

# **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

## **Глава III**

### **Линейные пространства и линейные операторы**

#### **Лекция № 6**

**ИЯФиТ**

*доцент Волков Н.П.*

**Теорема 7.1.** I. Для любого линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  в произвольном базисе

$[e]$  линейного пространства  $V$  существует единственная матрица  $A_{[e]}$  такая, что

$$[e] \cdot A_{[e]} = (\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_n)).$$

II. Для любой матрицы  $B \in M_{n \times n}$  существует единственный линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  такой, что в произвольном базисе  $[e]$  линейного пространства  $V$  матрица этого оператора имеет вид:  $A_{[e]} = B$ .

# I. Следует из определения 7.5 и единственности разложения элементов пространства  $V$  по заданному базису.

II. Существование: Пусть матрица  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ . Возьмем некоторый базис

$[e] = \{e_1, \dots, e_n\}$  линейного пространства  $V$  и определим оператор  $\mathcal{A}$  следующим образом:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_1) = b_{11}e_1 + \cdots + b_{n1}e_n, \\ \cdots \cdots \cdots, \text{ т.е. } \mathcal{A}(e_k) = \sum_{j=1}^n b_{jk}e_j \quad \forall k = \overline{1, n}, \\ \mathcal{A}(e_n) = b_{n1}e_1 + \cdots + b_{nn}e_n \end{cases}$$
, а для любого  $x \in V$  такого,

что  $x = \alpha^1 e_1 + \cdots + \alpha^n e_n$ , его образ имеет вид:  $\mathcal{A}(x) = \alpha^1 \mathcal{A}(e_1) + \cdots + \alpha^n \mathcal{A}(e_n)$ . Отсюда следует, что определенный таким образом оператор  $\mathcal{A}$  является линейным, и его матрица

$$A_{[e]} = B \text{ в базисе } [e], \text{ т.е. } a_k^j = b_{jk} \quad \forall j, k = \overline{1, n}.$$

Единственность докажем от противного: Предположим, что существует еще один линейный оператор  $\tilde{\mathcal{A}} : V \rightarrow V$ , матрица которого  $\tilde{\mathbf{A}}_{[e]} = \mathbf{B}$  в базисе  $[e]$ .

Тогда для любого  $x \in V$  такого, что  $x = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n$  следует

$$\tilde{\mathcal{A}}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha^k \tilde{\mathcal{A}}(e_k) = \sum_{k=1}^n \alpha^k \sum_{j=1}^n b_{kj} e_k = \sum_{k=1}^n \alpha^k \mathcal{A}(e_k) = \mathcal{A}(x).$$

Итак, в силу определения 7.4 оператор  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ . #

**Замечание 7.2.** Теорема 7.1 показывает, что между линейным оператором и его матрицей установлено взаимно-однозначное соответствие через базис  $[e]$ , которое символически будем обозначать так:  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{[e]} \mathbf{A}_{[e]}$ .

**Теорема 7.2.** Пусть линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  имеет в базисе  $[e]$  матрицу  $\mathbf{A}_{[e]}$ . Тогда для любого  $x \in V$  такого, что  $x = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n$ , а его образ  $\mathcal{A}(x) = \beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n$  справедлива следующая формула:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{[e]} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{[e]} \alpha . \quad (16)$$

# С одной стороны,  $\mathcal{A}(x) = \beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n$ .

С другой стороны,  $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) = \alpha^1 \mathcal{A}(e_1) + \dots + \alpha^n \mathcal{A}(e_n) =$   
 $=$  ] по формуле (15) [  $= \alpha^1 (a_1^1 e_1 + \dots + a_1^n e_n) + \dots + \alpha^n (a_n^1 e_1 + \dots + a_n^n e_n) =$

$$=(\alpha^1 a_1^1 + \cdots + \alpha^n a_n^1) e_1 + \cdots + (\alpha^1 a_1^n + \cdots + \alpha^n a_n^n) e_n.$$

Итак,  $\beta^k = \sum_{j=1}^n \alpha^j a_j^k \quad \forall k = \overline{1, n}$ , а это означает, что  $\beta = A[\epsilon] \alpha$ . #

### 7.3. Действия над линейными операторами. Линейное пространство линейных операторов.

Пусть  $V$  и  $W$  – линейные пространства над множеством  $K$ . Обозначим через  $\mathcal{L}(V, W)$  множество линейных операторов, отображающих линейное пространство  $V$  в пространство  $W$ , а через  $\mathcal{L}(V) \equiv \mathcal{L}(V, V)$  – множество линейных операторов, отображающих линейное пространство  $V$  в себя, т.е. в  $V$ .

