МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный аграрный университет»
(ФГБОУ ВО Южно-Уральский ГАУ)
Институт агроинженерии

Кафедра Эксплуатация машинно-тракторного парка, и технология и механизация животноводства

ЛЕКЦИЯ

на тему

Системы массового обслуживания

(продолжение 1)

по направлению подготовки 35.04.06 «Агроинженерия»

программа подготовки – Технический сервис в сельском хозяйстве

доцент кафедры ЭМТП и ТМЖ,
к.т.н, доцент В.Н. Николаев

Одноканальная система M / M / 1 с ожиданием

В предыдущих пунктах мы рассматривали простейшие системы массового обслуживания, в которых не было очереди, соответственно, ожидания обслуживания. Но большинство реальных систем имеют блок ожидания. В данной модели имеется единственный узел обслуживания, а на вместимость блока ожидания и емкость источника требований никаких ограничений не накладывается (рис. 7).

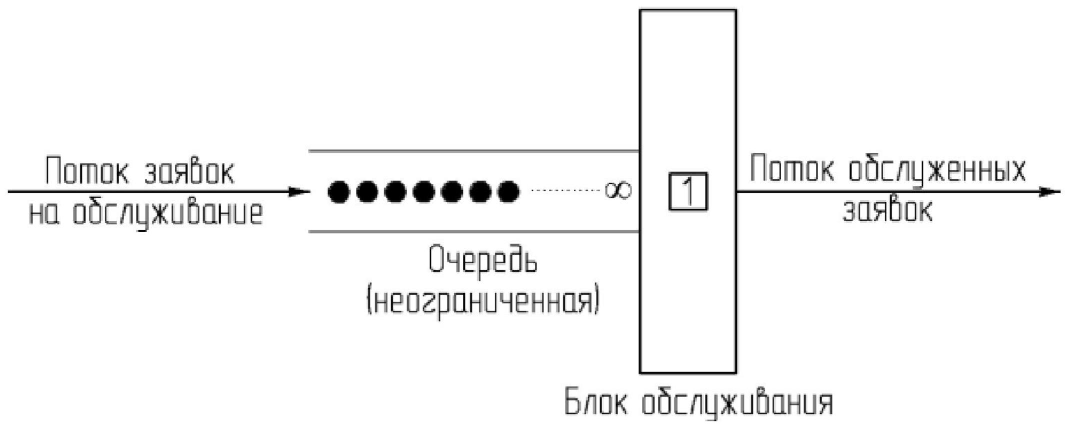

Рис. 7. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием

Входной и выходной потоки являются пуассоновскими с параметрами λ и μ соответственно (рис. 8).

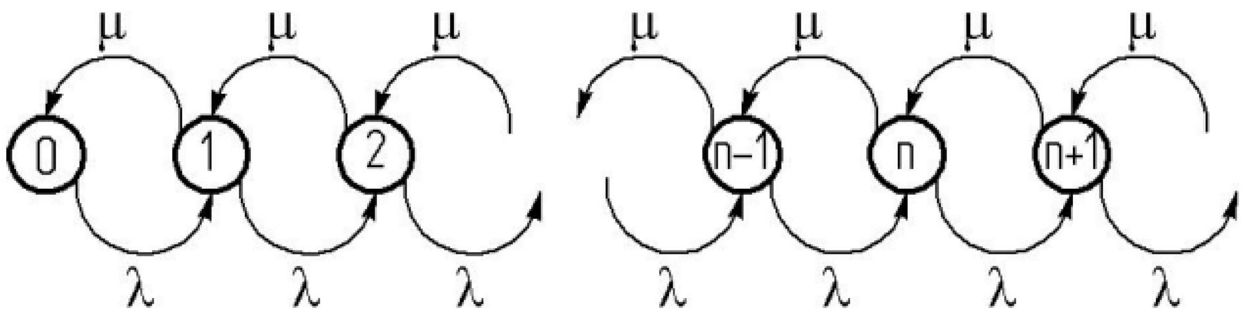

Рис. 8. Входной и выходной потоки одноканальной системы

Используя формулы, полученные для схемы гибели и размножения, рассчитаем финальные вероятности состояний системы.

