Эксперимент и его обработка на олимпиаде

Черников Юрий Александрович,
Центр педагогического мастерства

Что такое практический тур?

- 2 экспериментальных задачи
- Длительность 2 часа 30 минут каждая
- Варианты заданий:
  - Измерить величину
  - Снять и объяснить зависимость
  - Разгадать ЧЯ(«черный ящик»)
- Важно оформление работы

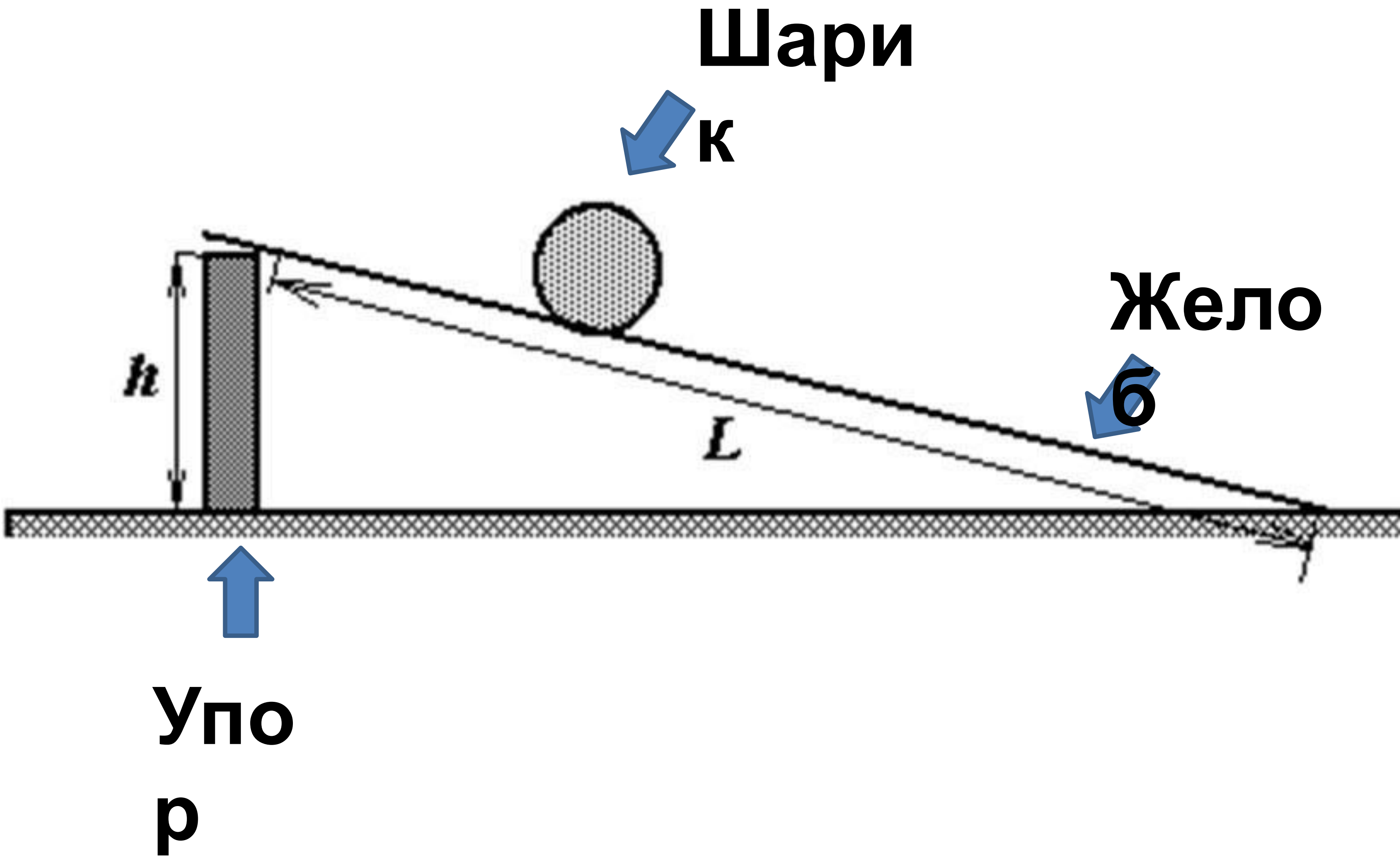
Схема решения

- Описание метода измерения и схема установки
- Теоретическое описание
- Таблица измеренных величин
- Оценка погрешностей!
- Представление конечного результата
- Ответы на поставленные вопросы
- Ничего большего!