**Определение 7.6.** Пусть линейные операторы  $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ . Тогда

1. *суммой операторов  $A$  и  $B$*  называется оператор  $A + B$  такой, что для любого элемента  $x \in V$   $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$ ;
2. *произведением оператора  $A$  на число  $\lambda \in K$*  называется оператор  $\lambda \cdot A$  такой, что для любого элемента  $x \in V$   $(\lambda \cdot A)(x) = \lambda A(x)$ .

**Лемма 7.3.** Операторы  $A + B$  и  $\lambda \cdot A$  являются линейными из множества  $\mathcal{L}(V, W)$ .

# 1.: Рассмотрим оператор  $A + B$ . Тогда 1) для любых элементов  $x_1, x_2 \in V$  выполняется  $(A + B)(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) + B(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) + B(x_1) + B(x_2) = A(x_1) + B(x_1) + A(x_2) + B(x_2) = (A + B)(x_1) + (A + B)(x_2)$  и  
2) для любого элемента  $x \in V$  и любого числа  $\lambda \in K$  выполняется  $(A + B)(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda (A(x) + B(x)) = \lambda (A + B)(x)$ .

Итак, оператор  $A + B$  является линейным, т.е.  $(A + B) \in \mathcal{L}(V, W)$ .

2.: Рассмотрим оператор  $\lambda \cdot \mathcal{A}$ . Тогда 1) для любых элементов  $x_1, x_2 \in V$  выполняется  $(\lambda \cdot \mathcal{A})(x_1 + x_2) = \lambda \cdot (\mathcal{A}(x_1 + x_2)) = \lambda \cdot (\mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2)) = (\lambda \cdot \mathcal{A})(x_1) + (\lambda \cdot \mathcal{A})(x_2)$ , и  
 2) для любого элемента  $x \in V$  и любого числа  $\mu \in K$  выполняется  $(\lambda \cdot \mathcal{A})(\mu x) = \lambda \cdot (\mathcal{A}(\mu x)) = \lambda \cdot (\mu \mathcal{A}(x)) = \mu(\lambda \mathcal{A}(x))$ . Итак, оператор  $\lambda \cdot \mathcal{A}$  является линейным, т.е.  $(\lambda \cdot \mathcal{A}) \in \mathcal{L}(V, W)$ . #

**Теорема 7.3.** *Множество линейных операторов  $\mathcal{L}(V, W)$ , отображающих пространство  $V$  в пространство  $W$ , является линейным пространством.*

# Согласно лемме 7.3 для каждого элемента множества  $\mathcal{L}(V, W)$  определены операции сложения этих элементов и умножение их на число из  $K$ , результаты которых не выходят из  $\mathcal{L}(V, W)$ , т.е. выполняются условия а) и б) определения 4.1.

Далее проверим выполнение аксиом линейного пространства:

1\*: Для любых операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$  и для любого элемента  $x \in V$  выполняется

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x) + \mathcal{A}(x) = (\mathcal{B} + \mathcal{A})(x), \text{ т.е. } \mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}.$$

2\*: Для любых операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D} \in \mathcal{L}(V, W)$  и для любого элемента  $x \in V$  получим

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{D})(x) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) + \mathcal{D}(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) + \mathcal{D}(x) = \mathcal{A}(x) + (\mathcal{B}(x) + \mathcal{D}(x)) = \\ &= \mathcal{A}(x) + (\mathcal{B} + \mathcal{D})(x) = (\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{D}))(x), \text{ т.е. } (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{D} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{D}). \end{aligned}$$

3\*: Существует нулевой элемент  $\mathcal{O}$  из  $\mathcal{L}(V, W)$  такой, что для любого оператора  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$  и для любого элемента  $x \in V$  получим  $(\mathcal{A} + \mathcal{O})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{O}(x) = \mathcal{A}(x) + \theta = \mathcal{A}(x)$ , т.е.  $\mathcal{A} + \mathcal{O} = \mathcal{A}$ .

