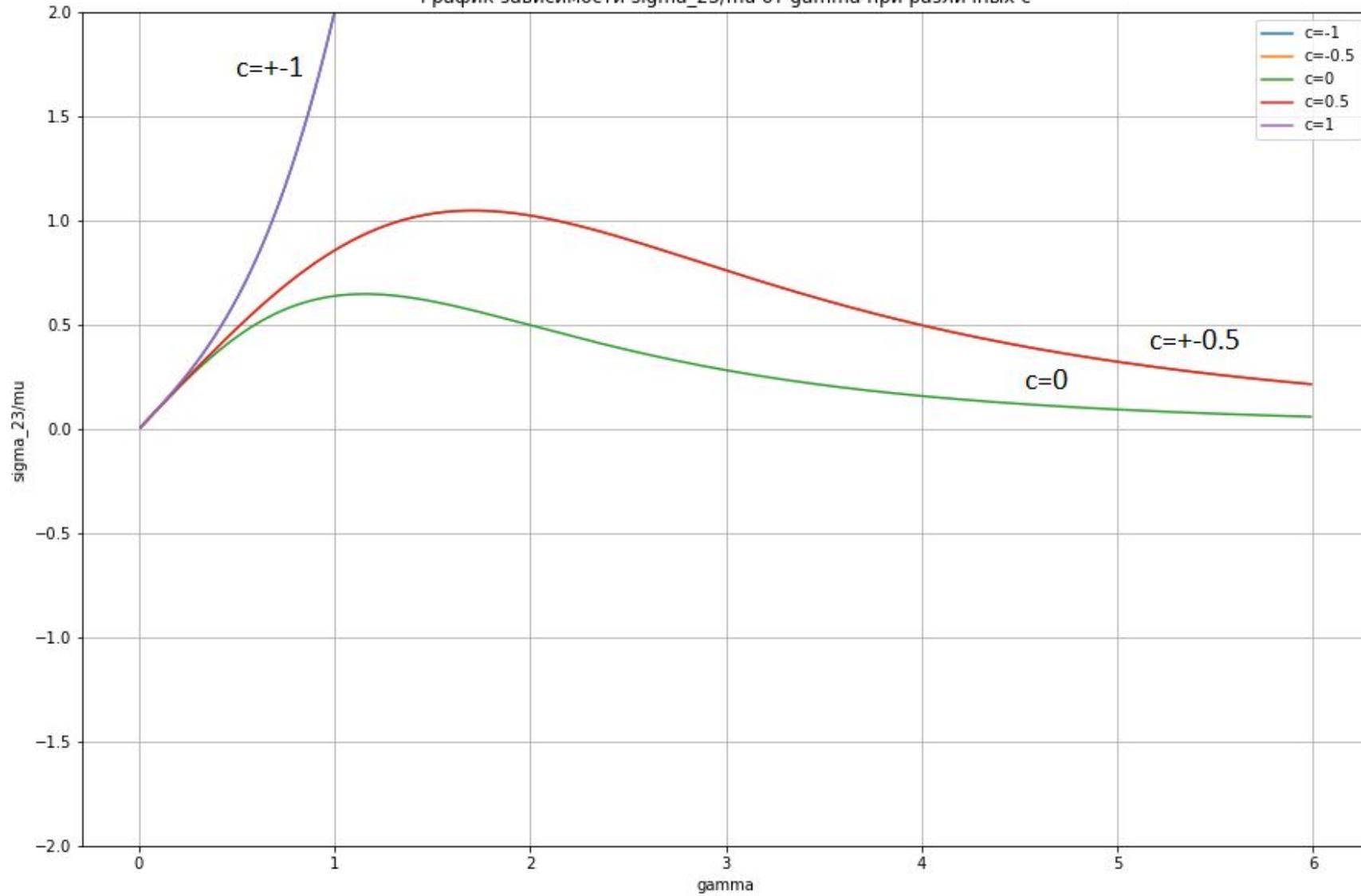
