ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава III
Линейные пространства и линейные операторы

Лекция № 6

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

Теорема 7.1. I. *Для любого линейного оператора* $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *в произвольном базисе* $[e]$ *линейного пространства* $\mathbf{V}$ *существует единственная матрица* $\mathrm{A}_{[e]}$ *такая, что* $[e] \cdot \mathrm{A}_{[e]} = (\mathcal{A}(e_1), \cdots, \mathcal{A}(e_n))$.

II. *Для любой матрицы* $\mathbf{B} \in \mathrm{M}_{n \times n}$ *существует единственный линейный оператор* $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *такой, что в произвольном базисе* $[e]$ *линейного пространства* $\mathbf{V}$ *матрица этого оператора имеет вид:* $\mathrm{A}_{[e]} = \mathbf{B}$.

\# I. Следует из определения 7.5 и единственности разложения элементов пространства $\mathbf{V}$ по заданному базису.

II.: Существование: Пусть матрица $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$. Возьмем некоторый базис $[e] = \{ e_1, \cdots, e_n \}$ линейного пространства $\mathbf{V}$ и определим оператор $\mathcal{A}$ следующим образом:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_1) = b_{11} e_1 + \cdots + b_{n1} e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{A}(e_n) = b_{1n} e_1 + \cdots + b_{nn} e_n \end{cases}$$

, т.е. $\mathcal{A}(e_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} e_j \ \forall \ k = \overline{1,n}$, а для любого $x \in \mathbf{V}$ такого, что $x = \alpha^1 e_1 + \cdots + \alpha^n e_n$, его образ имеет вид: $\mathcal{A}(x) = \alpha^1 \mathcal{A}(e_1) + \cdots + \alpha^n \mathcal{A}(e_n)$. Отсюда следует, что определенный таким образом оператор $\mathcal{A}$ является линейным, и его матрица $\mathrm{A}_{[e]} = \mathbf{B}$ в базисе $[e]$, т.е. $a_k^j = b_{jk} \ \forall \ j,k = \overline{1,n}$.

Единственность докажем от противного.: Предположим, что существует еще один линейный оператор $\tilde{\mathcal{A}}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, матрица которого $\tilde{\mathrm{A}}_{[e]} = \mathbf{B}$ в базисе $[e]$.

Тогда для любого $x \in \mathbf{V}$ такого, что $x = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n$ следует

$$\tilde{\mathcal{A}}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \tilde{\mathcal{A}}(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \sum_{j=1}^{n} b_{kj} e_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \mathcal{A}(e_k) = \mathcal{A}(x).$$

Итак, в силу определения 7.4 оператор $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. #

Замечание 7.2. Теорема 7.1 показывает, что между линейным оператором и его матрицей установлено взаимно-однозначное соответствие через базис $[e]$, которое символически будем обозначать так: $\mathcal{A} \overset{[e]}{\longleftrightarrow} \mathrm{A}_{[e]}$.

Теорема 7.2. *Пусть линейный оператор* $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *имеет в базисе* $[e]$ *матрицу* $\mathrm{A}_{[e]}$. *Тогда для любого* $x \in \mathbf{V}$ *такого, что* $x = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n$, *а его образ* $\mathcal{A}(x) = \beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n$ *справедлива следующая формула:*

$$\underset{\downarrow}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} = \mathrm{A}_{[e]} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \mathrm{A}_{[e]} \underset{\downarrow}{\alpha}. \qquad (16)$$

\# С одной стороны, $\mathcal{A}(x) = \beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n$.

С другой стороны, $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) = \alpha^1 \mathcal{A}(e_1) + \dots + \alpha^n \mathcal{A}(e_n) =$

$=]$ по формуле (15) $[= \alpha^1 (a_1^1 e_1 + \dots + a_1^n e_n) + \dots + \alpha^n (a_n^1 e_1 + \dots + a_n^n e_n) =$

$$=(\alpha^1 a_1^1+\dots+\alpha^n a_n^1)e_1+\dots+(\alpha^1 a_1^n+\dots+\alpha^n a_n^n)e_n .$$

Итак, $\beta^k=\sum_{j=1}^{n}\alpha^j a_j^k \quad \forall\ k=\overline{1,n}$, а это означает, что $\underset{\downarrow}{\beta}=\mathbf{A}_{[e]}\underset{\downarrow}{\alpha}$. #

7.3. Действия над линейными операторами. Линейное пространство линейных операторов.