4\*: Для любого оператора  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$  существует противоположный элемент  $\mathcal{A}' = -\mathcal{A}$  из  $\mathcal{L}(V, W)$  такой, что для любого элемента  $x \in V$  выполняется  $(\mathcal{A} + \mathcal{A}')(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}'(x) = \mathcal{A}(x) + (-\mathcal{A})(x) = \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x) = \theta = \mathcal{O}(x)$ , т.е.  $\mathcal{A} + \mathcal{A}' = \mathcal{O}$ .

5\*: Для любых операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$  и для любого числа  $\lambda \in K$  при всех элементах  $x \in V$  получим  $(\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}))(x) = \lambda(\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)) = \lambda\mathcal{A}(x) + \lambda\mathcal{B}(x) = (\lambda\mathcal{A})(x) + (\lambda\mathcal{B})(x) = ((\lambda\mathcal{A}) + (\lambda\mathcal{B}))(x)$ , т.е.  $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) + (\lambda\mathcal{B})$ .

6\*: Для любого оператора  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$  и для любых чисел  $\lambda, \mu \in K$  при всех элементах  $x \in V$  выполняется  $((\lambda + \mu)\mathcal{A})(x) = (\lambda + \mu)(\mathcal{A}(x)) = \lambda(\mathcal{A}(x)) + \mu(\mathcal{A}(x)) = (\lambda\mathcal{A})(x) + (\mu\mathcal{A})(x) = ((\lambda\mathcal{A}) + (\mu\mathcal{A}))(x)$ , т.е.  $(\lambda + \mu)\mathcal{A} = (\lambda\mathcal{A}) + (\mu\mathcal{A})$ .

7\*: Для любого оператора  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$  и для любых чисел  $\lambda, \mu \in K$  при всех элементах  $x \in V$  получим  $((\lambda \cdot \mu)\mathcal{A})(x) = (\lambda \cdot \mu)(\mathcal{A}(x)) = \lambda(\mu\mathcal{A}(x)) = \lambda(\mu\mathcal{A})(x) = (\lambda(\mu\mathcal{A}))(x)$ , т.е.  $(\lambda \cdot \mu)\mathcal{A} = \lambda(\mu\mathcal{A})$ .

8\*: Для любого оператора  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$  при всех элементах  $x \in V$  выполняется  $(1 \cdot \mathcal{A})(x) = 1 \cdot (\mathcal{A}(x)) = \mathcal{A}(x)$ , т.е.  $1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$ .

Итак, все аксиомы линейного пространства выполняются для элементов множества  $\mathcal{L}(V, W)$ . Следовательно это множество является линейным пространством. #

**Определение 7.7.** Пусть линейные операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ .

Тогда произведением операторов  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{B}$  называется оператор  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  такой, что для любого элемента  $x \in V$  выполняется  $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$ .

**Теорема 7.4.** Если  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ , то оператор  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ .

# Проверим выполнение условий 1) и 2) определения 7.2.

1): Для любых элементов  $x_1, x_2 \in V$  выполняется  $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1 + x_2)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1) + \mathcal{B}(x_2)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1)) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_2)) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x_1) + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x_2)$ .

2): Для любого элемента  $x \in V$  и любого числа  $\lambda \in K$  выполняется  $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(\lambda \cdot x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\lambda \cdot x)) = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}(x)) = \lambda \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x)$ .

Итак, оба условия выполнены, следовательно,  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ . #

**Теорема 7.5.** (Свойства линейных операторов)

Для любых операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D} \in \mathcal{L}(V)$  и для любого числа  $\lambda \in K$  выполняются следующие свойства:

$$1^{\circ} \quad \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{D}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{D};$$

$$2^{\circ} \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{D} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{D};$$

$$3^{\circ} \quad \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda \cdot \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot (\lambda \cdot \mathcal{B});$$

$$4^{\circ} \quad \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{D}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{D}.$$

# 1<sup>o</sup>: Для любого элемента  $x \in V$  выполняется  $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{D})(x) = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}(x) + \mathcal{D}(x)) = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}(x)) + \mathcal{A} \cdot (\mathcal{D}(x)) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x) + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{D})(x) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{D})(x)$ , тогда в силу определения 7.4  $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{D}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{D}$ .