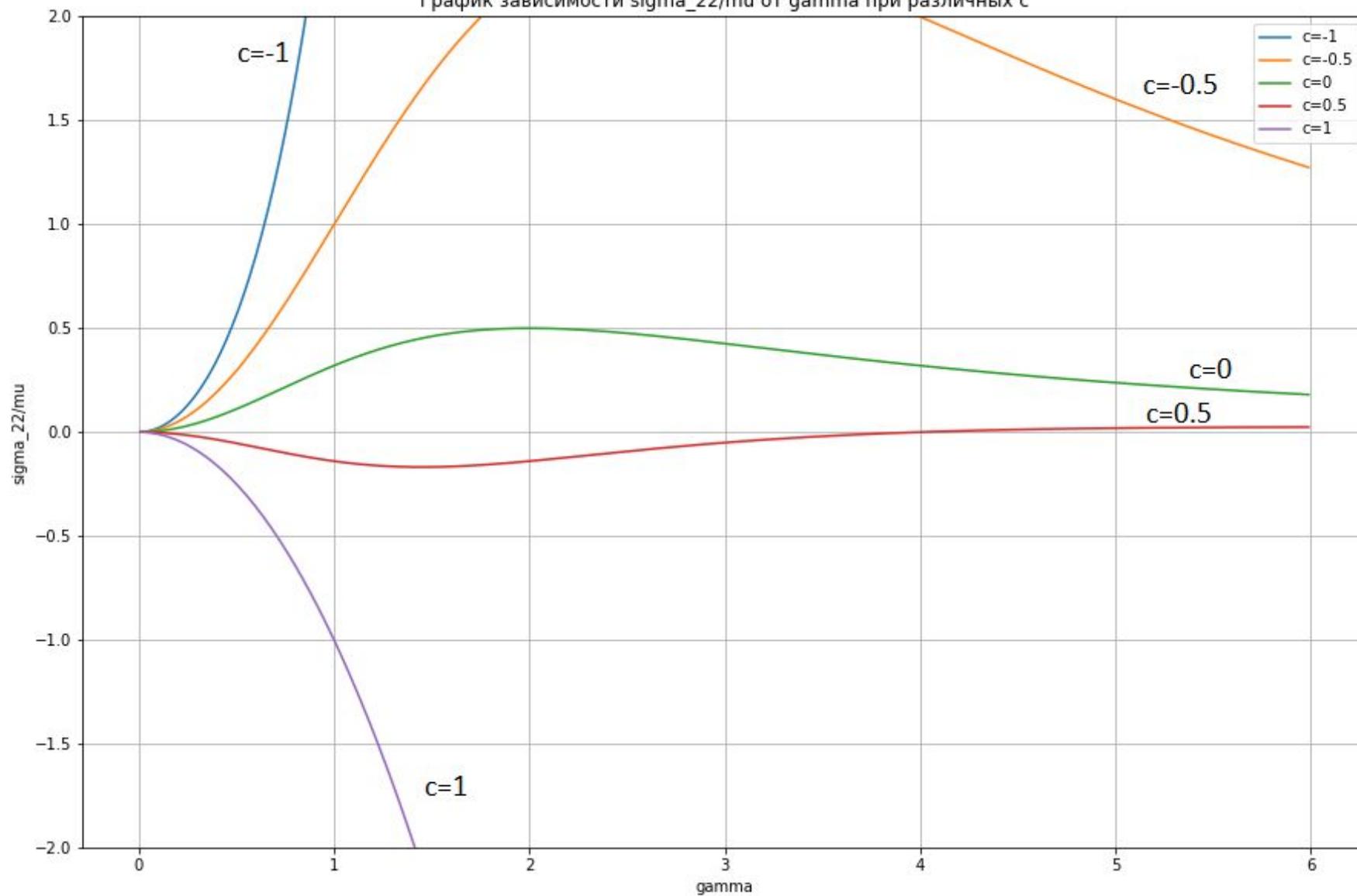