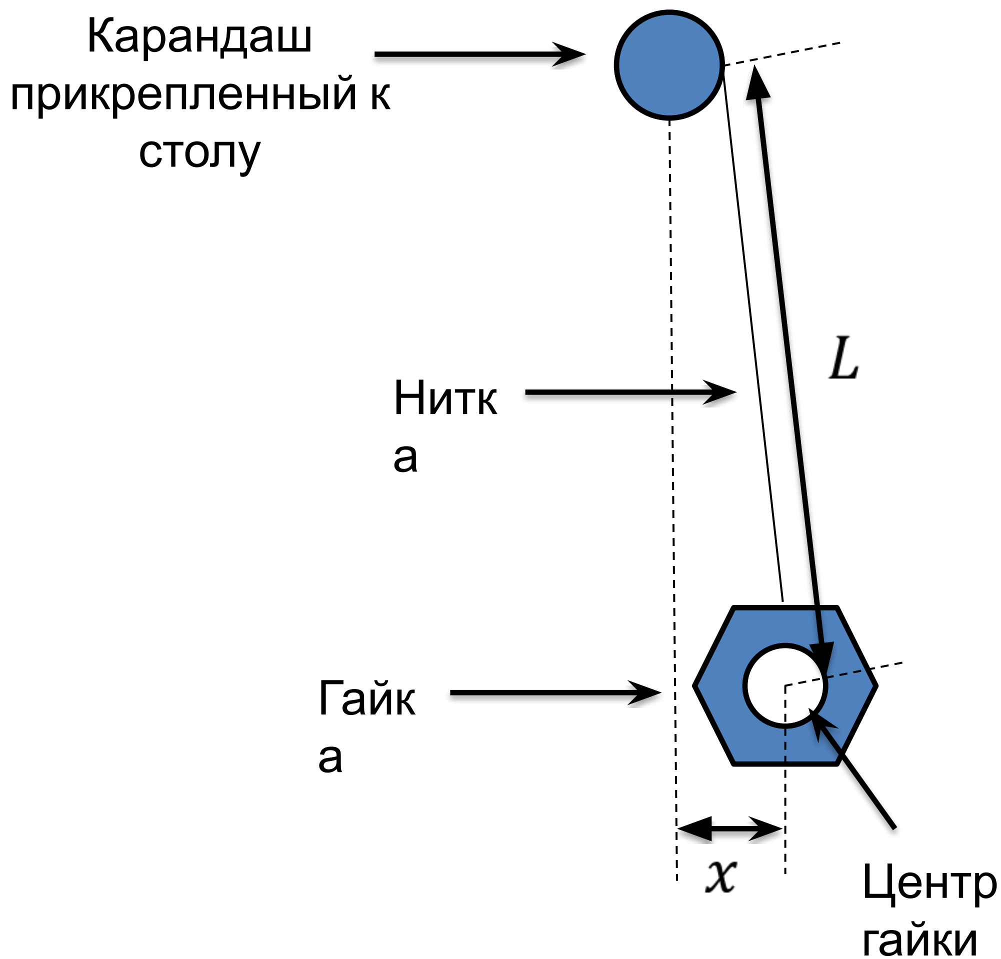
Описание установки

- Понятная схема VS Много слов

Пример схемы установки



Еще пример



Описание метода измерений и теоретическое обоснование

- Строгая инструкция выполнения
- Акцент на оригинальных моментах (позволяющих повысить точность)
- Подписи в теоретических выкладках
- Акцент на расчетные формулы
- Почему именно этот метод ? (если возможны варианты)

Измеренные величины

- Измерения: прямые и косвенные
- Одиночные данные записываются отдельно
- Если измеренные величины имеют повторяемый характер, то они вносятся в таблицу
- Результаты косвенных измерений также записываются
- Измерения пишутся сразу в чистовик
- Эксперимент проводится многократно для установления воспроизводимости результата

Измеренные величины

Зависимость времени скатывания шарика от длины желоба

при одинаковом угле наклона желоба

L , см	10	20	30	40	50	60
t, c	1.12	1.32	2.44	2.38	2.75	3.15
	1.34	1.38	1.94	2.56	2.93	3.80
	1.10	1.44	2.10	2.41	3.08	3.21
	1.12	1.42	1.91	2.37	2.93	3.08
	0.98	1.35	2.13	2.39	3.05	3.28
	1.12	1.38	2.15	2.42	2.91	3.20
	1.21	1.40	1.95	2.29	2.86	3.20
	1.05	1.52	2.12	2.34	2.92	3.21
	1.30	1.62	2.14	2.32	3.03	3.19
$\langle t \rangle$, c	1.15	1.43	2.09	2.39	2.94	3.26
Δt, c	0.23	0.19	0.34	0.15	0.20	0.42
$\langle t \rangle^2$, c	1.32	2.04	4.37	5.71	8.64	10.63
Δt^2, c	0.53	0.54	1.42	0.72	1.18	2.74

ΔL=0.2см

Отдельные величины

Серия экспериментов

Косвенные измерени

Погрешности экспериментальных чисел

- Экспериментальное число:

$a = < a > \pm \sigma_a$ $\qquad \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{<a>}$

