Знакочередующиеся и знакопеременные ряды.

Знакочередующиеся ряды

Ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два его соседних члена имеют разные знаки, то есть

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

$$a_n > 0$$

Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$ и

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ **сходится**, а его сумма

не превосходит первого члена $S < a_1$

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)^2}$$

$$-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{11^2}-\cdots$$

1. $$\frac{1}{2^2}>\frac{1}{5^2}>\frac{1}{8^2}>\frac{1}{11^2}>\cdots$$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $$a_n=\frac{1}{(3n-1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9n^2-6n+1}=0$$

По признаку Лейбница ряд сходится

Пример 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

1. $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}-\cdots$ Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $a_n=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

По признаку Лейбница ряд сходится

НО

Обобщенный гармонический ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}}$$

$\alpha>1$	ряд сходится
$\boxed{\alpha\le 1}$	ряд расходится

ряд сходится условно

Пример 3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 5^k}$

$$-\frac{1}{5^1}+\frac{1}{2\cdot 5^2}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{4\cdot 5^4}-\cdots$$

1. $$\frac{1}{5^1}>\frac{1}{2\cdot 5^2}>\frac{1}{3\cdot 5^3}>\frac{1}{4\cdot 5^4}>\cdots$$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $$a_k=\frac{1}{k\cdot 5^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k\cdot 5^k}=0$$

По признаку Лейбница ряд сходится

3. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 5^k}$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя признак Даламбера

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(k+1)\cdot 5^{k+1}}:\frac{1}{k\cdot 5^k}=$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k\cdot 5^k}{(k+1)\cdot 5\cdot 5^k}=\frac{1}{5}\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{5}<1$$

Положительный ряд сходится по признаку Даламбера

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\cdot 5^k}$$ ***ряд сходится абсолютно***

Пример 4. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = 0, если |q|\langle 1}$$

$$-\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4-\dots$$

1. $\frac{1}{3}>\left(\frac{2}{5}\right)^2>\left(\frac{3}{7}\right)^3>\left(\frac{4}{9}\right)^4>\dots$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $a_k=\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k=0$$

По признаку Лейбница ряд сходится

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя радикальный признак Коши сходимости

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k+1}=\frac{1}{2}<1$$

Положительный ряд сходится по радикальному признаку Коши

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$ ***ряд сходится абсолютно***

Знакопеременные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***знакопеременным***, если любые его члены a_n могут быть как положительными так и отрицательными.

Достаточный признак сходимости

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Утверждение обратное достаточному признаку сходимости неверно

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

сходится по признаку Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится как гармонический ряд

Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Ряд называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится

Сходимость

абсолютная

члены быстро убывают

условная

положительные и отрицательные слагаемые уничтожают друг друга

Пример 1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^3}$$ Сравним с рядом $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

$$\frac{|\cos n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$$, так как $|\cos n| \le 1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ - сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^3}$ - сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$ ***ряд сходится абсолютно***

Пример 2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k}{3k-1}$

$$-\frac{2}{2}+\frac{4}{5}-\frac{6}{8}+\frac{8}{11}-\cdots$$

1. $\frac{2}{2}>\frac{4}{5}>\frac{6}{8}>\frac{8}{11}>\cdots$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2.

$$a_k=\frac{2k}{3k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{3k-1}=\frac{2}{3}$$

По признаку Лейбница ряд расходится

Пример 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2^n}$

$$\frac{1}{2^1} - \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} - \frac{3^3}{3^4} - \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} : \frac{n^2}{2^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

Положительный ряд сходится по признаку Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2^n}$$ ***ряд сходится абсолютно***

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$

$$-\left(\frac{3}{8}\right)^1+\left(\frac{9}{17}\right)^2-\left(\frac{19}{32}\right)^3+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\frac{2}{3}<1$$

Положительный ряд сходится по признаку Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$$

ряд сходится абсолютно

Домашнее задание

1. Запишите общую формулу ряда. Используя признак Лейбница, исследуйте на сходимость ряд:

$$a)\,1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\quad .....$$

$$b)\,1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\quad .....$$

2. Напишите ряд в развёрнутом виде. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3n}{4n+1}\right)^{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n-1)\cdot 3^{n}}$$