

Методическая разработка Савченко Е.М.
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Объем

пирамиды

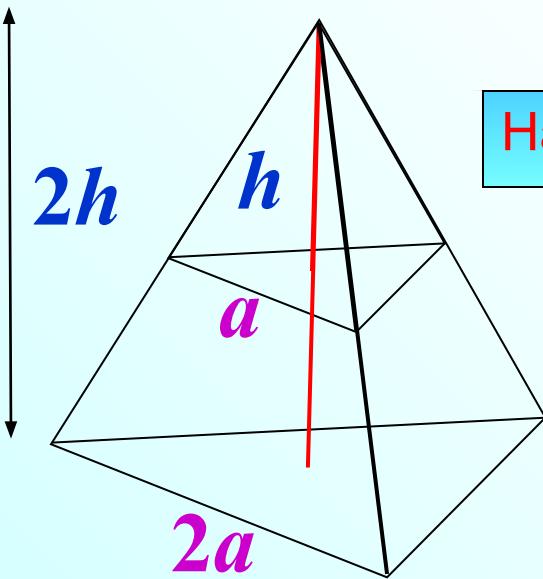
Открытый банк заданий по математике <http://mathege.ru:8080/or/ege/Main.action>

Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?

$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} S_1 h_1}{\frac{1}{3} S_2 h_2} =$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$



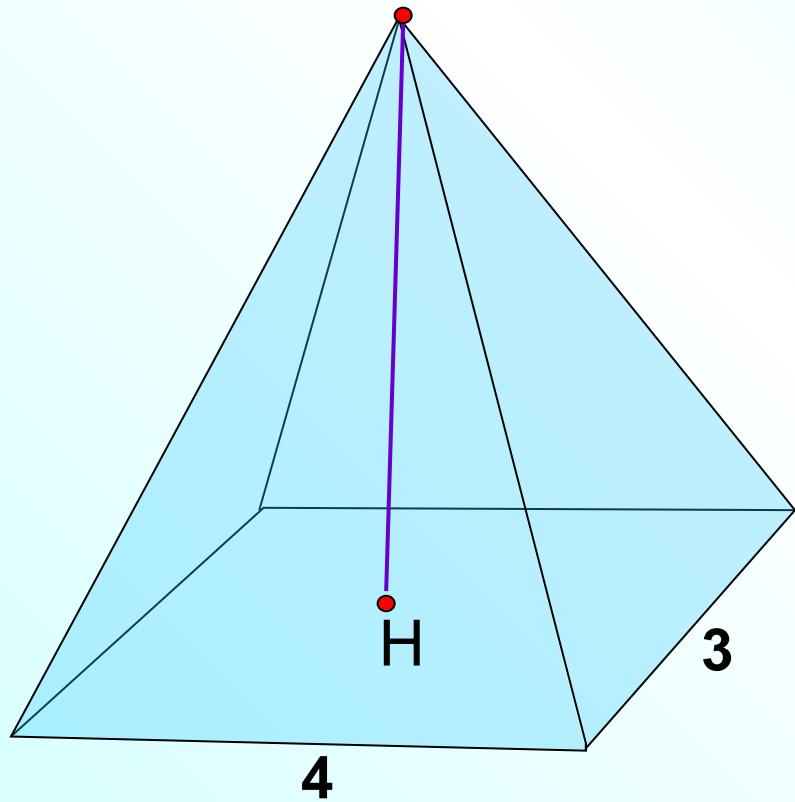
Найдем отношение объемов

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (2a)^2 \sin 60^\circ \cdot 2h} = \frac{a^2}{4a^2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

в 9

8

Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



$$S_o = 3 \cdot 4 = 12$$

$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$16 = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot H$$

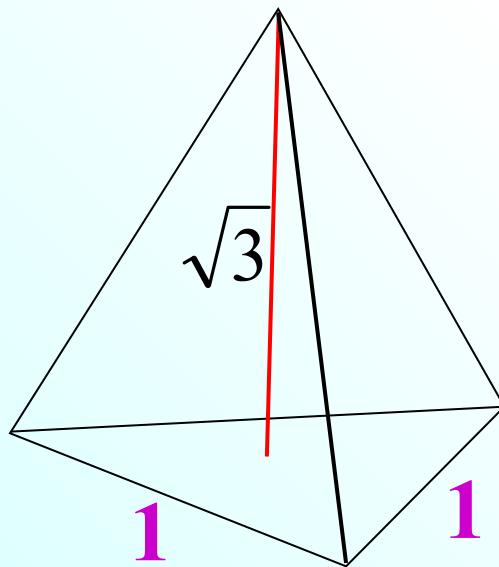
$$16 = 4 \cdot H$$

$$H = 4$$

В 9

4

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$



$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^0 \cdot \sqrt{3}$$

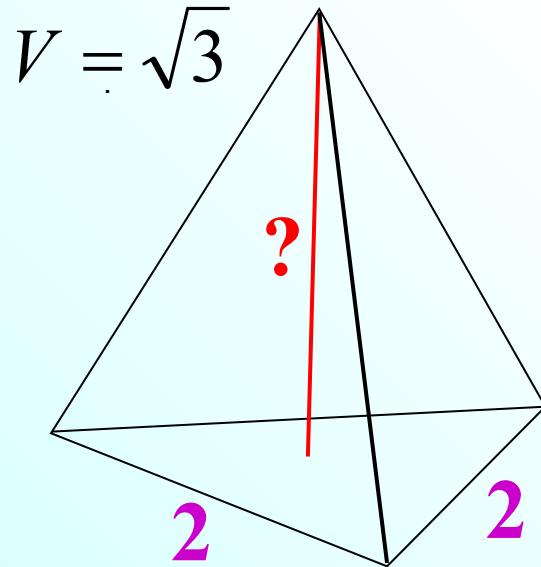
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4}$$

