Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра теории функций и приближений

МЕТОД МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНИЦАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Панина Светлана Вадимовна
Группа 05-404

Метод моментов решения операторных уравнений

$$Kx = y,\ x \in X,\ y \in Y \qquad (1)$$

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(t) \qquad (2)$$

Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_1^n$ находим из условия

$$(Kx_n - y, \psi_j) = 0,\ \ j = \overline{1, n} \qquad (3)$$

Получаем СЛАУ

$$\int_a^b K \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(t) \psi_j(t) dt = \int_a^b y(t) \psi_j(t) dt \qquad (4)$$

Метод моментов решения интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$Kx \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s) \qquad (5)$$

$$x \in X,\ y \in X, \quad X = Y = L_2(-\pi,\pi).$$

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{iks} \qquad (6)$$

Получаем СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_{kj} c_k = \beta_j,\ j = \overline{-n,n} \qquad (7)$$

$$\alpha_{kj} = \int_{-\pi}^{\pi} K(e^{iks}; s)e^{-ijs}ds,$$

$$\beta_j = \int_{-\pi}^{\pi} y(s)e^{-ijs}ds. \tag{8}$$

Для погрешности приближенных решений справедливы оценки

$$||x^* - x_n^*||_{L_2} = O\{E_n^T(x^*)_2\}$$

$$||x^* - x_n^*||_{L_2} = O\{E_n^T(y)_2 + E_{n,s}^T(h)_2\}$$

$$||x^* - x_n^*||_C = O(n^{-r-\alpha+\frac{1}{2}})$$

$$||x^* - x_n^*||_C = O\{ln\ n[E_n^T(y)_C + E_{n,s}^T(h)_C]\}$$

Интегральное уравнение I-го рода с логарифмической особенностью в ядре

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s) \qquad (9)$$

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks} \qquad (10)$$

Получаем СЛАУ

$$\alpha_j c_j(g) + \sum_{k=-n}^{n} h_{jk}\alpha_k = c_j(y) \qquad (11)$$

$c_j\,(g) = \{ln2 \;\; при \;\; k = 0; \frac{1}{2|k|} \;\; при \;\; k \neq 0\}$

,

$$h_{jk} \;=\; c_j(\varphi_k), \varphi_k(s) \;=\; R(e^{ik\sigma}; s)$$

Справедливы оценки

$$||x^* - x_n^*||_2 = O\{E_n^T(x^*)_2\} = O\{E_n^T((Sx^*)')_2\}.$$

$$x \in X,\ y \in X,\ X = L_2,\ Y = W_2^1$$

$$||x^* - x_n^*||_2 = O\Big\{E_n^T(\frac{d}{ds}y)_2 + E_n^T(\frac{d}{ds}Rx^*)_2\Big\},$$

$$||x^* - x_n^*||_2 \le E_n^T(x^*)_2||E - A_n^{-1}\Phi_n R||,\ E - A_n^{-1}\Phi_n R : L_2 \to L_2,$$

$$||x^* - x_n^*||_2 \le 2E_n^T(x^*)_2||(S + \Phi_n R)^{-1}||,\ S + \Phi_n R : L_2 \to W_2^1$$

Метод моментов решения сингулярного интегродифференциального уравнения

$$Ax \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x'(\tau)}{t-\tau}d\tau + Q(x;t) = y(t), \ -1 < t < 1 \qquad (12)$$

$$x(-1) = x(1) = 0 \qquad (13)$$

Обозначим через X пространство непрерывно дифференцируемых на [-1,1] функций $x(t)$, удовлетворяющих условию (13).

В качестве пространства правых частей Y выберем пространство непрерывных функций $y(t)$.

Приближенное решение ищем в виде

$$x_n(t) = \sqrt{1-t^2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k U_{k-1}(t) = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k \sin k \arccos t \qquad (14)$$

Получаем СЛАУ

$$i\gamma_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\gamma_k = c_{i-1}^{U}(y),\ i = \overline{1,n}, \tag{15}$$

где $\beta_{ik} = c_{i-1}^{U}(Q(\sin k \arccos t, t_i)).$ (16)

Справедливы оценки

$$||x_n^* - x^*||_C = O\Big(\frac{ln\ n}{n^{r+\alpha}}\Big),$$

$$||\rho(x_n^{*\prime} - x^{*\prime})||_C = O\Big(\frac{ln\ n}{n^{r+\alpha}}\Big),\ 0 < \alpha \leq 1,\ r \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!