

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава III

Линейные пространства и линейные операторы

Лекция № 6

ИЯФит

доцент Волков Н.П.

Теорема 7.1. I. Для любого линейного оператора $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ в произвольном базисе $[e]$ линейного пространства V существует единственная матрица $A_{[e]}$ такая, что $[e] \cdot A_{[e]} = (\mathcal{A}(e_1), \dots, \mathcal{A}(e_n))$.

II. Для любой матрицы $B \in M_{n \times n}$ существует единственный линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ такой, что в произвольном базисе $[e]$ линейного пространства V матрица этого оператора имеет вид: $A_{[e]} = B$.

I. Следует из определения 7.5 и единственности разложения элементов пространства V по заданному базису.

II.: Существование: Пусть матрица $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$. Возьмем некоторый базис

$[e] = \{e_1, \dots, e_n\}$ линейного пространства V и определим оператор \mathcal{A} следующим образом:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(e_1) = b_{11}e_1 + \dots + b_{n1}e_n, \\ \dots \\ \mathcal{A}(e_n) = b_{1n}e_1 + \dots + b_{nn}e_n \end{cases}, \text{ т.е. } \mathcal{A}(e_k) = \sum_{j=1}^n b_{jk}e_j \quad \forall k = \overline{1, n}, \text{ а для любого } x \in V \text{ такого,}$$

что $x = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n$, его образ имеет вид: $\mathcal{A}(x) = \alpha^1 \mathcal{A}(e_1) + \dots + \alpha^n \mathcal{A}(e_n)$. Отсюда

следует, что определенный таким образом оператор \mathcal{A} является линейным, и его матрица

$$A_{[e]} = B \text{ в базисе } [e], \text{ т.е. } a_k^j = b_{jk} \quad \forall j, k = \overline{1, n}.$$

Единственность докажем от противного. Предположим, что существует еще один линейный оператор $\tilde{\mathcal{A}}: V \rightarrow V$, матрица которого $\tilde{A}_{[e]} = B$ в базисе $[e]$.

Тогда для любого $x \in V$ такого, что $x = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n$ следует

$$\tilde{\mathcal{A}}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha^k \tilde{\mathcal{A}}(e_k) = \sum_{k=1}^n \alpha^k \sum_{j=1}^n b_{kj} e_j = \sum_{k=1}^n \alpha^k \mathcal{A}(e_k) = \mathcal{A}(x).$$

Итак, в силу определения 7.4 оператор $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

#

Замечание 7.2. Теорема 7.1 показывает, что между линейным оператором и его матрицей установлено взаимно-однозначное соответствие через базис $[e]$, которое символически будем обозначать так: $\mathcal{A} \leftrightarrow A_{[e]}$.

Теорема 7.2. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ имеет в базисе $[e]$ матрицу $A_{[e]}$. Тогда для любого $x \in V$ такого, что $x = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n$, а его образ $\mathcal{A}(x) = \beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n$ справедлива следующая формула:

$$\underset{\downarrow}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} = A_{[e]} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = A_{[e]} \underset{\downarrow}{\alpha}. \quad (16)$$

С одной стороны, $\mathcal{A}(x) = \beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n$.

С другой стороны, $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) = \alpha^1 \mathcal{A}(e_1) + \dots + \alpha^n \mathcal{A}(e_n) =$
 $=]$ по формуле (15) $[= \alpha^1 (a_1^1 e_1 + \dots + a_1^n e_n) + \dots + \alpha^n (a_n^1 e_1 + \dots + a_n^n e_n) =$

$$= (\alpha^1 a_1^1 + \dots + \alpha^n a_n^1) e_1 + \dots + (\alpha^1 a_1^n + \dots + \alpha^n a_n^n) e_n .$$

Итак, $\beta^k = \sum_{j=1}^n \alpha^j a_j^k \quad \forall k = \overline{1, n}$, а это означает, что $\beta = A_{[e]} \alpha$. #

7.3. Действия над линейными операторами. Линейное пространство линейных операторов.