в 9 0 , 2 5

Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin a$$

$$S_o = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^0 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot H \quad / : \sqrt{3}$$

$$1 = \frac{1}{3} \cdot H \quad / \cdot 3$$

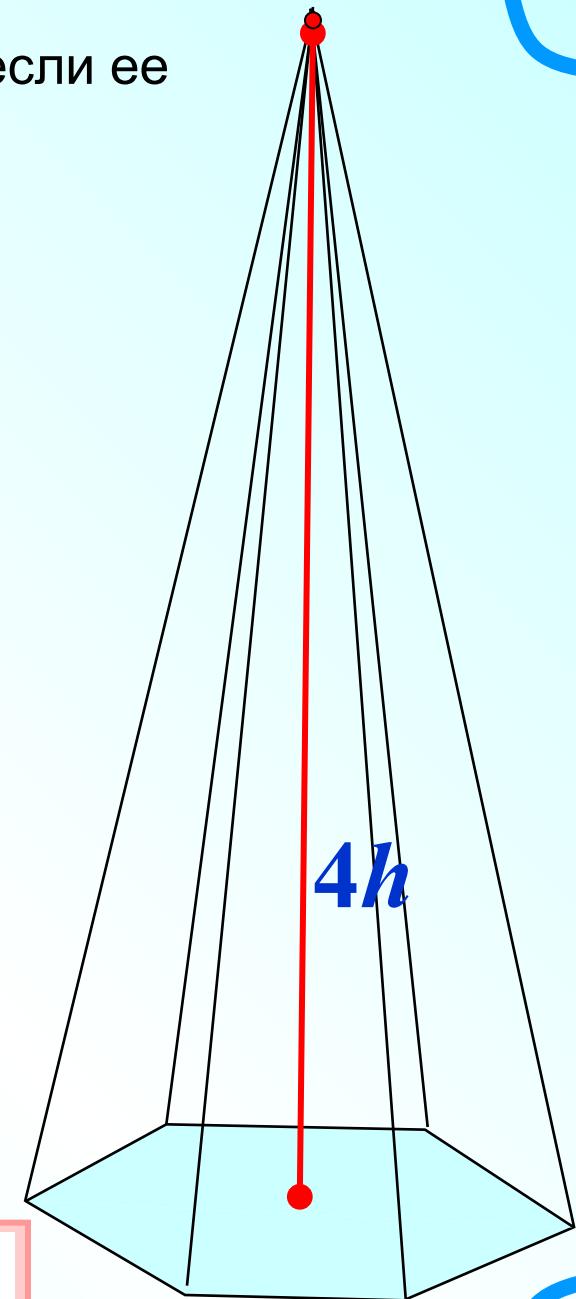
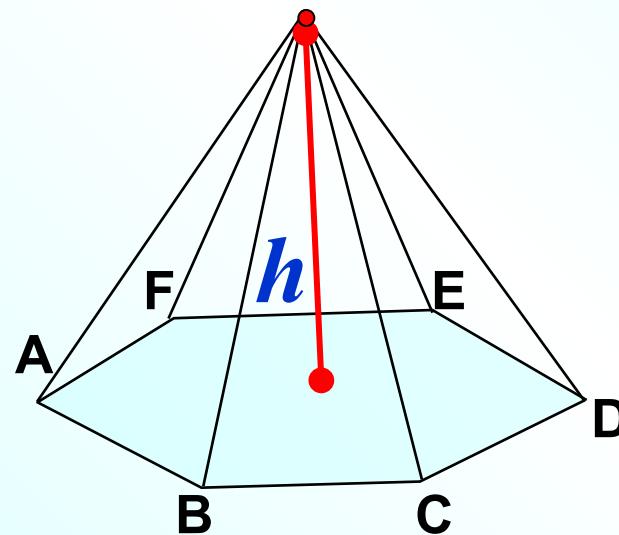
$$H = 3$$

Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?

$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} S_o h_1}{\frac{1}{3} S_o h_2} = \frac{h_1}{4h_2} = \frac{1}{4}$$

Найдем отношение объемов



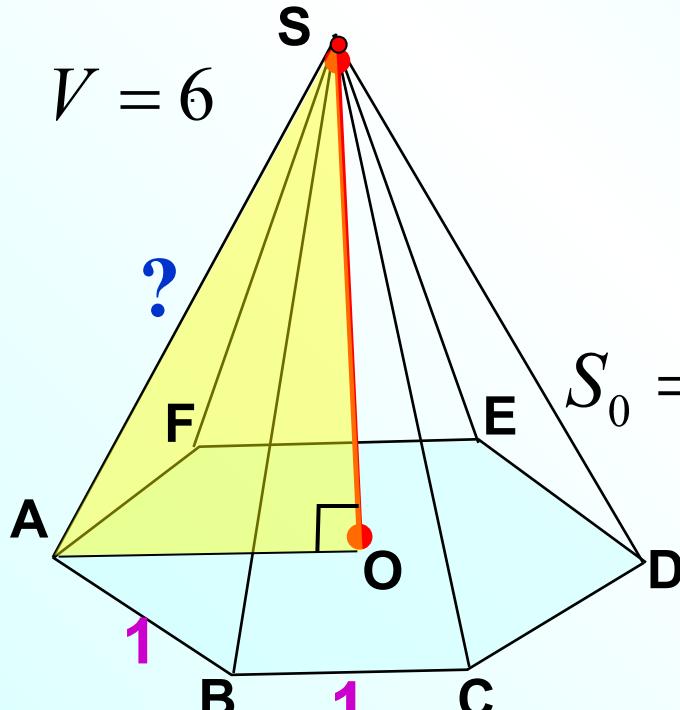
В 9

4

--	--	--	--	--	--	--

Объем правильной шестиугольной пирамиды 6.

Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.

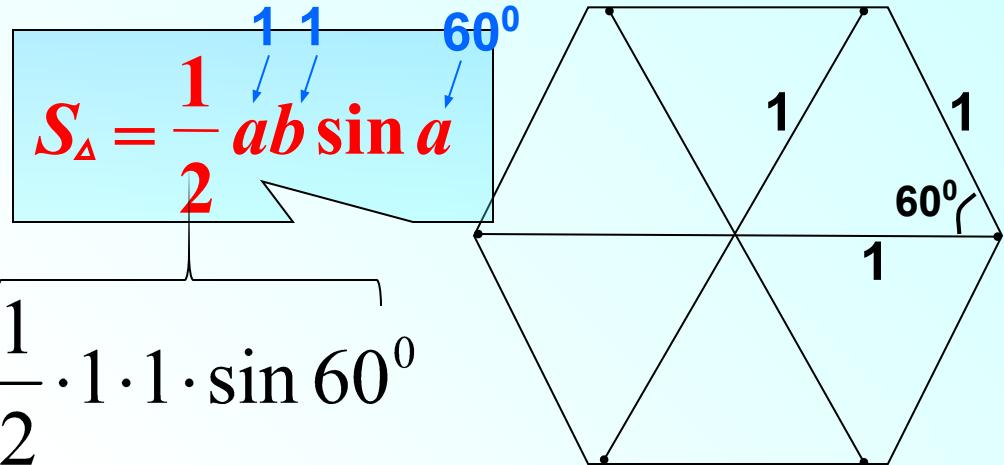


$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_0 h$$

6
2
 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
?

$$6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} h; \quad h = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Из $\triangle AOS$ по теореме Пифагора
найди ребро AS.



$$S_A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ$$

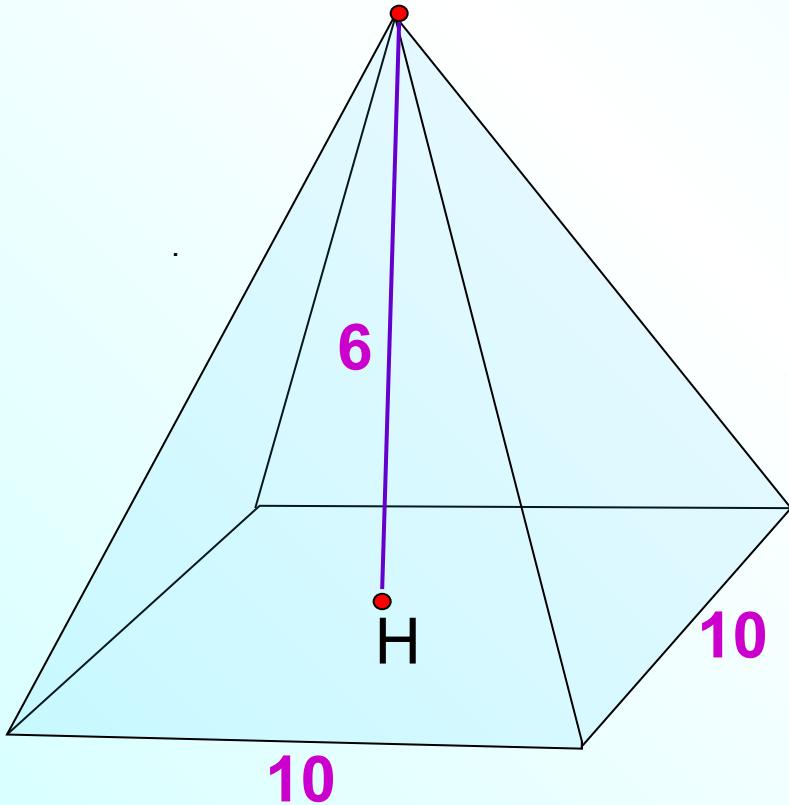
$$= 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Можно вычислить 6 уг.
площадь правильного
шестиугольника, разбив
его на 6 треугольников.

В 9

7

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, сторона основания равна 10. Найдите ее объем.