График зависимости σ_{22}/μ от γ при различных c



Левые модели:

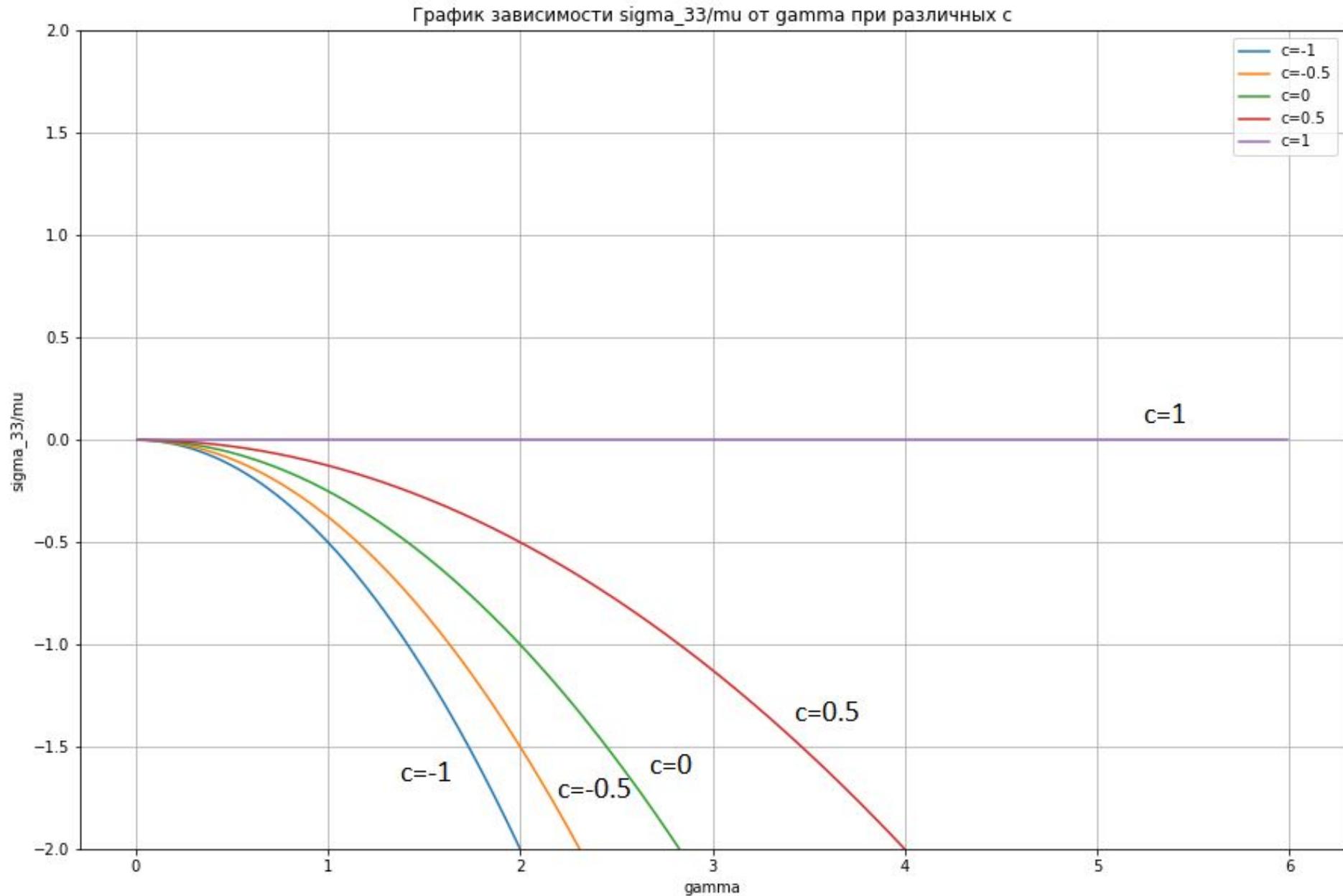