Пусть V и W – линейные пространства над множеством K . Обозначим через $\mathcal{L}(V, W)$ множество линейных операторов, отображающих линейное пространство V в пространство W , а через $\mathcal{L}(V) \equiv \mathcal{L}(V, V)$ – множество линейных операторов, отображающих линейное пространство V в себя, т.е. в V .

Определение 7.6. Пусть линейные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$. Тогда

1. суммой операторов \mathcal{A} и \mathcal{B} называется оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ такой, что для любого элемента $x \in V$ $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$;
2. произведением оператора \mathcal{A} на число $\lambda \in K$ называется оператор $\lambda \cdot \mathcal{A}$ такой, что для любого элемента $x \in V$ $(\lambda \cdot \mathcal{A})(x) = \lambda \mathcal{A}(x)$.

Лемма 7.3. Операторы $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и $\lambda \cdot \mathcal{A}$ являются линейными из множества $\mathcal{L}(V, W)$.

1.: Рассмотрим оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Тогда 1) для любых элементов $x_1, x_2 \in V$ выполняется $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1 + x_2) + \mathcal{B}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) + \mathcal{B}(x_1) + \mathcal{B}(x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{B}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) + \mathcal{B}(x_2) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_1) + (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_2)$ и

2) для любого элемента $x \in V$ и любого числа $\lambda \in K$ выполняется $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\lambda x) = \mathcal{A}(\lambda x) + \mathcal{B}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) + \lambda \mathcal{B}(x) = \lambda (\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)) = \lambda (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x)$.

Итак, оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ является линейным, т.е. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \in \mathcal{L}(V, W)$.

2.: Рассмотрим оператор $\lambda \cdot \mathcal{A}$. Тогда 1) для любых элементов $x_1, x_2 \in V$ выполняется $(\lambda \cdot \mathcal{A})(x_1 + x_2) = \lambda \cdot (\mathcal{A}(x_1 + x_2)) = \lambda \cdot (\mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2)) = (\lambda \cdot \mathcal{A})(x_1) + (\lambda \cdot \mathcal{A})(x_2)$, и 2) для любого элемента $x \in V$ и любого числа $\mu \in K$ выполняется $(\lambda \cdot \mathcal{A})(\mu x) = \lambda \cdot (\mathcal{A}(\mu x)) = \lambda \cdot (\mu \mathcal{A}(x)) = \mu (\lambda \mathcal{A}(x))$. Итак, оператор $\lambda \cdot \mathcal{A}$ является линейным, т.е. $(\lambda \cdot \mathcal{A}) \in \mathcal{L}(V, W)$. #

Теорема 7.3. Множество линейных операторов $\mathcal{L}(V, W)$, отображающих пространство V в пространство W , является линейным пространством.

Согласно лемме 7.3 для каждого элемента множества $\mathcal{L}(V, W)$ определены операции сложения этих элементов и умножение их на число из K , результаты которых не выходят из $\mathcal{L}(V, W)$, т.е. выполняются условия а) и б) определения 4.1.

Далее проверим выполнение аксиом линейного пространства:

1*: Для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ и для любого элемента $x \in V$ выполняется

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x) + \mathcal{A}(x) = (\mathcal{B} + \mathcal{A})(x), \text{ т.е. } \mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}.$$

2*: Для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D} \in \mathcal{L}(V, W)$ и для любого элемента $x \in V$ получим

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{D})(x) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) + \mathcal{D}(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) + \mathcal{D}(x) = \mathcal{A}(x) + (\mathcal{B}(x) + \mathcal{D}(x)) = \\ &= \mathcal{A}(x) + (\mathcal{B} + \mathcal{D})(x) = (\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{D}))(x), \text{ т.е. } (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{D} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{D}). \end{aligned}$$

3*: Существует нулевой элемент \mathcal{O} из $\mathcal{L}(V, W)$ такой, что для любого оператора

$$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W) \text{ и для любого элемента } x \in V \text{ получим } (\mathcal{A} + \mathcal{O})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{O}(x) = \mathcal{A}(x) + \theta = \mathcal{A}(x), \text{ т.е. } \mathcal{A} + \mathcal{O} = \mathcal{A}.$$

4*: Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ существует противоположный элемент $\mathcal{A}' = -\mathcal{A}$ из $\mathcal{L}(V, W)$ такой, что для любого элемента $x \in V$ выполняется $(\mathcal{A} + \mathcal{A}')(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}'(x) = \mathcal{A}(x) + (-\mathcal{A})(x) = \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x) = \theta = \mathcal{O}(x)$, т.е. $\mathcal{A} + \mathcal{A}' = \mathcal{O}$.

