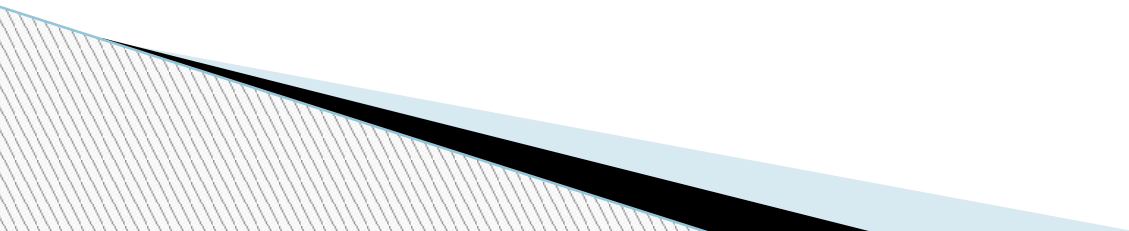


# Делимость целых чисел



## Делимость натуральных чисел

### **Определение 1.**

Целое число  $n$  делится на целое число  $m(m \neq 0)$ , если существует такое целое число  $q$ , что  $n = mq$ .

## Простые и составные числа

**Теорема 1:** Каждое натуральное число  $n > 1$  можно представить единственным образом в виде произведения простых чисел.

$$21 = 3 \cdot 7; \quad 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2.$$

### **Определение 2.**

Два числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, кроме единицы.

**Теорема 2:** Если каждое из двух натуральных чисел  $a$  и  $b$  делится на натуральное число  $c$ , то их сумма и разность делить на  $c$ .



**Лемма:** Пусть натуральные числа  $m$ ,  $n$  и  $q$  таковы, что  $n = m \cdot q$  и  $n$  имеет делитель  $d$ , такой, что  $(m, d) = 1$ , тогда число  $q$  делится на  $d$ .

**Пример:** 777

$\div 7$ , а  $(7, 3) = 1$ , тогда из равенства  $777 = 3 \cdot 259$  следует, что  $259 \div 7$ .

### Деление целых чисел с остатком

$a = b \cdot q + r$ , где  $0 \leq r < |b|$ ,  $q$  – неполное частное,  $r$  – остаток.

# Признак делимости чисел

## ✓ НА 5

На 5 делятся все натуральные числа, оканчивающиеся на 5 или 0. Например: 125; 10 720.

## ✓ НА 4

На 4 делятся все натуральные числа, две последние цифры которых составляют нули или число, кратное 4.  
Например:  
103 456 ( $56 : 4 = 14$ ).

## ✓ НА 9

На 9 делятся те натуральные числа, сумма цифр которых кратна 9. Например:  
1179 ( $1 + 1 + 7 + 9 = 18$ ,  $18 : 9 = 2$ ).

## ✓ НА 2

На 2 делятся все четные натуральные числа, например: 172, 94,67 838.

## ✓ НА 3

На 3 делятся все натуральные числа, сумма цифр которых кратна 3.  
Например:  
39 ( $3 + 9 = 12$ ;  $12 : 3 = 4$ );

## ✓ НА 6

На 6 делятся те натуральные числа, которые делятся на 2 и на 3 одновременно (все четные числа, которые делятся на 3). Например:  
126 (6 — четное,  $1 + 2 + 6 = 9$ ,  $9 : 3 = 3$ ).

# Признак делимости чисел

## ✓ НА 10

На 10 делятся все натуральные числа, оканчивающиеся на 0. Например: 30; 980; 1 200; 1 570.

## ✓ НА 25

На 25 делятся те натуральные числа, две последние цифры которых — нули или составляют число, кратное 25. Например: 2 300; 650 ( $50 : 25 = 2$ );

## ✓ Признак делимости чисел на разрядную единицу

На разрядную единицу делятся те натуральные числа, у которых количество нулей больше или равно количеству нулей разрядной единицы. Например: 12 000 делится на 10, 100 и 1000.

## ✓ НА 11

На 11 делятся только те натуральные числа, у которых сумма цифр, занимающих четные места, равна сумме цифр, занимающих нечетные места, или разность суммы цифр нечетных мест и суммы цифр четных мест кратна 11.