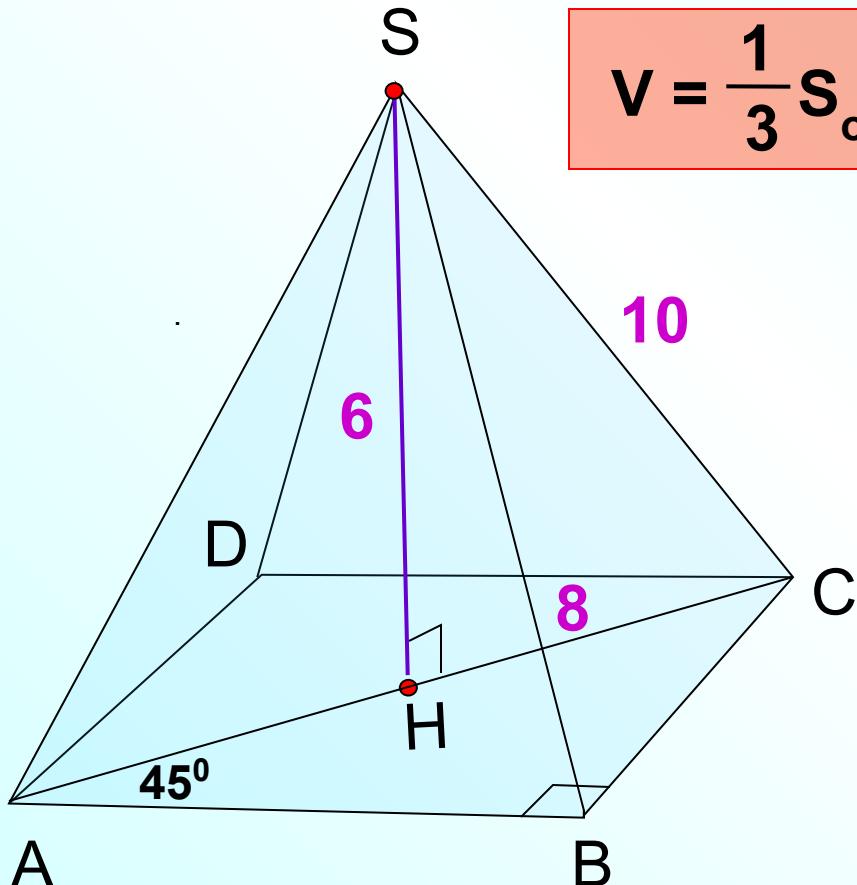
$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$S_{\text{кв.}} = a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 6 =$$

В 9 2 0 0

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.



$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

Из треугольника ABC:

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{16}$$

$$AB = 8\sqrt{2}$$

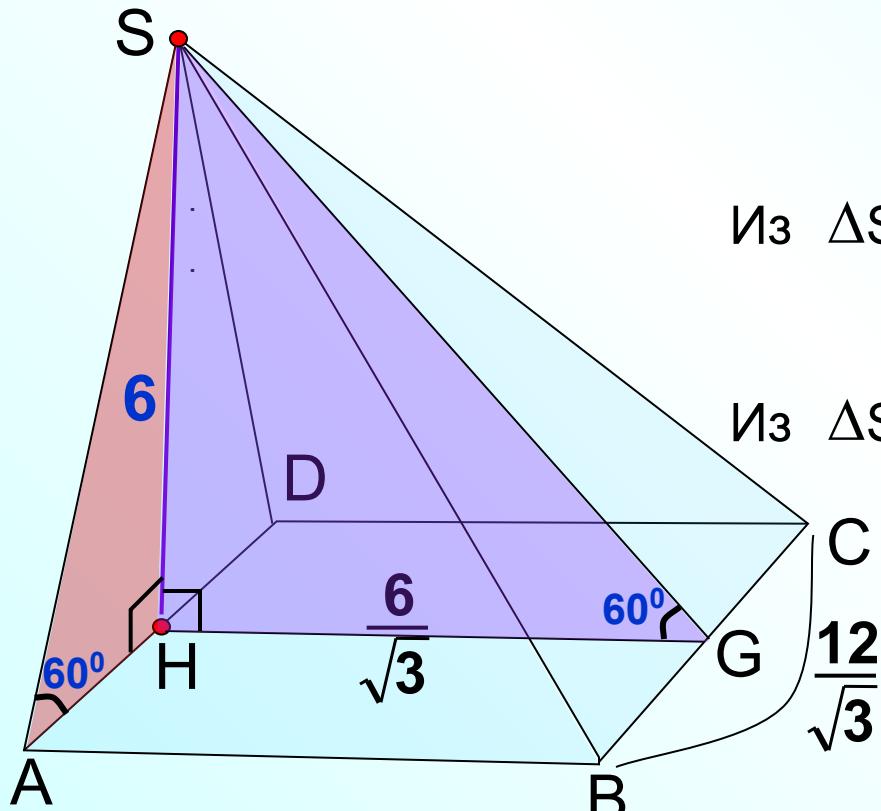
$$S_{\text{кв.}} = a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (8\sqrt{2})^2 \cdot 6 =$$

В 9

2 5 6

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60^0 . Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{пр.}} \cdot H$$

Из $\triangle SHG$: $\tg 60^0 = \frac{6}{HG}$; $HG = \frac{6}{\sqrt{3}}$

Из $\triangle SHA$: $\tg 60^0 = \frac{6}{AH}$; $AH = \frac{6}{\sqrt{3}}$

$$S_{\text{пр.}} = ab$$

$$AD = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

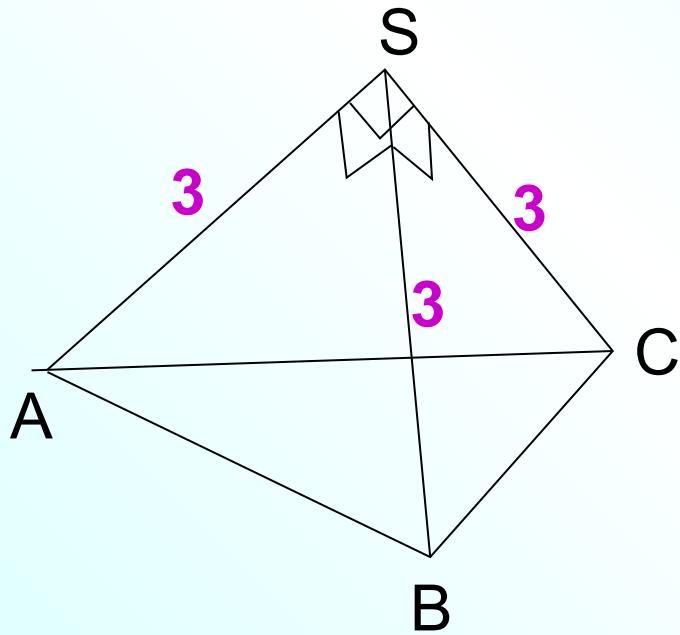
$$S_{ABCD} = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = 24$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6$$