5*: Для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ и для любого числа $\lambda \in K$ при всех элементах $x \in V$ получим $(\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}))(x) = \lambda(\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)) = \lambda\mathcal{A}(x) + \lambda\mathcal{B}(x) = (\lambda\mathcal{A})(x) + (\lambda\mathcal{B})(x) = ((\lambda\mathcal{A}) + (\lambda\mathcal{B}))(x)$, т.е. $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) + (\lambda\mathcal{B})$.

6*: Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и для любых чисел $\lambda, \mu \in K$ при всех элементах $x \in V$ выполняется $((\lambda + \mu)\mathcal{A})(x) = (\lambda + \mu)(\mathcal{A}(x)) = \lambda(\mathcal{A}(x)) + \mu(\mathcal{A}(x)) = (\lambda\mathcal{A})(x) + (\mu\mathcal{A})(x) = ((\lambda\mathcal{A}) + (\mu\mathcal{A}))(x)$, т.е. $(\lambda + \mu)\mathcal{A} = (\lambda\mathcal{A}) + (\mu\mathcal{A})$.

7*: Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ и для любых чисел $\lambda, \mu \in K$ при всех элементах $x \in V$ получим $((\lambda \cdot \mu)\mathcal{A})(x) = (\lambda \cdot \mu)(\mathcal{A}(x)) = \lambda(\mu \mathcal{A}(x)) = \lambda(\mu \mathcal{A})(x) = (\lambda(\mu \mathcal{A}))(x)$, т.е. $(\lambda \cdot \mu)\mathcal{A} = \lambda(\mu \mathcal{A})$.

8*: Для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ при всех элементах $x \in V$ выполняется $(1 \cdot \mathcal{A})(x) = 1 \cdot (\mathcal{A}(x)) = \mathcal{A}(x)$, т.е. $1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Итак, все аксиомы линейного пространства выполняются для элементов множества $\mathcal{L}(V, W)$. Следовательно это множество является линейным пространством. #

Определение 7.7. Пусть линейные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$.

Тогда произведением операторов \mathcal{A} на \mathcal{B} называется оператор $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ такой, что для любого элемента $x \in V$ выполняется $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$.

Теорема 7.4. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$, то оператор $\mathcal{A} - \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$.

Проверим выполнение условий 1) и 2) определения 7.2.

1): Для любых элементов $x_1, x_2 \in V$ выполняется $(\mathcal{A} - \mathcal{B})(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1 + x_2)) =$
 $= \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1) + \mathcal{B}(x_2)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_1)) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(x_2)) = (\mathcal{A} - \mathcal{B})(x_1) + (\mathcal{A} - \mathcal{B})(x_2)$.

2): Для любого элемента $x \in V$ и любого числа $\lambda \in K$ выполняется $(\mathcal{A} - \mathcal{B})(\lambda \cdot x) =$
 $= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\lambda \cdot x)) = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{B}(x)) = \lambda \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = \lambda (\mathcal{A} - \mathcal{B})(x)$.

Итак, оба условия выполнены, следовательно, $\mathcal{A} - \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$. #

Теорема 7.5. (Свойства линейных операторов)

Для любых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D} \in \mathcal{L}(V)$ и для любого числа $\lambda \in K$ выполняются следующие свойства:

1° $\mathcal{A} - (\mathcal{B} + \mathcal{D}) = \mathcal{A} - \mathcal{B} + \mathcal{A} - \mathcal{D}$;

2° $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) - \mathcal{D} = \mathcal{A} - \mathcal{D} + \mathcal{B} - \mathcal{D}$;

3° $\lambda(\mathcal{A} - \mathcal{B}) = (\lambda \cdot \mathcal{A}) - \mathcal{B} = \mathcal{A} - (\lambda \cdot \mathcal{B})$;

4° $\mathcal{A} - (\mathcal{B} - \mathcal{D}) = (\mathcal{A} - \mathcal{B}) - \mathcal{D}$.