Например:  
105787 ( $1 + 5 + 8 = 14$  и  $0 + 7 + 7 = 14$ );  
9 163 627 ( $9 + 6 + 6 + 7 = 28$  и  $1 + 3 + 2 = 6$ );  
 $28 - 6 = 22$ ;  $22 : 11 = 2$ ).

# Признаки делимости на 7

## • 1 способ:

Для того, чтобы натуральное число делилось на **7** необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих нечётные группы по три цифры (начиная с единиц) взятых со знаком «+» и чётных со знаком «-» делилась на семь.

Например: число **689255**.

первая группа со знаком «+» **689**, вторая со знаком «-» **255**. Отсюда **689—255 = 434**. Так как **434 : 7 = 62**, то **689255** делится на **7**.

## • 2 способ:

Нужно последнюю цифру числа умножить на **2** и вычесть из «числа, оставшегося без последней цифры». Если получившееся число делится на **7**, то и само число делится на **7**.

Например: число **689255**.

последняя цифра **5**, значит **68925 - 2 · 5 = 68915**

последняя цифра **5**, значит **6891 - 2 · 5 = 6881**

последняя цифра **1**, значит **688 - 2 · 1 = 686**

последняя цифра **6**, значит **68 - 2 · 6 = 56**

**56** - делится на **7** значит **689255** делится на **7**.

# ✓ Признак делимости на 13

## • 1 способ:

Число делится на **13**, если знакопеременная сумма чисел, образованных тройками его цифр, взятыми с конца (последнее число со знаком **+**), делится на **13**.

Например: число **112567**.

первая группа со знаком «+» **567**, вторая со знаком «-» **112**. Отсюда  $567 - 112 = 455$ . Так как  $455 : 13 = 35$ , то **112567** делится на **13**.

## • 2 способ:

Нужно взять последнюю цифру числа, умножить ее на **4** и прибавить к «числу, оставшемуся без последней цифры». Если получившееся число делится на **13**, то и само число делится на **13**.

Например: число **112567**.

последняя цифра **7**, значит  $11256 + 7 \cdot 4 = 11284$

последняя цифра **4**, значит  $1128 + 4 \cdot 4 = 1144$

последняя цифра **4**, значит  $114 + 4 \cdot 4 = 130$

**130** делится на **13**, значит **112567** делится на **13**.

# ✓ Признак делимости на 17

## • 1 способ:

Число делится на 17 тогда и только тогда, когда число его десятков, сложенное с увеличенным в 12 раз числом единиц, кратно 17.

Например: число 29053

единиц 3, значит  $2905 + 12 \cdot 3 = 2941$

единиц 1, значит  $294 + 12 \cdot 1 = 306$

единиц 6, значит  $30 + 12 \cdot 6 = 102$

единиц 2, значит  $10 + 12 \cdot 2 = 34$

Так как 34 делится на 17, то и 29053 делится на 17).

## • 2 способ:

Нужно взять последнюю цифру числа, умножить ее на 5 и вычесть из «числа, оставшегося без последней цифры». Если получившееся число делится на 17, то и само число делится на 17.

Например: число 29053

последняя цифра 3, значит  $2905 - 5 \cdot 3 = 2890$

последняя цифра 0, значит  $289 - 5 \cdot 0 = 289$

последняя цифра 4, значит  $28 - 5 \cdot 9 = -17$

- 17 делится на 17, значит 29053 делится на 17.



## Признак делимости на 19

Нужно взять последнюю цифру числа, умножить ее на **2** и прибавить к «числу, оставшемуся без последней цифры». Если получившееся число делится на **19**, то и само число делится на **19**.

Например: число 106913.

последняя цифра **3**, значит  $10691 + 2 \cdot 3 = 10697$

последняя цифра **7**, значит  $1069 + 2 \cdot 7 = 1083$

последняя цифра **3**, значит  $108 + 2 \cdot 3 = 114$

последняя цифра **4**, значит  $11 + 2 \cdot 4 = 19$

**19** делится на **19**, значит **106913** делится на **19**.

## Признак делимости на 23

Число делится на **23** тогда и только тогда, когда число его сотен, сложенное с утроенным числом десятков и единиц, кратно **23**.

Например: число 28842

число состоящее из десятков и единиц **42**,

значит  $288 + 3 \cdot 42 = 414$

число состоящее из десятков и единиц **14**,

значит  $4 + 3 \cdot 14 = 46$ .

Так как **46** делится на **23**, то **28842** делится на **23**.