В 9

4 8

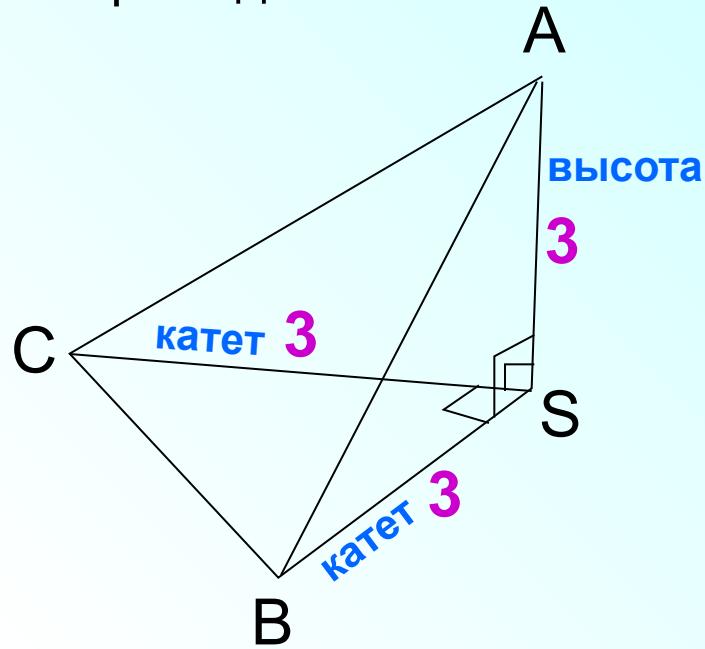
Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



$$V = \frac{1}{3} S_o H$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$



Задача очень простая, если догадаться опрокинуть пирамиду на удобную грань, например, SCB.
Основание – прямоугольный треугольник SCB, высота AS.

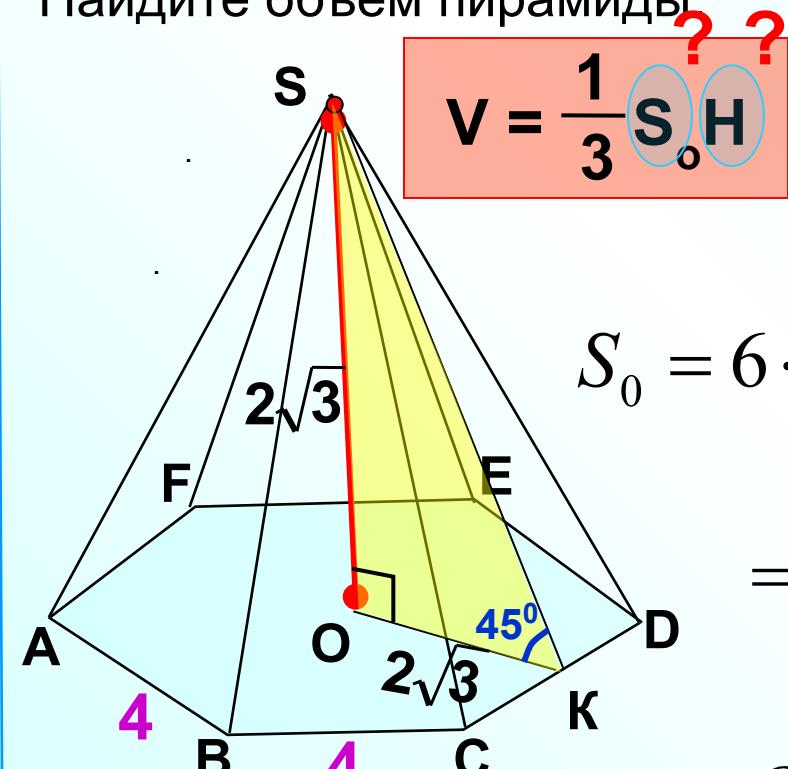
В 9

4

5

Страна основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45^0 .

Найдите объем пирамиды.



$$V = \frac{1}{3} S_0 \cdot H$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$

$$S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^0$$

Найдем ОК по теореме Пифагора

$$= 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

Можно вычислить площадь правильного шестиугольника, разбив его на 6 треугольников.

$$\Delta SOK - p/b, OK = OS = 2\sqrt{3}$$

~~$$V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$$~~

4 8

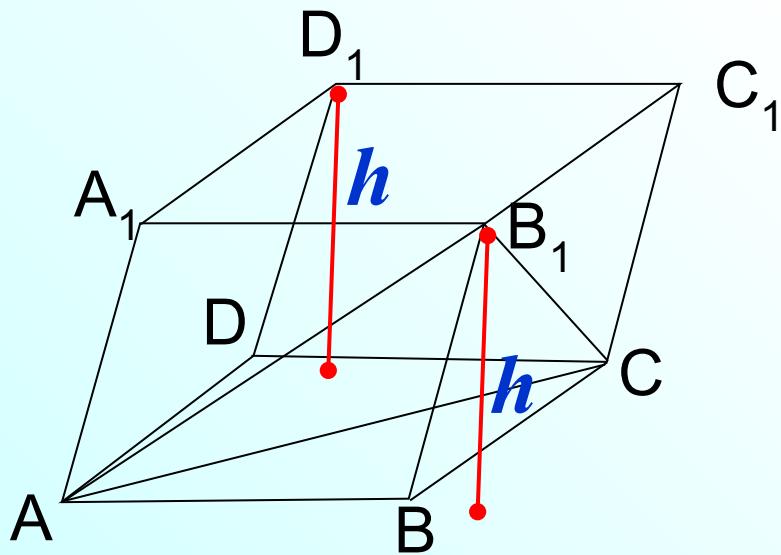
В 9

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12.
Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC .

$$V_{\text{приз.}} = S_o H$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{приз.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\frac{2S_{ABC}}{S_{ABCD}} h}{\frac{1}{3} S_{ABC} h} = \frac{2S_{ABC}}{\frac{1}{3} \cdot S_{ABC}} = \frac{6}{1}$$



Найдем отношение объемов

$$\frac{12}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}$$

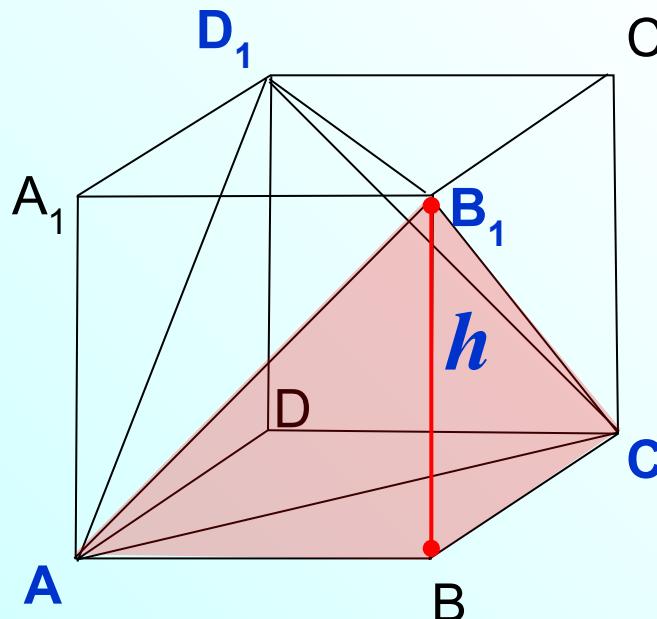
В 9

2

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 4,5. Найдите объем треугольной пирамиды AD_1CB_1 .

Пирамида AD_1CB_1 получается, если мы отрежем от параллелепипеда четыре пирамиды по углам $\overline{ABC}_1, \overline{D_1B_1C}, \overline{AA_1D_1B_1}$ и $\overline{ADCD_1}$. А объем каждой из них легко посчитать — мы делали это в предыдущей задаче.

Например, найдем объем пирамиды ABC_1B_1 : $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{o}} H$



$$\frac{H}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}; \quad V_{\text{пир.}} = \frac{3}{4}$$

Четыре пирамиды по углам — $ABC_1B_1, D_1B_1CC_1, AA_1D_1B_1$ и $ADCD_1$

$$4V_{\text{пир.}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

Объем пирамиды AD_1CB_1

$$V_{AD_1CB_1} = 4,5 - 3 = 1,5$$

9

1

5

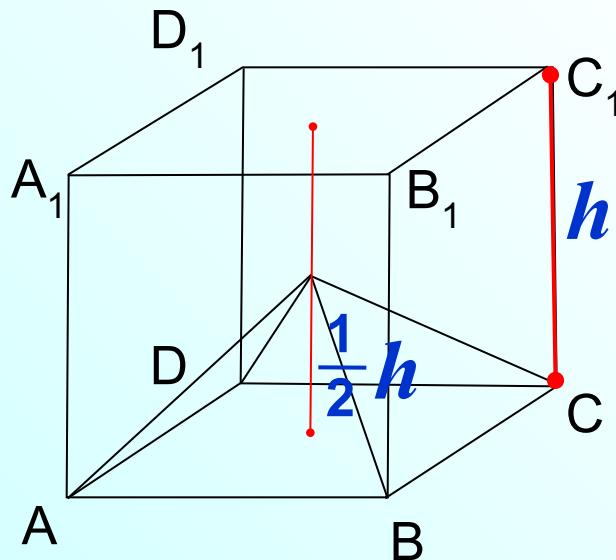
Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

Найдем отношение объемов

$$V_{\text{куб.}} = S_o h$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{куб.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\cancel{S_{ABCD}} \cancel{h}}{\frac{1}{3} \cancel{S_{ABCD}} \frac{1}{2} \cancel{h}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{1}$$



$$\frac{12}{V_{\text{пир.}}} = \frac{6}{1}$$

В 9

2

От треугольной призмы, объем которой равен 150, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания.

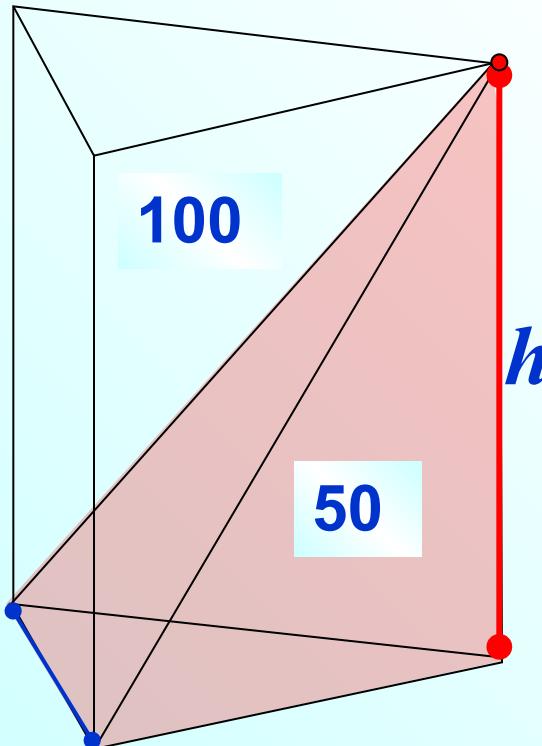
Найдите объем оставшейся

части.