2°: Для любого элемента  $x \in V$  выполняется  $((\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{D})(x) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathcal{D}(x)) =$   
 $= \mathcal{A}(\mathcal{D}(x)) + \mathcal{B}(\mathcal{D}(x)) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{D})(x) + (\mathcal{B} \cdot \mathcal{D})(x) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{D})(x)$ , следовательно,  
 $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{D} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{D}$ .

3°: Для любого элемента  $x \in V$  и любого числа  $\lambda \in K$  выполняется

$$\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x) = \lambda \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = ((\lambda \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B})(x), \text{ т.е. } \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda \cdot \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} \text{ или}$$

$$\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x) = \lambda \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}(x)) = (\mathcal{A} \cdot (\lambda \mathcal{B}))(x), \text{ т.е. } \lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cdot (\lambda \mathcal{B}).$$

4°: Для любого элемента  $x \in V$  выполняется  $(\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{D}))(x) = \mathcal{A} \cdot ((\mathcal{B} \cdot \mathcal{D})(x)) =$   
 $= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathcal{D}(x))) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(\mathcal{D}(x)) = ((\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{D})(x)$ , следовательно,  $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{D}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{D}$ . #

**Теорема 7.6.** (Свойства матриц линейных операторов)

Пусть  $[e] = \{e_1, \dots, e_n\}$  – базис линейного пространства  $V$ , линейные операторы  
 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ , которым в базисе  $[e]$  соответствуют следующие матрицы  $A_{[e]}$  и  $B_{[e]}$ ,  
т.е.  $\mathcal{A} \leftrightarrow A_{[e]}$  и  $\mathcal{B} \leftrightarrow B_{[e]}$ . Тогда справедливы следующие свойства:

1° Оператору  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  в базисе  $[e]$  соответствует матрица  $(A+B)_{[e]} = A_{[e]} + B_{[e]}$ .

2° Оператору  $\lambda \cdot \mathcal{A}$  в базисе  $[e]$  соответствует матрица  $(\lambda A)_{[e]} = \lambda \cdot A_{[e]}$ .

3° Оператору  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  в базисе  $[e]$  соответствует матрица  $(A \cdot B)_{[e]} = A_{[e]} \cdot B_{[e]}$ .

- # 1<sup>o</sup>: Вычислим  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(e_j) = \mathcal{A}(e_j) + \mathcal{B}(e_j) = (a_j^1 e_1 + \dots + a_j^n e_n) + (b_j^1 e_1 + \dots + b_j^n e_n) = (a_j^1 + b_j^1)e_1 + \dots + (a_j^n + b_j^n)e_n \quad \forall j = \overline{1, n}$ , следовательно,  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})_{[e]} = \mathbf{A}_{[e]} + \mathbf{B}_{[e]}$ .
- 2<sup>o</sup>: Вычислим  $(\lambda \mathcal{A})(e_j) = \lambda (\mathcal{A}(e_j)) = \lambda (a_j^1 e_1 + \dots + a_j^n e_n) = (\lambda a_j^1)e_1 + \dots + (\lambda a_j^n)e_n \quad \forall j = \overline{1, n}$ , следовательно,  $(\lambda \mathcal{A})_{[e]} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{[e]}$ .
- 3<sup>o</sup>: Вычислим  $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(e_j) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(e_j)) = \mathcal{A}(b_j^1 e_1 + \dots + b_j^n e_n) = b_j^1 \mathcal{A}(e_1) + \dots + b_j^n \mathcal{A}(e_n) = b_j^1 (a_1^1 e_1 + \dots + a_1^n e_n) + \dots + b_j^n (a_n^1 e_1 + \dots + a_n^n e_n) = \left( \sum_{k=1}^n a_k^1 b_j^k \right) e_1 + \dots + \left( \sum_{k=1}^n a_k^n b_j^k \right) e_n = c_j^1 e_1 + \dots + c_j^n e_n \quad \forall j = \overline{1, n}$ , следовательно,  $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})_{[e]} = \mathbf{A}_{[e]} \cdot \mathbf{B}_{[e]}$ . #