Обозначим

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{28}$$

тогда

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)^{-1} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho \tag{29}$$

Ряд сходится (имеет конечную сумму), если $p < 1$.

$$P_n = (1 - p) \cdot p^n, \tag{30}$$

$$W_q = L_q = 0. \tag{31}$$

Среднее число заявок, находящихся в системе на обслуживании

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)p^2 \qquad (32)$$

или после преобразований:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (33)$$

Среднее время нахождения заявки в системе

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (34)$$

Средняя продолжительность пребывания в очереди

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (35)$$

Средняя длина очереди

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (36)$$

или

$$L_q = L_s - \rho \qquad (37)$$

Пример 4. Собранные сведения о работе моечной станции показывают, что автомобили поступают на эту станцию в соответствии с пуассоновским распределением со средним 5 автомобилей в час. Каждый клиент требует своего набора услуг, поэтому продолжительность выполнения работ для каждого автомобиля также случайная величина, Станция одновременно может обслуживать только один автомобиль. Определить основные характеристики системы: средняя длина очереди, среднее время пребывания автомобиля на станции, среднее время простоя станции.

Решение: Сначала получим интенсивность потока транспорта и интенсивность обслуживания в час:

$$\lambda = 5,\ \mu = 60 / 10 = 6$$

Тогда средняя длина очереди

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1-\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 4{,}17$$

Среднее время пребывания автомобилей на моечной станции в ожидании обслуживания и на обслуживании

$$W_s = 1 / (\mu - \lambda) = 1$$

то есть обслуживание в среднем займет один час, при этом моечная станция будет простаивать тогда, когда на ней не будет автомобилей

$$p_0 = 1 - \varrho = 1 / 6 \approx 0{,}17$$

поэтому 17% времени моечная станция будет простаивать.

Система с конечной очередью M / M / 1 / N

Разница между этой моделью и рассмотренной выше заключается только в том, что максимальное число требований, допускаемых в систему, ограничено N (то есть максимальное число требований в очереди N-1 и одно требование на обслуживании). Это означает, что при наличии в системе N требований ни одна из дополнительных заявок на обслуживание не может присоединиться к очереди в блоке ожидания. В результате эффективная частота поступлений требований (требований, которые будут обслужены) для указанной системы становится меньше общего потока требований (рис. 9).

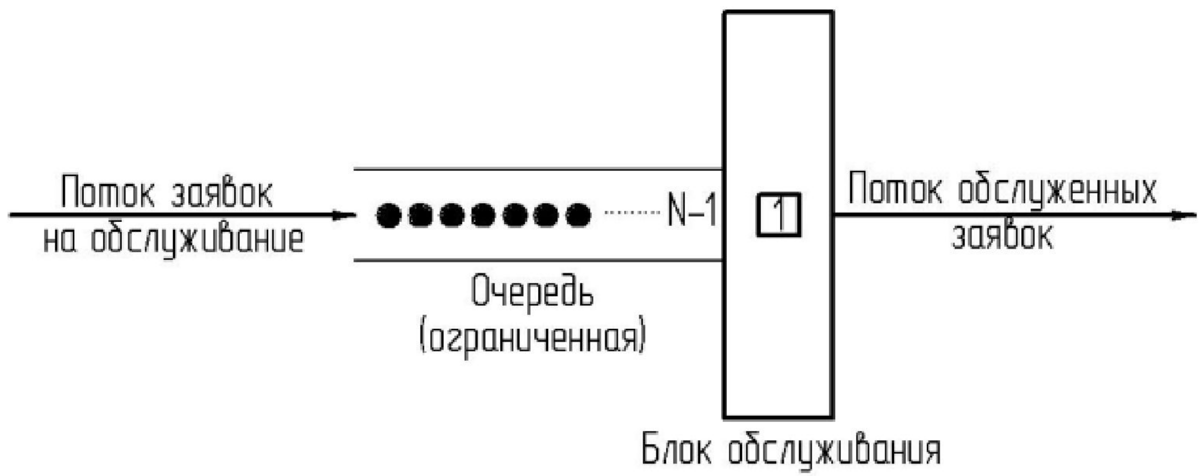

Рис. 9 - Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограничением очереди

В данном случае финальные вероятности того, что в системе находится больше N требований, отсутствуют (рис. 10).