1°: Для любого элемента $x \in V$ выполняется $\mathcal{A} - (\mathcal{B} + \mathcal{D})(x) = \mathcal{A} - (\mathcal{B}(x) + \mathcal{D}(x)) =$
 $= \mathcal{A} - (\mathcal{B}(x)) + \mathcal{A} - (\mathcal{D}(x)) = (\mathcal{A} - \mathcal{B})(x) + (\mathcal{A} - \mathcal{D})(x) = (\mathcal{A} - \mathcal{B} + \mathcal{A} - \mathcal{D})(x)$, тогда в силу определения 7.4 $\mathcal{A} - (\mathcal{B} + \mathcal{D}) = \mathcal{A} - \mathcal{B} + \mathcal{A} - \mathcal{D}$.

2°: Для любого элемента $x \in V$ выполняется $((A + B) \cdot D)(x) = (A + B)(D(x)) =$
 $= A(D(x)) + B(D(x)) = (A \cdot D)(x) + (B \cdot D)(x) = (A \cdot D + B \cdot D)(x)$, следовательно,
 $(A + B) \cdot D = A \cdot D + B \cdot D$.

3°: Для любого элемента $x \in V$ и любого числа $\lambda \in K$ выполняется
 $\lambda(A \cdot B)(x) = \lambda A(B(x)) = ((\lambda A) \cdot B)(x)$, т.е. $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B$ или
 $\lambda(A \cdot B)(x) = \lambda A(B(x)) = A(\lambda B(x)) = (A \cdot (\lambda B))(x)$, т.е. $\lambda(A \cdot B) = A \cdot (\lambda B)$.

4°: Для любого элемента $x \in V$ выполняется $(A \cdot (B \cdot D))(x) = A((B \cdot D)(x)) =$
 $= A(B(D(x))) = (A \cdot B)(D(x)) = ((A \cdot B) \cdot D)(x)$, следовательно, $A \cdot (B \cdot D) = (A \cdot B) \cdot D$. #

Теорема 7.6. (Свойства матриц линейных операторов)

Пусть $[e] = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис линейного пространства V , линейные операторы
 $A, B \in \mathcal{L}(V)$, которым в базисе $[e]$ соответствуют следующие матрицы $A_{[e]}$ и $B_{[e]}$,
 т.е. $A \leftrightarrow A_{[e]}$ и $B \leftrightarrow B_{[e]}$. Тогда справедливы следующие свойства:

1° Оператору $A + B$ в базисе $[e]$ соответствует матрица $(A+B)_{[e]} = A_{[e]} + B_{[e]}$.

2° Оператору $\lambda \cdot A$ в базисе $[e]$ соответствует матрица $(\lambda A)_{[e]} = \lambda \cdot A_{[e]}$.

3° Оператору $A \cdot B$ в базисе $[e]$ соответствует матрица $(A \cdot B)_{[e]} = A_{[e]} \cdot B_{[e]}$.

1°: Вычислим $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(e_j) = \mathcal{A}(e_j) + \mathcal{B}(e_j) = (a_j^1 e_1 + \dots + a_j^n e_n) + (b_j^1 e_1 + \dots + b_j^n e_n) = (a_j^1 + b_j^1) e_1 + \dots + (a_j^n + b_j^n) e_n \quad \forall j = \overline{1, n}$, следовательно, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{[e]} = \mathbf{A}_{[e]} + \mathbf{B}_{[e]}$.

2°: Вычислим $(\lambda \mathcal{A})(e_j) = \lambda (\mathcal{A}(e_j)) = \lambda (a_j^1 e_1 + \dots + a_j^n e_n) = (\lambda a_j^1) e_1 + \dots + (\lambda a_j^n) e_n \quad \forall j = \overline{1, n}$, следовательно, $(\lambda \mathbf{A})_{[e]} = \lambda \cdot \mathbf{A}_{[e]}$.