$$V_{\text{приз.}} = S_o H$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{приз.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{\cancel{S_o} \cancel{h}}{\frac{1}{3} \cancel{S_o} \cancel{h}} = \frac{3}{1}$$



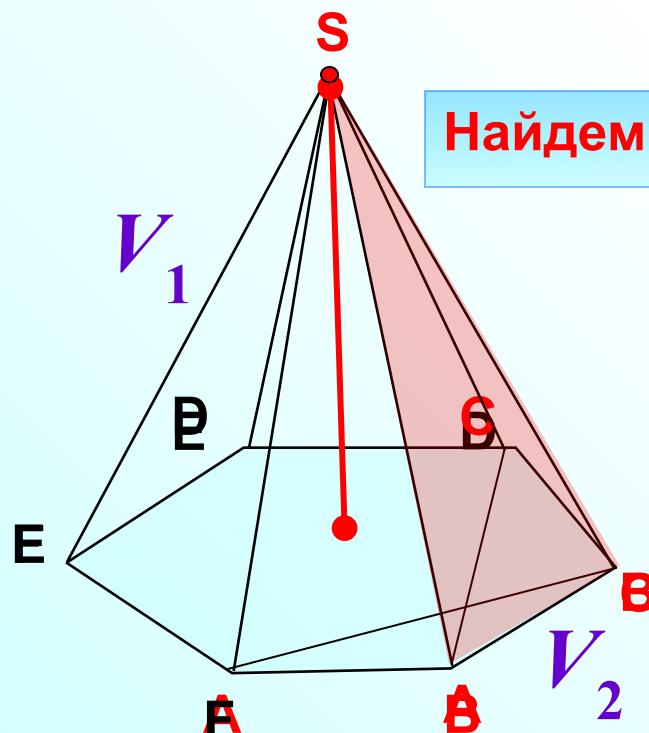
Найдем отношение объемов

$$\frac{150}{V_{\text{пир.}}} = \frac{3}{1}$$

В 9 1 0 0

Объем треугольной пирамиды $SABC$, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, равен 8. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

У треугольной и шестиугольной пирамид, в которых говорится в условии, одинаковые высоты. Убедимся в этом, изменим расположение букв...
 Однаковая высота, но площадь оснований различна.



Найдем отношение объемов

$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{8} = \frac{6}{1}$$



Поработаем с выносным чертежом.
 Видим, что площадь основания треугольной пирамиды в 6 раз меньше, чем у шестиугольной.

В 9

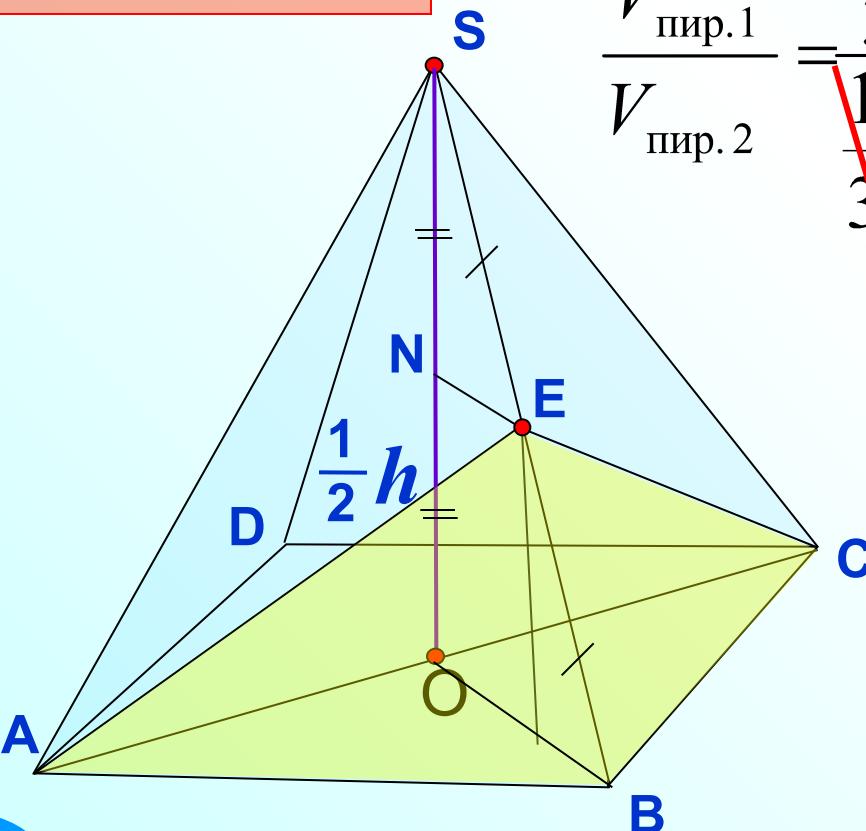
4 8

Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 12.

Точка E — середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды $EABC$.