**Теорема 7.7.** Для любого линейного пространства  $\mathbf{V}$  справедлива формула:

$$\dim \mathcal{L}(\mathbf{V}) = (\dim \mathbf{V})^2. \quad (17)$$

# Пусть  $[e]$  – базис линейного пространства  $\mathbf{V}$ , у которого  $\dim \mathbf{V} = n$ .

Возьмем матрицы  $\mathbf{B}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i, j = \overline{1, n}$  ( $i$  стоит в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце, остальные элементы этой матрицы равны  $0$ ). В силу теоремы 7.1 этим матрицам через базис  $[e]$  ставится в однозначное соответствие линейные операторы  $\mathcal{B}_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$ . Заметим, что система  $\{\mathbf{B}_{ij}\}_{i,j=1}^n$  является базисом линейного

пространства  $M_{n \times n}$ . Тогда равенство  $\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{B}_{ij} = \mathbf{O}$  справедливо только при

$\lambda_{ij} = 0 \quad \forall i, j = \overline{1, n}$ , а в силу теоремы 7.6 в том и только в том случае, когда

верно равенство  $\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} B_{ij} = \mathbf{O}$ . Это означает, что  $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^n$  является линейно независимой системой.

Далее, любому оператору  $A \in \mathcal{L}(V)$  в базисе  $[e]$  соответствует матрица

$A_{[e]} = (a_j^i)_{n \times n}$ , причем  $A_{[e]} = \sum_{i,j=1}^n a_j^i B_{ij}$ . Последнее равенство в силу теоремы 7.6

эквивалентно равенству  $A = \sum_{i,j=1}^n a_j^i B_{ij}$ . Итак, система  $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^n$  является базисом

линейного пространства  $\mathcal{L}(V)$ . А в силу теоремы 5.4  $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$ . #

#### 7.4. Обратный оператор. Критерий обратимости.

Пусть  $V$  – линейное пространство над множеством  $K$ ,  $A \in \mathcal{L}(V)$ .

**Определение 7.3.** Оператор  $B$  называется *обратным оператором к  $A$* , если  $A \cdot B = B \cdot A = I$  (будем писать  $B = A^{-1}$ ). При этом, если существует  $A^{-1}$ , то оператор  $A$  называется *обратимым*.

**Лемма 7.3.** Если оператор  $A \in \mathcal{L}(V)$  обратим, то

1. обратный оператор  $A^{-1}$  является единственным;
2. оператор  $A^{-1}$  линейный, отображающий  $V$  в  $V$ , т.е.  $A^{-1} \in \mathcal{L}(V)$ .

# Пусть  $A \in \mathcal{L}(V)$ .

1.: Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует линейный

оператор  $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V)$ , у которого имеется два обратных оператора  $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$  и  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Тогда для любого элемента  $x \in V$  выполняется  $\tilde{\mathcal{B}}(x) = \tilde{\mathcal{B}}(I(x)) = \tilde{\mathcal{B}}((\tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathcal{A}}^{-1})(x)) =$   
 $= (\tilde{\mathcal{B}} \cdot \tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)) = I(\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)) = \tilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)$ , т.е.  $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{A}}^{-1}$ . Итак, для любого обратимого оператора  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  существует единственный обратный оператор  $\mathcal{A}^{-1}$ .

$$\begin{aligned} 2.: 1): & \text{ Для любых элементов } y_1, y_2 \in V \text{ выполняется } \mathcal{A}^{-1}(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^{-1}(Iy_1 + Iy_2) = \\ & = \mathcal{A}^{-1}((\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1})(y_1) + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1})(y_2)) = (\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A})(\mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2)) = \\ & = I(\mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2)) = \mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2): & \text{ Для любого элемента } x \in V \text{ и для любого числа } \lambda \in K \text{ выполняется } \mathcal{A}^{-1}(\lambda x) = \\ & = \mathcal{A}^{-1}(\lambda I(x)) = \mathcal{A}^{-1}(\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1})(x)) = (\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A})(\lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x)) = I(\lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x)) = \lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x). \end{aligned}$$