3°: Вычислим $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})(e_j) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(e_j)) = \mathcal{A}(b_j^1 e_1 + \dots + b_j^n e_n) = b_j^1 \mathcal{A}(e_1) + \dots + b_j^n \mathcal{A}(e_n) = b_j^1 (a_1^1 e_1 + \dots + a_1^n e_n) + \dots + b_j^n (a_n^1 e_1 + \dots + a_n^n e_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^1 b_j^k \right) e_1 + \dots + \left(\sum_{k=1}^n a_k^n b_j^k \right) e_n = c_j^1 e_1 + \dots + c_j^n e_n \quad \forall j = \overline{1, n}$, следовательно, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{[e]} = \mathbf{A}_{[e]} \cdot \mathbf{B}_{[e]}$. #

Теорема 7.7. Для любого линейного пространства V справедлива формула:

$$\dim \mathcal{L}(V) = (\dim V)^2. \quad (17)$$

Пусть $[e]$ – базис линейного пространства V , у которого $\dim V = n$.

Возьмем матрицы $\mathbf{B}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i, j = \overline{1, n}$ (1 стоит в i -ой строке и

j -ом столбце, остальные элементы этой матрицы равны 0). В силу теоремы 7.1 этим матрицам через базис $[e]$ ставятся в однозначное соответствие линейные операторы

$\mathcal{B}_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$. Заметим, что система $\{\mathbf{B}_{ij}\}_{i, j=1}^n$ является базисом линейного

пространства $M_{n \times n}$. Тогда равенство $\sum_{i, j=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{B}_{ij} = \mathbf{O}$ справедливо только при

$\lambda_{ij} = 0 \quad \forall i, j = \overline{1, n}$, а в силу теоремы 7.6 в том и только в том случае, когда верно равенство $\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \mathcal{B}_{ij} = \mathcal{O}$. Это означает, что $\{\mathcal{B}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ является линейно независимой системой.

Далее, любому оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ в базисе $[e]$ соответствует матрица $A_{[e]} = (a_j^i)_{n \times n}$, причем $A_{[e]} = \sum_{i,j=1}^n a_j^i \mathcal{B}_{ij}$. Последнее равенство в силу теоремы 7.6 эквивалентно равенству $\mathcal{A} = \sum_{i,j=1}^n a_j^i \mathcal{B}_{ij}$. Итак, система $\{\mathcal{B}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ является базисом линейного пространства $\mathcal{L}(V)$. А в силу теоремы 5.4 $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$. #

7.4. Обратный оператор. Критерий обратимости.

Пусть V – линейное пространство над множеством K , $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

Определение 7.3. Оператор \mathcal{B} называется *обратным оператором к \mathcal{A}* , если $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = I$ (будем писать $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$). При этом, если существует \mathcal{A}^{-1} , то оператор \mathcal{A} называется *обратимым*.

Лемма 7.3. Если оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ обратим, то

1. обратный оператор \mathcal{A}^{-1} является единственным;
2. оператор \mathcal{A}^{-1} линейный, отображающий V в V , т.е. $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(V)$.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

1.: Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует линейный

оператор $\tilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V)$, у которого имеется два обратных оператора $\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$. Тогда для любого элемента $x \in V$ выполняется $\tilde{\mathcal{B}}(x) = \tilde{\mathcal{B}}(I(x)) = \tilde{\mathcal{B}}((\tilde{\mathcal{A}} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1})(x)) =$
 $= (\tilde{\mathcal{B}} - \tilde{\mathcal{A}})(\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)) = I(\tilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)) = \tilde{\mathcal{A}}^{-1}(x)$, т.е. $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{A}}^{-1}$. Итак, для любого обратимого оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ существует единственный обратный оператор \mathcal{A}^{-1} .