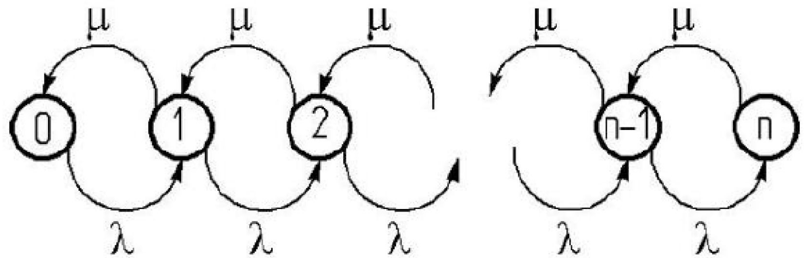

Рис. 10 - Входной и выходной потоки системы с ограничением очереди

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-p^{N+1}}, p \neq 1 \\ \frac{1}{N+1}, p = 1 \end{cases} \tag{38}$$

Поэтому основные характеристики также имеют два варианта в зависимости от значений ρ, то есть

$$p_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-p^{N+1}} p^n, p \neq 1 \\ \frac{1}{N+1}, p = 1 \end{cases} \tag{39}$$

В данном случае финальные вероятности того, что в системе находится больше N требований, отсутствуют (рис. 10).

$$L_s = \begin{cases} \frac{[1-(N+1)p^N + Np^{N+1}]}{(1-p)(1-p^{N+1})}, p \neq 1 \\ \frac{N}{2}, p = 1 \end{cases} \quad (40)$$

Так как требования получают отказ, когда блок ожидания заполнен, поэтому эффективный поток клиентов

$$\lambda_{эфф} = \lambda(1 - P_N) \quad (41)$$

Часть потока клиентов, получающая отказ в обслуживании, равна

$$\lambda_{отк} = \lambda P_N \quad (42)$$

Средняя длина очереди определяется как

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_{эфф}}{\mu} = L_s - \rho(1 - p_N) \quad (43)$$

Средняя продолжительность пребывания требования в системе

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{эфф}} = \frac{L_s}{\lambda(1-p_N)} \quad (44)$$

Средняя продолжительность простоя требования в очереди

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{эфф}} = \frac{L_q}{\lambda(1-p_N)} \quad (45)$$

Пример 5. Вспомним пример для предыдущей модели (пример 4). На этот раз у моечной станции оборудовано 5 стоянок для размещения автомобилей, ожидающих обслуживания. Если все площадки заняты, то дополнительно пребывающие автомобили вынуждены искать другую станцию.

Для моечной станции интересно оценить, сколько клиентов она теряет из-за ограниченности мест стоянки, а также оценить среднее количество мест стоянки, которые будут заняты, и среднее время обслуживания автомобиля.

Решение: В рассматриваемом примере число мест в системе

$$N = 5 + 1 = 6,$$

а отношение интенсивности поступления требований и интенсивности их обслуживания

$$\varrho = \lambda / \mu = 56$$

Тогда вероятность того, что все места в системе заняты

$$p_N = \frac{1-\rho}{1-p^{N+1}} p^N = \frac{1-\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^7} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}077$$

Отсюда следует, что в среднем в час будет отказано следующему числу клиентов

λотк = λ • PN = 5 • 0,0774 = 0,387

$$L_q = L_s - \frac{\lambda_{эфф}}{\mu} = \frac{[1-(N+1)p^N + Np^{N+1}]\rho}{(1-p)(1-p^{N+1})} - \rho(1-p_N) = 1{,}52$$

Средняя очередь или количество автомобилей на стоянке

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{эфф}} = \frac{L_s}{\lambda(1-p_N)} = 0{,}496 \text{ ч}$$

Время обслуживания в такой системе составляет примерно полчаса, что значительно меньше, чем при неограниченном количестве мест на стоянке (1 ч.).