Пусть $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ – линейные пространства над множеством K. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ множество линейных операторов, отображающих линейное пространство $\mathbf{V}$ в пространство $\mathbf{W}$, а через $\mathcal{L}(\mathbf{V})\equiv\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{V})$ – множество линейных операторов, отображающих линейное пространство $\mathbf{V}$ в себя, т.е. в $\mathbf{V}$.

Определение 7.6. Пусть линейные операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$. Тогда

1. *суммой операторов* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ такой, что для любог элемента $x\in\mathbf{V}$ $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x)=\mathcal{A}(x)+\mathcal{B}(x)$;
2. *произведением оператора* $\mathcal{A}$ *на число* $\lambda\in\mathrm{K}$ называется оператор $\lambda\cdot\mathcal{A}$ такой, что для любого элемента $x\in\mathbf{V}$ $(\lambda\cdot\mathcal{A})(x)=\lambda\mathcal{A}(x)$.

Лемма 7.3. *Операторы* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *и* $\lambda\cdot\mathcal{A}$ *являются линейными из множества* $\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$.

1.: Рассмотрим оператор $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. Тогда 1) для любых элементов $x_1, x_2\in\mathbf{V}$ выполняется $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x_1+x_2)=\mathcal{A}(x_1+x_2)+\mathcal{B}(x_1+x_2)=\mathcal{A}(x_1)+\mathcal{A}(x_2)+\mathcal{B}(x_1)+$ $+\mathcal{B}(x_2)=\mathcal{A}(x_1)+\mathcal{B}(x_1)+\mathcal{A}(x_2)+\mathcal{B}(x_2)=(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x_1)+(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x_2)$ и

2) для любого элемента $x\in\mathbf{V}$ и любого числа $\lambda\in\mathrm{K}$ выполняется $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\lambda x)=$ $=\mathcal{A}(\lambda x)+\mathcal{B}(\lambda x)=\lambda\,\mathcal{A}(x)+\lambda\,\mathcal{B}(x)=\lambda\,(\mathcal{A}(x)+\mathcal{B}(x))=\lambda\,(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x)$.

Итак, оператор $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ является линейным, т.е. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\in\mathcal{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$.

2.: Рассмотрим оператор $\lambda\cdot\mathcal{A}$. Тогда 1) для любых элементов $x_1, x_2 \in \mathrm{V}$ выполняется $(\lambda\cdot\mathcal{A})(x_1+x_2)=\lambda\cdot(\mathcal{A}(x_1+x_2))=\lambda\cdot(\mathcal{A}(x_1)+\mathcal{A}(x_2))=(\lambda\cdot\mathcal{A})(x_1)+(\lambda\cdot\mathcal{A})(x_2)$, и

2) для любого элемента $x\in\mathrm{V}$ и любого числа $\mu\in\mathrm{K}$ выполняется $(\lambda\cdot\mathcal{A})(\mu x)=$ $=\lambda\cdot(\mathcal{A}(\mu x))=\lambda\cdot(\mu\,\mathcal{A}(x))=\mu(\lambda\,\mathcal{A}(x))$. Итак, оператор $\lambda\cdot\mathcal{A}$ является линейным, т.е. $(\lambda\cdot\mathcal{A})\in\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$. #

Теорема 7.3. *Множество линейных операторов* $\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$, *отображающих пространство* V *в пространство* W, *является линейным пространством.*

Согласно лемме 7.3 для каждого элемента множества $\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ определены операции сложения этих элементов и умножение их на число из K, результаты которых не выходят из $\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$, т.е. выполняются условия а) и б) определения 4.1.

Далее проверим выполнение аксиом линейного пространства:

1*: Для любых операторов $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ и для любого элемента $x\in\mathrm{V}$ выполняется $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x)=\mathcal{A}(x)+\mathcal{B}(x)=\mathcal{B}(x)+\mathcal{A}(x)=(\mathcal{B}+\mathcal{A})(x)$, т.е. $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$.

2*: Для любых операторов $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{D}\in\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ и для любого элемента $x\in\mathrm{V}$ получим $((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{D})(x)=(\mathcal{A}+\mathcal{B})(x)+\mathcal{D}(x)=\mathcal{A}(x)+\mathcal{B}(x)+\mathcal{D}(x)=\mathcal{A}(x)+(\mathcal{B}(x)+\mathcal{D}(x))=$ $=\mathcal{A}(x)+(\mathcal{B}+\mathcal{D})(x)=(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{D}))(x)$, т.е. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{D}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{D})$.