Точка E — середина ребра SB , значит, точка N — середина SO (по т. Фалеса). Высота пирамиды $EABC$ равна половине высоты пирамиды $SABCD$.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$



$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{V_{\text{пир.2}}} = \frac{\frac{1}{3} \tilde{S}_{ABCD} \cancel{h}}{\frac{1}{3} S_{ABC} \frac{1}{2} \cancel{h}} = \frac{2S_{ABC}}{S_{ABC} \frac{1}{2}} = \frac{4}{1}$$

Найдем отношение объемов

$$\frac{12}{V_{\text{пир.2}}} = \frac{4}{1}$$

в 9

3

От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$

Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

У треугольной пирамиды и отсеченной пирамиды, о которых говорится

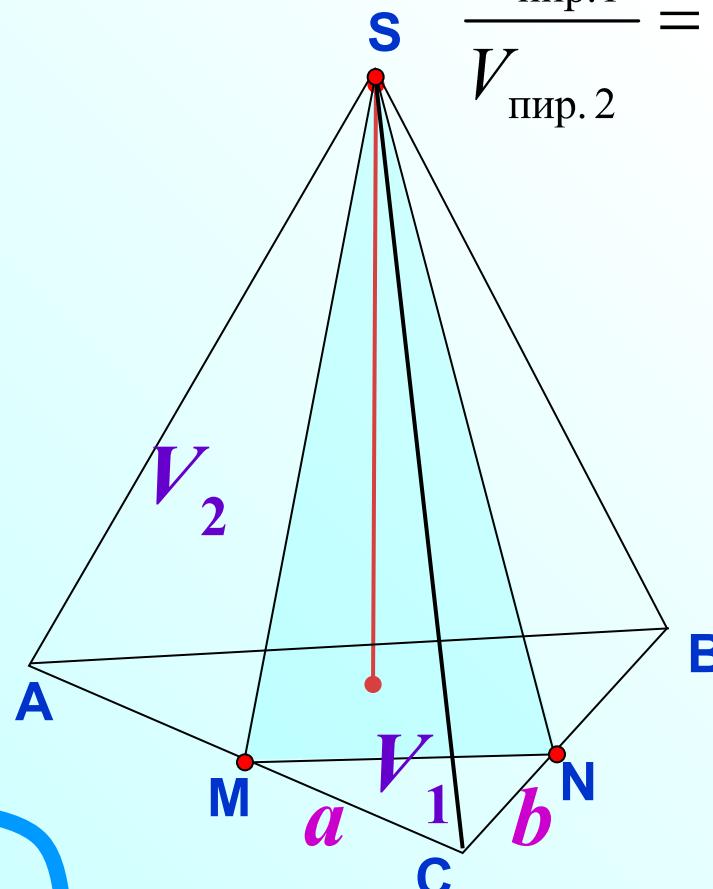
У треугольной пирамиды, одинарного висячего

В ~~=~~ **S** ~~N~~ **условии одинаковые высоты. Убедимся в этом, изменим расположение букв...**

Однаковая высота, но площадь оснований различна $ab \sin C$

Одинарная высота, но площадь оснований различна! $S_{\text{ПКС}} > S_{\text{ГС}}$

пир. 1 Работать можно с любым из этих чертежей.



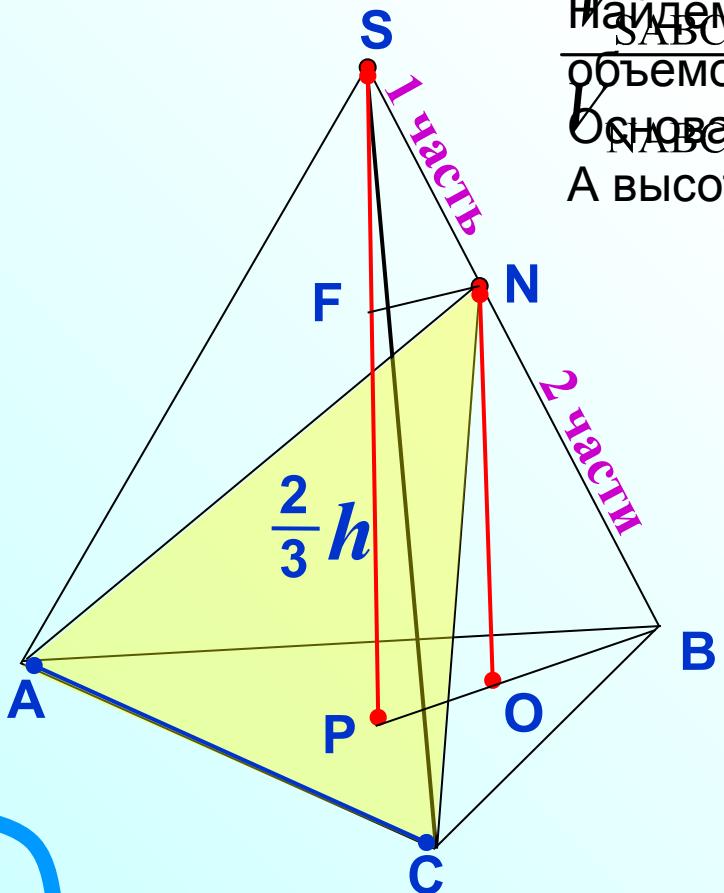
Найдем отношение объемов

$$\frac{V_{\text{пир.1}}}{V_{\text{пир.2}}} = \frac{1}{2}$$

B 9 | 3

Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

Надо сравнить объемы пирамид $NABC$ и $NSAC$. Найдем объем пирамиды $NABC$. Затем из V_{SABC} (это 15) вычтем V_{NABC} , найдем V_{NSAC} .



~~Найдем объем пирамиды $NABC$. Сравним его с объемом всей пирамиды $SABC$, составив отношение. Основания у них одинаковые – треугольник ABC . А высоты разные, сравним их.~~

$$\text{Поскольку } FP:SP = 2:3. \text{ Тогда } \frac{15}{V_{NABC}} = \frac{3}{2} \Rightarrow V_{NABC} = 10;$$

$$V_{NABC} = 10;$$

$$V_{NSAC} = 15 - 10 = 5.$$

В 9

1 0