Многоканальная система с ожиданием M / M / c

Система массового обслуживания, описываемая данной моделью, функционирует так, что при входном потоке λ требования параллельно могут обслуживаться на c приборах, каждый из которых имеет интенсивность обслуживания μ (рис. 11).

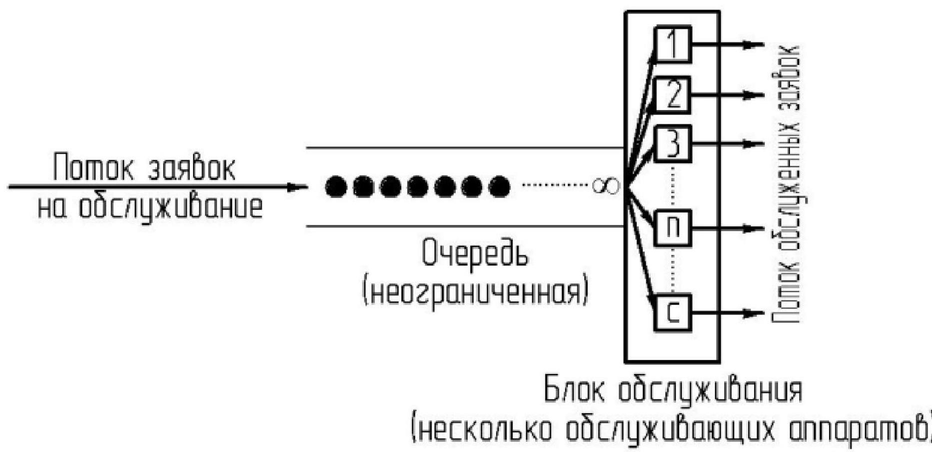

Рис. 11. Многоканальная система M / M / c

Входной и выходной потоки являются пуассоновскими. Цель использования нескольких приборов в повышении скорости обслуживания клиентов (по сравнению с одноканальной системой).

В данной модели интенсивность обслуживания зависит от количества требований в системе. При количестве требований n > c интенсивность обслуживания cμ. При количестве требований n < c интенсивность обслуживания nμ. (рис 12).

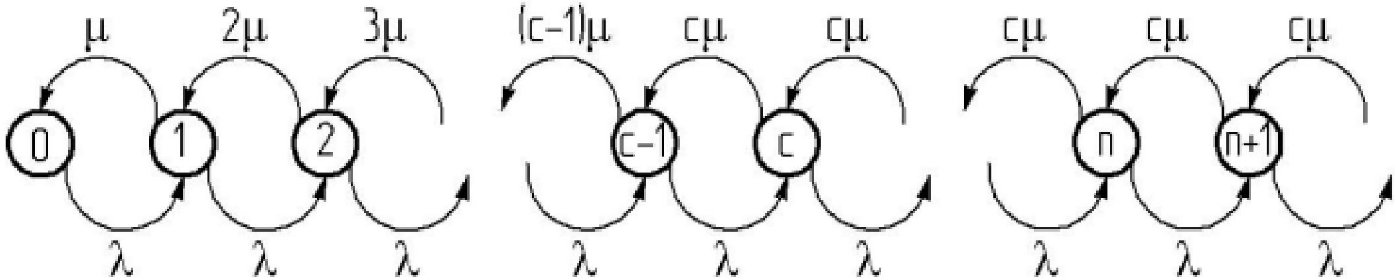

Рис. 5.12. Схема функционирования многоканальной системы

В данном случае формулы процесса гибели и размножения дадут следующий результат:

- вероятность бездействия системы

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=c}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda}{c!c^{n-c}}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{p^n}{n!} + \frac{p^c}{(c-1)!(c-p)}\right)^{-1} \qquad (46)$$

- вероятность нахождения n требований в системе

$$p_n = \begin{cases} \frac{p^n p_0}{c!c^{n-c}}, n \geq c \\ \frac{p^n p_0}{n!}, n < c \end{cases} \quad (47)$$

- средняя длина очереди

$$L_q = \frac{p^{c+1} p_0}{(c-1)!(c-p)^2} = \frac{cpp_c}{(c-p)^2} \quad (48)$$

- среднее количество требований, находящихся в системе

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{cpp_c}{(c-p)^2} + p \quad (49)$$

- средняя продолжительность пребывания требования в системе

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{cpp_c}{\lambda(c-p)^2} + \frac{1}{\mu} \quad (50)$$

- средняя продолжительность ожидания обслуживания

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{cpp_c}{\lambda(c-p)^2} \quad (51)$$

Пример 6. В небольшом городе функционируют две службы такси, принадлежащие разным фирмам. Каждая из служб располагает двумя автомобилями. При этом заказы на обслуживание, согласно имеющимся сведениям, распределяются между службами поровну. В диспетчерские службы обеих фирм поступает в среднем 10 вызовов в час. Среднее время обслуживания одного клиента 11,5 минут. Вызовы такси распределены по пуассоновскому закону, а время обслуживания распределено экспоненциально.

Эти две фирмы покупает третья сторона - фирма «Стрела». Необходимо рассчитать, как изменятся основные характеристики функционирования такси при объединении диспетчерских служб.

Решение: До объединения каждая фирма работала как система М / М / 2 с потоком заказов λ = 10, а после объединения - как система М / М / 4 с потоком заказов λ = 10 + 10 = 20 (до объединения в каждой фирме было по два автомобиля, а в фирме «Стрела» их четыре).

В каждой из этих служб коэффициент загруженности высок

$$\frac{\lambda}{c\mu} = \frac{10}{2 \cdot \frac{60}{11,5}} = 0,958$$

то есть составляет 95,8%. Но в фирме «Стрела» такая нагрузка сохраняется

$$\frac{\lambda}{c\mu} = \frac{20}{4 \cdot \frac{60}{11,5}} = 0,958$$

Но эффект в объединении диспетчерских служб отражается в других характеристиках.

Рассчитаем среднее время ожидания клиентом такси. При с = 2 отношение равно

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{5,217} = 1,917$$

и получим

$$p_0 = \left[\frac{p^0}{0!} + \frac{p^1}{1!} + \frac{p^2}{1!\,(2-p)}\right]^{-1} = 0,0212$$

$$W_q = \frac{cpp_c}{\lambda(c-p)^2} = \frac{2 \cdot 1,917 \cdot (1,917^2 \cdot 0,0212)}{10(2-1,917)^2} = 2,16ч$$

Получим среднее время ожидания клиентом такси при с = 4 и соотношении

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5,217} = 3,83$$

Тогда

$$\mathrm{p_0} = \left[\frac{\mathrm{p^0}}{0!} + \frac{\mathrm{p^1}}{1!} + \frac{\mathrm{p^2}}{2!} + \frac{\mathrm{p^3}}{3!} + \frac{\mathrm{p^4}}{4!\,(1-\mathrm{p})}\right]^{-1} = 0,0042$$

$$\mathrm{W_q} = \frac{\mathrm{cpp_c}}{\lambda(\mathrm{c}-\mathrm{p})^2} = \frac{4 \cdot 3,83 \cdot (3,83^4 \cdot 0,0042)}{20(4-3,83)^2} = 1,05ч$$

Таким образом, ожидание клиентом такси до объединения диспетчерских служб составляло 2,16 часа, а в объединенной фирме «Стрела» оно будет 1,05 часа, что позволит значительно повысить качество обслуживания клиентов.