3*: Существует нулевой элемент $\mathcal{O}$ из $\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ такой, что для любого оператора $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ и для любого элемента $x\in\mathrm{V}$ получим $(\mathcal{A}+\mathcal{O})(x)=\mathcal{A}(x)+\mathcal{O}(x)=$ $=\mathcal{A}(x)+\theta=\mathcal{A}(x)$, т.е. $\mathcal{A}+\mathcal{O}=\mathcal{A}$.

4*: Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ существует противоположный элемент $\mathcal{A}' = -\mathcal{A}$ из $\mathcal{L}(V, W)$ такой, что для любого элемента $x \in V$ выполняется $(\mathcal{A} + \mathcal{A}')(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}'(x) = \mathcal{A}(x) + (-\mathcal{A})(x) = \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x) = \theta = \mathcal{O}(x)$, т.е. $\mathcal{A} + \mathcal{A}' = \mathcal{O}$.

5*: Для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ и для любого числа $\lambda \in K$ при всех элементах $x \in V$ получим $(\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}))(x) = \lambda(\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)) = \lambda\mathcal{A}(x) + \lambda\mathcal{B}(x) = (\lambda\mathcal{A})(x) + (\lambda\mathcal{B})(x) = ((\lambda\mathcal{A}) + (\lambda\mathcal{B}))(x)$, т.е. $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) + (\lambda\mathcal{B})$.

6*: Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и для любых чисел $\lambda, \mu \in K$ при всех элементах $x \in V$ выполняется $((\lambda + \mu)\mathcal{A})(x) = (\lambda + \mu)(\mathcal{A}(x)) = \lambda(\mathcal{A}(x)) + \mu(\mathcal{A}(x)) = (\lambda\mathcal{A})(x) + (\mu\mathcal{A})(x) = ((\lambda\mathcal{A}) + (\mu\mathcal{A}))(x)$, т.е. $(\lambda + \mu)\mathcal{A} = (\lambda\mathcal{A}) + (\mu\mathcal{A})$.

7*: Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и для любых чисел $\lambda, \mu \in K$ при всех элементах $x \in V$ получим $((\lambda \cdot \mu)\mathcal{A})(x) = (\lambda \cdot \mu)(\mathcal{A}(x)) = \lambda(\mu\, \mathcal{A}(x)) = \lambda(\mu\, \mathcal{A})(x) = (\lambda(\mu\, \mathcal{A}))(x)$, т.е. $(\lambda \cdot \mu)\mathcal{A} = \lambda(\mu\, \mathcal{A})$.

8*: Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ при всех элементах $x \in V$ выполняется $(1 \cdot \mathcal{A})(x) = 1 \cdot (\mathcal{A}(x)) = \mathcal{A}(x)$, т.е. $1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Итак, все аксиомы линейного пространства выполняются для элементов множества $\mathcal{L}(V, W)$. Следовательно это множество является линейным пространством. #

Определение 7.7. Пусть линейные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$.
Тогда *произведением операторов* $\mathcal{A}$ *на* $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ такой, что для любого элемента $x \in V$ выполняется $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$.

Теорема 7.4. *Если* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$, *то оператор* $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$.

\# Проверим выполнение условий 1) и 2) определения 7.2.

1): Для любых элементов $x_1, x_2 \in \mathrm{V}$ выполняется $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1 + x_2)) =$
$= \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1) + \mathcal{B}(x_2)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1)) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_2)) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x_1) + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x_2)$.

2): Для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ и любого числа $\lambda \in \mathrm{K}$ выполняется $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(\lambda \cdot x) =$
$= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\lambda \cdot x)) = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}(x)) = \lambda\, \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = \lambda (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x)$.

Итак, оба условия выполнены, следовательно, $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$. #

Теорема 7.5. **(Свойства линейных операторов)**

Для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$ *и для любого числа* $\lambda \in \mathrm{K}$ *выполняются следующие свойства:*

1° $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{D}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{D}$;

2° $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{D} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{D} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{D}$;

3° $\lambda (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda \cdot \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot (\lambda \cdot \mathcal{B})$;

4° $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{D}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{D}$.

