

Знакопеременные и знакопеременные ряды.

Знакопередающиеся ряды

Ряд называется **знакопередающимся**, если любые два его соседних члена имеют разные знаки, то есть

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

ИЛИ

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

$$a_n > 0$$

Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$ и

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ **сходится**, а его

не превосходит первого члена $S < a_1$

Пример 1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)^2}$$

$$-\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{11^2} - \dots$$

1. $\frac{1}{2^2} > \frac{1}{5^2} > \frac{1}{8^2} > \frac{1}{11^2} > \dots$ Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2.
$$a_n = \frac{1}{(3n-1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9n^2 - 6n + 1} = 0$$

*По признаку Лейбница ряд **сходится***

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

1. $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} - \dots$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $a_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

По признаку Лейбница ряд *сходится*

НО

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\alpha > 1$ ряд сходится

$\alpha \leq 1$ ряд расходится

ряд сходится условно

Пример 3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 5^k}$$

$$-\frac{1}{5^1} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{4 \cdot 5^4} - \dots$$

1.
$$\frac{1}{5^1} > \frac{1}{2 \cdot 5^2} > \frac{1}{3 \cdot 5^3} > \frac{1}{4 \cdot 5^4} > \dots$$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2.
$$a_k = \frac{1}{k \cdot 5^k}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \cdot 5^k} = 0$$
 По признаку Лейбница ряд **сходится**

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 5^k}$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя признак Даламбера

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1) \cdot 5^{k+1}} : \frac{1}{k \cdot 5^k} =$$

Положительный ряд сходится по признаку Даламбера

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \cdot 5^k}{(k+1) \cdot 5 \cdot 5^k} = \frac{1}{5} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{5} < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot 5^k}$$
 ряд **сходится абсолютно**

Пример 4.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1$$

$$-\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 - \dots$$

1. $\frac{1}{3} > \left(\frac{2}{5}\right)^2 > \left(\frac{3}{7}\right)^3 > \left(\frac{4}{9}\right)^4 > \dots$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $a_k = \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k = 0$$

По признаку Лейбница ряд **сходится**

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя радикальный признак Коши СХОДИМОСТИ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{2k+1} \right)^k} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Положительный ряд сходится по радикальному признаку Коши

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$$

ряд сходится абсолютно

Знакопеременные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **знакопеременным**,

если любые его члены a_n могут быть как положительными так и отрицательными.

Достаточный признак сходимости

Если ряд, составленный из абсолютных величин

членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$

сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Утверждение обратное достаточному признаку сходимости неверно

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

сходится по признаку Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится как гармонический ряд

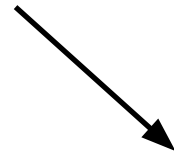
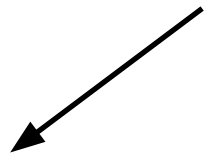
Ряд называется абсолютно сходящимся, если

сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Ряд называется условно сходящимся, если ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - расходится

Сходимость



абсолютная

условная

члены быстро убывают

положительные и
отрицательные
слагаемые
уничтожают друг
друга

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$$

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

$$\frac{|\cos n|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}, \text{ так как } |\cos n| \leq 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \text{СХОДИТСЯ} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^3} - \text{СХОДИТСЯ} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3} \text{ ряд } \textit{\textbf{сходится абсолютно}} \end{aligned}$$

Пример 2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{3k-1}$

$$-\frac{2}{2} + \frac{4}{5} - \frac{6}{8} + \frac{8}{11} - \dots$$

1. $\frac{2}{2} > \frac{4}{5} > \frac{6}{8} > \frac{8}{11} > \dots$

Все члены ряда убывают по абсолютной величине

2. $a_k = \frac{2k}{3k-1}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{3k-1} = \frac{2}{3}$$

По признаку Лейбница ряд **расходится**

Пример 3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^1} - \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} - \frac{3^3}{3^4} - \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^2}{2^n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

Положительный ряд сходится по признаку Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{2^n}$$

ряд сходится абсолютно

Пример 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$

$$-\left(\frac{3}{8}\right)^1 + \left(\frac{9}{17}\right)^2 - \left(\frac{19}{32}\right)^3 +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$$

Рассмотрим ходимость положительного ряда, используя радикальный признак Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} = \frac{2}{3} < 1$$

Положительный ряд сходится по признаку Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$$

ряд сходится абсолютно

Домашнее задание

1. Запишите общую формулу ряда. Используя признак Лейбница, исследуйте на сходимость ряд:

$$a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

$$b) 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \dots$$

2. Напишите ряд в развёрнутом виде. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3n}{4n+1} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot 3^n}$$