График зависимости σ_{23}/μ от γ при различных c

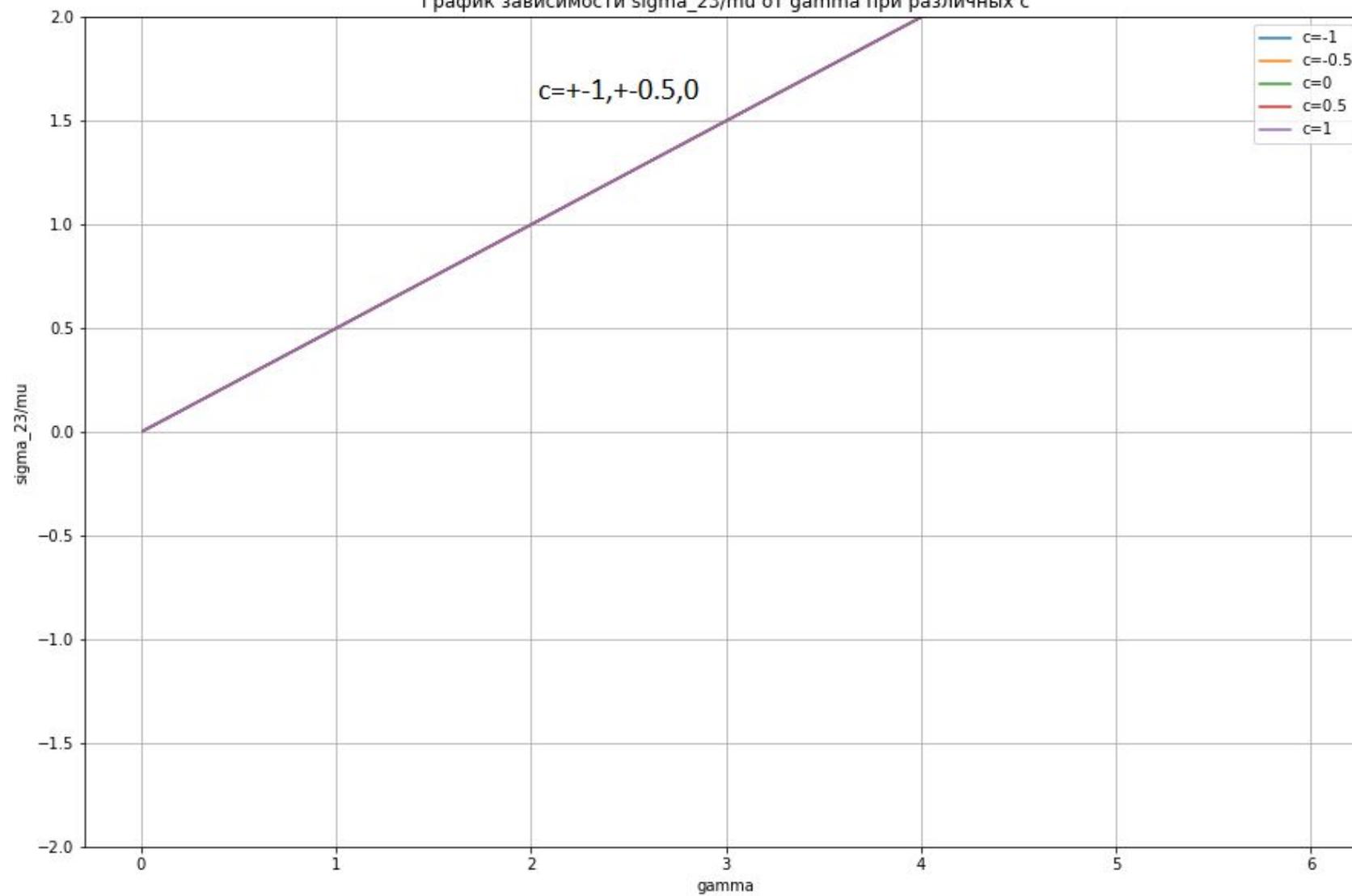
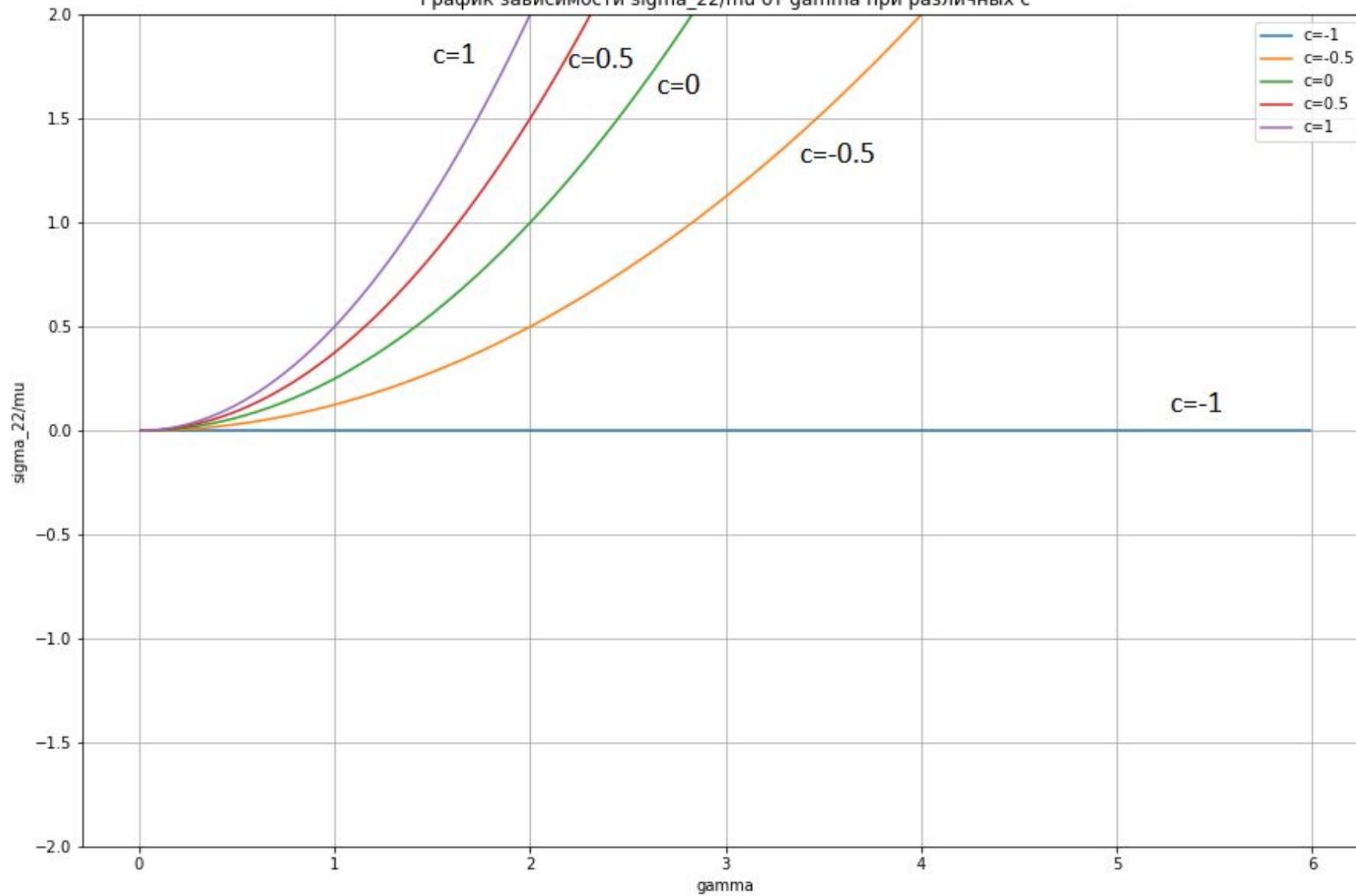