\# *1°*: Для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ выполняется $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{D})(x) = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}(x) + \mathcal{D}(x)) =$
$= \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}(x)) + \mathcal{A} \cdot (\mathcal{D}(x)) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x) + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{D})(x) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{D})(x)$, тогда в силу определения 7.4 $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{D}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{D}$.

2^o: Для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ выполняется $((\mathcal{A}+\mathcal{B})\cdot\mathcal{D})(x) = (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{D}(x)) =$

$= \mathcal{A}(\mathcal{D}(x)) + \mathcal{B}(\mathcal{D}(x)) = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{D})(x) + (\mathcal{B}\cdot\mathcal{D})(x) = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{D}+\mathcal{B}\cdot\mathcal{D})(x)$, следовательно,

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\cdot\mathcal{D} = \mathcal{A}\cdot\mathcal{D}+\mathcal{B}\cdot\mathcal{D}$.

3^o: Для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ и любого числа $\lambda \in \mathrm{K}$ выполняется

$\lambda(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})(x) = \lambda\,\mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = ((\lambda\,\mathcal{A})\cdot\mathcal{B})(x)$, т.е. $\lambda(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = (\lambda\cdot\mathcal{A})\cdot\mathcal{B}$ или

$\lambda(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})(x) = \lambda\,\mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}(x)) = (\mathcal{A}\cdot(\lambda\mathcal{B}))(x)$, т.е. $\lambda(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = \mathcal{A}\cdot(\lambda\mathcal{B})$.

4^o: Для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ выполняется $(\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{D}))(x) = \mathcal{A}((\mathcal{B}\cdot\mathcal{D})(x)) =$

$= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathcal{D}(x))) = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})(\mathcal{D}(x)) = ((\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{D})(x)$, следовательно, $\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{D}) = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{D}$. #

Теорема 7.6. (Свойства матриц линейных операторов)

Пусть $[e] = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *– базис линейного пространства* V, *линейные операторы* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$, *которым в базисе* $[e]$ *соответствуют следующие матрицы* $\mathbf{A}_{[e]}$ *и* $\mathbf{B}_{[e]}$, т.е. $\mathcal{A} \overset{[e]}{\leftrightarrow} \mathbf{A}_{[e]}$ *и* $\mathcal{B} \overset{[e]}{\leftrightarrow} \mathbf{B}_{[e]}$. *Тогда справедливы следующие свойства:*

1^o *Оператору* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ *в базисе* $[e]$ *соответствует матрица* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{[e]} = \mathbf{A}_{[e]} + \mathbf{B}_{[e]}$.

2^o *Оператору* $\lambda\cdot\mathcal{A}$ *в базисе* $[e]$ *соответствует матрица* $(\lambda\mathbf{A})_{[e]} = \lambda\cdot\mathbf{A}_{[e]}$.

3^o *Оператору* $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$ *в базисе* $[e]$ *соответствует матрица* $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{[e]} = \mathbf{A}_{[e]}\cdot\mathbf{B}_{[e]}$.

1^o: Вычислим $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(e_j)=\mathcal{A}(e_j)+\mathcal{B}(e_j)=(a_j^1e_1+\cdots+a_j^ne_n)+(b_j^1e_1+\cdots+$
$+b_j^ne_n)=(a_j^1+b_j^1)e_1+\cdots+(a_j^n+b_j^n)e_n \quad \forall\ j=\overline{1,n}$, следовательно, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{[e]}=\mathbf{A}_{[e]}+\mathbf{B}_{[e]}$.

2^o: Вычислим $(\lambda\mathcal{A})(e_j)=\lambda\left(\mathcal{A}(e_j)\right)=\lambda(a_j^1e_1+\cdots+a_j^ne_n)=(\lambda a_j^1)e_1+\cdots+(\lambda a_j^n)e_n$
$\forall\ j=\overline{1,n}$, следовательно, $(\lambda\mathbf{A})_{[e]}=\lambda\cdot\mathbf{A}_{[e]}$.