2.: 1): Для любых элементов $y_1, y_2 \in V$ выполняется $\mathcal{A}^{-1}(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^{-1}(Iy_1 + Iy_2) =$
 $= \mathcal{A}^{-1}((\mathcal{A} - \mathcal{A}^{-1})(y_1) + (\mathcal{A} - \mathcal{A}^{-1})(y_2)) = (\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{A})(\mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2)) =$
 $= I(\mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2)) = \mathcal{A}^{-1}(y_1) + \mathcal{A}^{-1}(y_2)$.

2): Для любого элемента $x \in V$ и для любого числа $\lambda \in K$ выполняется $\mathcal{A}^{-1}(\lambda x) =$
 $= \mathcal{A}^{-1}(\lambda I(x)) = \mathcal{A}^{-1}(\lambda(\mathcal{A} - \mathcal{A}^{-1})(x)) = (\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{A})(\lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x)) = I(\lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x)) = \lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(x)$.

Итак, выполнены условия 1) и 2) определения 7.2, т.е. $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(V)$. #

Теорема 7.3. (Критерий обратимости линейного оператора)

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ является обратимым тогда и только тогда, когда существует базис $[e]$ линейного пространства V такой, что оператору \mathcal{A} в этом базисе соответствует невырожденная матрица $A_{[e]}$, т.е. $\det(A_{[e]}) \neq 0$.

Необходимость. Пусть оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ обратим, т.е. существует оператор \mathcal{A}^{-1} такой, что $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = I$ (*). Возьмем произвольный базис $[e]$ линейного пространства V , в котором оператору \mathcal{A} соответствует матрица $A_{[e]}$, т.е. $\mathcal{A} \leftrightarrow A_{[e]}$. Тогда равенствам (*) в силу теоремы 7.6 эквивалентны равенства $A_{[e]}(A^{-1})_{[e]} =$
 $= (A^{-1})_{[e]} \cdot A_{[e]} = E$ (**). Тогда в силу теоремы 3.7 $\det(A_{[e]}) \cdot \det((A^{-1})_{[e]}) = 1$, откуда получаем, что $\det(A_{[e]}) \neq 0$.

Достаточность. Пусть существует базис $[e]$ линейного пространства V такой, что оператору \mathcal{A} в этом базисе соответствует невырожденная матрица $A_{[e]}$, т.е. $\det(A_{[e]}) \neq 0$. Тогда по теореме 4.1 существует обратная матрица $(A_{[e]})^{-1}$ к матрице $A_{[e]}$ такая, что $A_{[e]} \cdot (A_{[e]})^{-1} = (A_{[e]})^{-1} \cdot A_{[e]} = E$. В силу теоремы 7.1 для матрицы $(A_{[e]})^{-1}$ в базисе $[e]$ существует линейный оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$, т.е. $\mathcal{B} \leftrightarrow (A_{[e]})^{-1}$, для которого в силу теоремы 7.6 справедливы следующие равенства $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = I$. Это означает в силу определения 7.8, что оператор \mathcal{B} является обратным к оператору \mathcal{A} , т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$. #

Следствие 7.1. Пусть линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ в базисе $[e]$ линейного пространства V соответствует матрица $A_{[e]}$, а обратному оператору \mathcal{A}^{-1} – матрица $(A^{-1})_{[e]}$. Тогда справедлива следующая формула $(A^{-1})_{[e]} = (A_{[e]})^{-1}$.

Доказательство следует из равенств (**) доказательства теоремы 7.8.

Следствие 7.2. Если существует базис $[e]$ линейного пространства V такой, что оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ в этом базисе соответствует невырожденная матрица $A_{[e]}$, то в любом базисе $[f]$ пространства V матрица $A_{[f]}$ оператора \mathcal{A} является невырожденной.

Пусть существует базис $[e]$ линейного пространства V такой, что оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ в этом базисе соответствует невырожденная матрица $A_{[e]}$, т.е. $\det(A_{[e]}) \neq 0$. Тогда в силу достаточности теоремы 7.8 оператор \mathcal{A} является обратимым, а при доказательстве необходимости этой же теоремы в любом базисе $[f]$ пространства V матрица $A_{[f]}$ является невырожденной, т.е. $\det(A_{[f]}) \neq 0$.