Знакочередующиеся и знакопеременные ряды.

Знакочередующиеся ряды

Ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два его соседних члена имеют разные знаки, то есть

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$$

$$a_n > 0$$

Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ **сходится**, а его сумма

не превосходит первого члена $S < a_1$

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)^2}$

$$-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{11^2}-\cdots$$

1. $\frac{1}{2^2} > \frac{1}{5^2} > \frac{1}{8^2} > \frac{1}{11^2} > \cdots$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $a_n = \frac{1}{(3n-1)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9n^2-6n+1} = 0$$

По признаку Лейбница ряд сходится

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

1. $$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}-\cdots$$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $$a_n=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

По признаку Лейбница ряд сходится

НО

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\alpha>1$	ряд сходится
$\alpha\le 1$	ряд расходится

ряд сходится условно

Пример 3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 5^k}$

$$-\frac{1}{5^1}+\frac{1}{2\cdot 5^2}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{4\cdot 5^4}-\cdots$$

1. $\frac{1}{5^1} > \frac{1}{2\cdot 5^2} > \frac{1}{3\cdot 5^3} > \frac{1}{4\cdot 5^4} > \cdots$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $a_k = \frac{1}{k \cdot 5^k}$

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k\cdot 5^k} = 0$ ***По признаку Лейбница ряд сходится***

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 5^k}$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя признак Даламбера

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)\cdot 5^{k+1}} : \frac{1}{k\cdot 5^k} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k\cdot 5^k}{(k+1)\cdot 5\cdot 5^k} = \frac{1}{5}\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{5} < 1$$

Положительный ряд сходится по признаку Даламбера

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 5^k}$ ***ряд сходится абсолютно***

Пример 4.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{если} |q| < 1$$

$$-\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4-\ldots$$

1. $$\frac{1}{3}>\left(\frac{2}{5}\right)^2>\left(\frac{3}{7}\right)^3>\left(\frac{4}{9}\right)^4>\ldots$$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $$a_k=\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k = 0$$

По признаку Лейбница ряд сходится

3. $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя радикальный признак Коши сходимости

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k} =$$

Положительный ряд сходится по радикальному признаку Коши

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$$

ряд сходится абсолютно

Знакопеременные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***знакопеременным***,

если любые его члены a_n могут быть как положительными так и отрицательными.

Достаточный признак сходимости

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Утверждение обратное достаточному признаку сходимости неверно

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

сходится по признаку Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится как гармонический ряд

Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Ряд называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится

Сходимость

абсолютная

члены быстро убывают

условная

положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$ Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

$\frac{|\cos n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$, так как $|\cos n| \le 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$ - сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$ ***ряд сходится абсолютно***

Пример 2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k}{3k-1}$

$$-\frac{2}{2}+\frac{4}{5}-\frac{6}{8}+\frac{8}{11}-\cdots$$

1. $\frac{2}{2}>\frac{4}{5}>\frac{6}{8}>\frac{8}{11}>\cdots$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $a_k=\frac{2k}{3k-1}$

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{3k-1}=\frac{2}{3}$$

По признаку Лейбница ряд расходится

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2^n}$

$$\frac{1}{2^1} - \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} - \frac{3^3}{3^4} - \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} : \frac{n^2}{2^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

Положительный ряд сходится по признаку Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2^n}$$ ***ряд сходится абсолютно***

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$

$$-\left(\frac{3}{8}\right)^1+\left(\frac{9}{17}\right)^2-\left(\frac{19}{32}\right)^3+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\frac{2}{3}<1$$

Положительный ряд сходится по признаку Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$$

ряд сходится абсолютно

Домашнее задание

1. Запишите общую формулу ряда. Используя признак Лейбница, исследуйте на сходимость ряд:

$a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots\ldots$

$b) 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \ldots\ldots$

2. Напишите ряд в развёрнутом виде. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3n}{4n+1} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot 3^n}$$