3^o: Вычислим $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})(e_j)=\mathcal{A}\left(\mathcal{B}(e_j)\right)=\mathcal{A}(b_j^1e_1+\cdots+b_j^ne_n)=b_j^1\mathcal{A}(e_1)+\cdots+b_j^n\mathcal{A}(e_n)=$

$$=b_j^1(a_1^1e_1+\cdots+a_1^ne_n)+\cdots+b_j^n(a_n^1e_1+\cdots+a_n^ne_n)=\left(\sum_{k=1}^n a_k^1b_j^k\right)e_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^n a_k^nb_j^k\right)e_n=$$

$=c_j^1e_1+\cdots+c_j^ne_n \quad \forall\ j=\overline{1,n}$, следовательно, $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{[e]}=\mathbf{A}_{[e]}\cdot\mathbf{B}_{[e]}$. #

Теорема 7.7. *Для любого линейного пространства* $\mathbf{V}$ *справедлива формула:*

$$\dim\mathcal{L}(\mathbf{V})=(\dim\mathbf{V})^2. \tag{17}$$

Пусть $[e]$ – базис линейного пространства $\mathbf{V}$, у которого $\dim\ \mathbf{V}=n$.

Возьмем матрицы $\mathbf{B}_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $i,j=\overline{1,n}$ (1 стоит в i-ой строке и j-ом столбце, остальные элементы этой матрицы равны 0). В силу теоремы 7.1 этим матрицам через базис $[e]$ ставятся в однозначное соответствие линейные операторы $\mathcal{B}_{ij}\ \forall\ i,j=\overline{1,n}$. Заметим, что система $\{\mathbf{B}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ является базисом линейного пространства $\mathrm{M}_{n\times n}$. Тогда равенство $\sum_{i,j=1}^n\lambda_{ij}\mathbf{B}_{ij}=\mathbf{O}$ справедливо только при

$\lambda_{ij}=0\ \forall\, i,j=\overline{1,n}$, а в силу теоремы 7.6 в том и только в том случае, когда верно равенство $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}\mathcal{B}_{ij}=\mathcal{O}$. Это означает, что $\{\mathcal{B}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ является линейно независимой системой .

Далее, любому оператору $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathrm{V})$ в базисе $[e]$ соответствует матрица $\mathbf{A}_{[e]}=(a_j^i)_{n\times n}$, причем $\mathbf{A}_{[e]}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_j^i\,\mathbf{B}_{ij}$. Последнее равенство в силу теоремы 7.6 эквивалентно равенству $\mathcal{A}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_j^i\mathcal{B}_{ij}$. Итак, система $\{\mathcal{B}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ является базисом линейного пространства $\mathcal{L}(\mathrm{V})$. А в силу теоремы 5.4 $\dim\mathcal{L}(\mathrm{V})=n^2$. #

7.4. Обратный оператор. Критерий обратимости.

Пусть $\mathbf{V}$ – линейное пространство над множеством K, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathrm{V})$.

Определение 7.8. Оператор $\mathcal{B}$ называется *обратным оператором к* $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{A}=\mathcal{I}$ (будем писать $\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$). При этом, если существует $\mathcal{A}^{-1}$, то оператор $\mathcal{A}$ называется *обратимым* .

Лемма 7.3. *Если оператор $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathrm{V})$ обратим, то*

1. *обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ является единственным;*
2. *оператор $\mathcal{A}^{-1}$ линейный, отображающий $\mathbf{V}$ в $\mathbf{V}$, т.е. $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathrm{V})$.*

\# Пусть $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathrm{V})$.

1.: Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует линейный оператор $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$, у которого имеется два обратных оператора $\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$. Тогда для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ выполняется $\widetilde{\mathcal{B}}(x) = \widetilde{\mathcal{B}}(I(x)) = \widetilde{\mathcal{B}}\left((\widetilde{\mathcal{A}} \cdot \widetilde{\mathcal{A}}^{-1})(x)\right) =$ $= (\widetilde{\mathcal{B}} \cdot \widetilde{\mathcal{A}})(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)) = I(\widetilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)) = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)$, т.е. $\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{A}}^{-1}$. Итак, для любого обратимого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$ существует единственный обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$.

2.: 1): Для любых элементов $y_1, y_2 \in \mathrm{V}$ выполняется $\mathcal{A}^{-1}(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^{-1}(Iy_1 + Iy_2) =$

$$= \mathcal{A}^{-1}\left((\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1})(y_1) + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1})(y_2)\right) = (\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A})\left(\mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2)\right) =$$

$$= I\left(\mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2)\right) = \mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2).$$

2): Для любого элемента $x \in \mathrm{V}$ и для любого числа $\lambda \in \mathrm{K}$ выполняется $\mathcal{A}^{-1}(\lambda x) =$

$$= \mathcal{A}^{-1}(\lambda I(x)) = \mathcal{A}^{-1}\left(\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1})(x)\right) = (\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A})\left(\lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x)\right) = I\left(\lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x)\right) = \lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x).$$

Итак, выполнены условия 1) и 2) определения 7.2, т.е. $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$. #

Теорема 7.8. (Критерий обратимости линейного оператора)

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$ является обратимым тогда и только тогда, когда существует базис $[e]$ линейного пространства V такой, что оператору $\mathcal{A}$ в этом базисе соответствует невырожденная матрица $\mathrm{A}_{[e]}$, т.е. $\det\left(\mathrm{A}_{[e]}\right) \neq 0$.