График зависимости σ_{22}/μ от γ при различных c



Заключение

Все рассмотренные модели при развитых конечных деформациях заметно отличаются друг от друга не только количественно, но и качественно. Путем выбора различных тензоров деформаций и напряжений в рамках одной формы определяющих соотношений (здесь в форме закона Гука) можно существенно варьировать свойства моделей, получая широкий спектр для описания свойств нелинейно упругих сред.

Следует отметить, что при малых деформациях все модели совпадают друг с другом и выражают классические свойства линейной упругости, описываемые законом Гука.

Список литературы

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с. (См. также: М.: 1965-1966; М.: 1971; М.: 1978)
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1,2. М.: Наука, 1973.Т.1.-536 с. Т.2.-584 с.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592с.
4. Jaric J. Mehanika Kontinuuma. Beograd: IRO Gradevinska knjiga, 1988. 392 pp.
5. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006.272 с.
6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. Бровко Г.Л. Основы механики сплошной среды. М.: Изд-во <<Попечительский совет механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова>>. Ч. 1. ---2011. 96 с. Ч.2. --- 2013. 128 с.
8. Бровко Г.Л. Обобщенная теория тензорных мер деформаций и напряжений в классической механике сплошной среды. М.: Вестник МГУ, 2018.
9. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с
0. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 399-с.
1. Gurtin M. E., Fried E., Anand L. The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge University Press: Cambridge, New York, 2010. 694 pp.
2. Черных К.Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения). СПб.: Изд-во «Соло», 2004.
3. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309~с.