Итак, выполнены условия 1) и 2) определения 7.2, т.е.  $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(V)$ . #

### Теорема 7.3. (Критерий обратимости линейного оператора)

Линейный оператор  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  является обратимым тогда и только тогда, когда существует базис  $[e]$  линейного пространства  $V$  такой, что оператору  $\mathcal{A}$  в этом базисе соответствует невырожденная матрица  $A_{[e]}$ , т.е.  $\det(A_{[e]}) \neq 0$ .

# Необходимость. Пусть оператор  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  обратим, т.е. существует оператор  $\mathcal{A}^{-1}$  такой, что  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = I$  (\*). Возьмем произвольный базис  $[e]$  линейного пространства  $V$ , в котором оператору  $\mathcal{A}$  соответствует матрица  $A_{[e]}$ , т.е.  $\mathcal{A} \leftrightarrow A_{[e]}$ . Тогда равенствам (\*) в силу теоремы 7.6 эквивалентны равенства  $A_{[e]} \cdot (A^{-1})_{[e]} =$   
 $= (A^{-1})_{[e]} \cdot A_{[e]} = E$  (\*\*). Тогда в силу теоремы 3.7  $\det(A_{[e]}) \cdot \det((A^{-1})_{[e]}) = 1$ , откуда получаем, что  $\det(A_{[e]}) \neq 0$ .

**Достаточность.** Пусть существует базис  $[e]$  линейного пространства  $V$  такой, что оператору  $\mathcal{A}$  в этом базисе соответствует невырожденная матрица  $A_{[e]}$ , т.е.  $\det(A_{[e]}) \neq 0$ . Тогда по теореме 4.1 существует обратная матрица  $(A_{[e]})^{-1}$  к матрице  $A_{[e]}$  такая, что  $A_{[e]} \cdot (A_{[e]})^{-1} = (A_{[e]})^{-1} \cdot A_{[e]} = E$ . В силу теоремы 7.1 для матрицы  $(A_{[e]})^{-1}$  в базисе  $[e]$  существует линейный оператор  $B \in \mathcal{L}(V)$ , т.е.  $B \xrightarrow{[e]} (A_{[e]})^{-1}$ , для которого в силу теоремы 7.6 справедливы следующие равенства  $\mathcal{A} \cdot B = B \cdot \mathcal{A} = I$ . Это означает в силу определения 7.8, что оператор  $B$  является обратным к оператору  $\mathcal{A}$ , т.е.  $B = \mathcal{A}^{-1}$ . #

**Следствие 7.1.** Пусть линейному оператору  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  в базисе  $[e]$  линейного пространства  $V$  соответствует матрица  $A_{[e]}$ , а обратному оператору  $\mathcal{A}^{-1}$  – матрица  $(A^{-1})_{[e]}$ . Тогда справедлива следующая формула  $(A^{-1})_{[e]} = (A_{[e]})^{-1}$ .

**Доказательство** следует из равенств (\*\*\*) доказательства теоремы 7.8.

**Следствие 7.2.** Если существует базис  $[e]$  линейного пространства  $V$  такой, что оператору  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  в этом базисе соответствует невырожденная матрица  $A_{[e]}$ , то в любом базисе  $[f]$  пространства  $V$  матрица  $A_{[f]}$  оператора  $\mathcal{A}$  является невырожденной.

# Пусть существует базис  $[e]$  линейного пространства  $V$  такой, что оператору  $A \in \mathcal{L}(V)$  в этом базисе соответствует невырожденная матрица  $A_{[e]}$ , т.е.  $\det(A_{[e]}) \neq 0$ .

Тогда в силу достаточности теоремы 7.8 оператор  $A$  является обратимым, а при доказательстве необходимости этой же теоремы в любом базисе  $[f]$  пространства  $V$  матрица  $A_{[f]}$  является невырожденной, т.е.  $\det(A_{[f]}) \neq 0$ . #