Необходимость. Пусть оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$ обратим, т.е. существует оператор $\mathcal{A}^{-1}$ такой, что $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = I$ (*). Возьмем произвольный базис $[e]$ линейного пространства V, в котором оператору $\mathcal{A}$ соответствует матрица $\mathrm{A}_{[e]}$, т.е. $\mathcal{A} \overset{[e]}{\leftrightarrow} \mathrm{A}_{[e]}$. Тогда равенствам (*) в силу теоремы 7.6 эквивалентны равенства $\mathrm{A}_{[e]} \cdot (\mathrm{A}^{-1})_{[e]} =$ $= (\mathrm{A}^{-1})_{[e]} \cdot \mathrm{A}_{[e]} = \mathrm{E}$ (**). Тогда в силу теоремы 3.7 $\det\left(\mathrm{A}_{[e]}\right) \cdot \det\left((\mathrm{A}^{-1})_{[e]}\right) = 1$, откуда получаем, что $\det\left(\mathrm{A}_{[e]}\right) \neq 0$.

Достаточность. Пусть существует базис $[e]$ линейного пространства $\mathbf{V}$ такой, что оператору $\mathcal{A}$ в этом базисе соответствует невырожденная матрица $\mathrm{A}_{[e]}$, т.е. $\det\left(\mathrm{A}_{[e]}\right)\neq 0$. Тогда по теореме 4.1 существует обратная матрица $(\mathrm{A}_{[e]})^{-1}$ к матрице $\mathrm{A}_{[e]}$ такая, что $\mathrm{A}_{[e]}\cdot(\mathrm{A}_{[e]})^{-1}=(\mathrm{A}_{[e]})^{-1}\cdot\mathrm{A}_{[e]}=\mathbf{E}$. В силу теоремы 7.1 для матрицы $(\mathrm{A}_{[e]})^{-1}$ в базисе $[e]$ существует линейный оператор $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(\mathrm{V})$, т.е. $\mathcal{B}\overset{[e]}{\leftrightarrow}(\mathrm{A}_{[e]})^{-1}$, для которого в силу теоремы 7.6 справедливы следующие равенства $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{A}=\mathcal{I}$. Это означает в силу определения 7.8, что оператор $\mathcal{B}$ является обратным к оператору $\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$. #

Следствие 7.1. *Пусть линейному оператору $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathrm{V})$ в базисе $[e]$ линейного пространства $\mathbf{V}$ соответствует матрица $\mathrm{A}_{[e]}$, а обратному оператору $\mathcal{A}^{-1}$ – матрица $(\mathrm{A}^{-1})_{[e]}$. Тогда справедлива следующая формула $(\mathrm{A}^{-1})_{[e]}=(\mathrm{A}_{[e]})^{-1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из равенств (**) доказательства теоремы 7.8.

Следствие 7.2. *Если существует базис $[e]$ линейного пространства $\mathbf{V}$ такой, что оператору $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathrm{V})$ в этом базисе соответствует невырожденная матрица $\mathrm{A}_{[e]}$, то в любом базисе $[f]$ пространства $\mathbf{V}$ матрица $\mathrm{A}_{[f]}$ оператора $\mathcal{A}$ является невырожденной.*

Пусть существует базис $[e]$ линейного пространства $\mathbf{V}$ такой, что оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ в этом базисе соответствует невырожденная матрица $\mathrm{A}_{[e]}$, т.е. $\det\left(\mathrm{A}_{[e]}\right) \neq 0$. Тогда в силу достаточности теоремы 7.8 оператор $\mathcal{A}$ является обратимым, а при доказательстве необходимости этой же теоремы в любом базисе $[f]$ пространства $\mathbf{V}$ матрица $\mathrm{A}_{[f]}$ является невырожденной, т.е. $\det\left(\mathrm{A}_{[f]}\right) \neq 0$.