$< a >$ - среднее значение

σ_a - абсолютная погрешность ε_a - относительная погрешность

- Типы погрешностей прямых измерений:
  - Приборная $\sigma_{\text{пр}}$:
    - 0.5 цены деления $-$ стрел. Приборы
    - 1 последнего разряда – цифровые приборы
  - Постановки эксперимента: $\sigma_{\text{эксп}}$
    - Оценивается экспериментатором
- Все погрешности складываются $\sigma_{\text{общ}} = \sigma_{\text{пр}} + \sigma_{\text{эксп}}$

Пример оценки погрешности постановки эксперимента

55.3		0.5	
56.6		0.8	
55.7	55.8	0.1	0.5
56.2		0.4	
55.2		0.6	

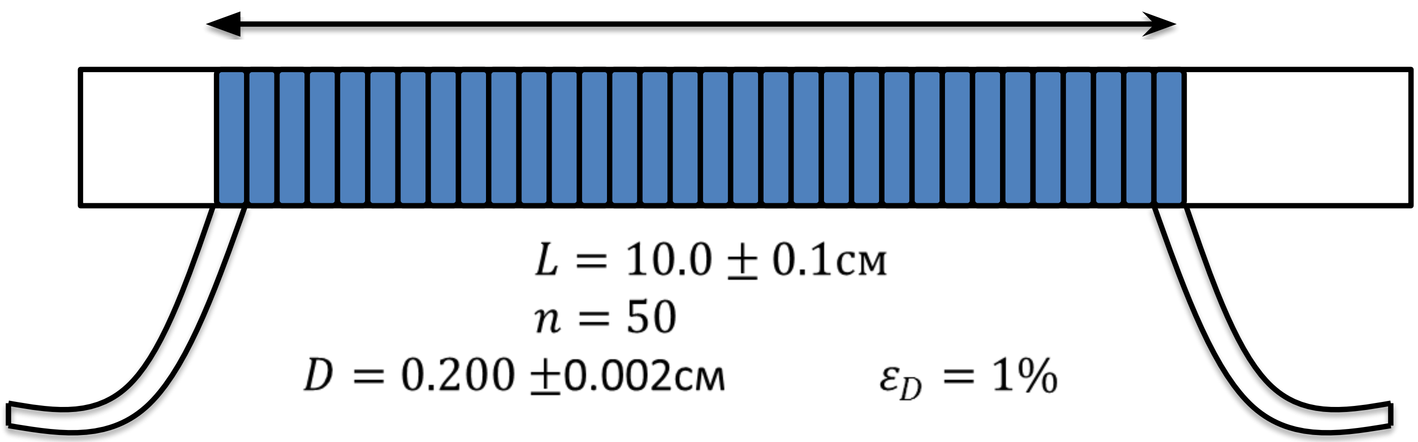
$$<\boldsymbol{T}>=\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}}\frac{\boldsymbol{T_i}}{\boldsymbol{N}}=55.8 \qquad \boldsymbol{\sigma_T}=\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{N}}\frac{|\boldsymbol{T_i}-<\boldsymbol{T}>|}{\boldsymbol{N}}=0.5$$

- Для достижения наибольшей точности в эксперименте, необходимо: $\sigma_{\text{эксп}} << \sigma_{\text{пр}}$
- Все погрешности в работе должны быть обоснованы

Метод рядов

- Для того, чтобы уменьшить погрешность конечного результата, необходимо измерить сумму нескольких значений этой величины:

$$L = nD$$



$$L = 10.0 \pm 0.1\text{см}$$

$$n = 50$$

$$D = 0.200 \pm 0.002\text{см} \qquad \varepsilon_D = 1\%$$

Если измерить напрямую:

$$D' = 0.2 \pm 0.1\text{см} \qquad \varepsilon_{D'} = 50\%$$

- Аналогично при измерении периода колебаний системы и т.д.

Расчет погрешности суммы и разности

- Пусть дано:

$$a = < a > \pm \sigma_a \qquad \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{<a>}$$

$$b = < b > \pm \sigma_b \qquad \varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{<b>}$$

- Вычисляем величину $c = a + b$ по правилам:

$$\left.\begin{aligned} &< c > = < a > + < b > \\ &\sigma_c = \sigma_a + \sigma_b \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{< c >}$$

- Вычисляем величину $\mathrm{d} = a - b$ по правилам:

$$\left.\begin{aligned} &< d > = < a > - < b > \\ &\sigma_c = \sigma_a + \sigma_b \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{< c >}$$

Расчет погрешностей произведения и отношения

- Вычисляем величину $f = a * b$ по правилам:

$$\left.\begin{aligned} < f > &= < a > * < b > \\ \varepsilon_f &= \varepsilon_a + \varepsilon_b \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \sigma_f = < f > \varepsilon_f$$

- Вычисляем величину $g = a/b$ по правилам:

$$\left.\begin{aligned} < g > &= < a > / < b > \\ \varepsilon_g &= \varepsilon_a + \varepsilon_b \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \sigma_g = < g > \varepsilon_g$$

- В сложении или вычитании: сначала среднее значение и абсолютную погрешность, потом относительную
- В произведении или делении: сначала среднее значение и относительную погрешность, потом абсолютную

Дополнительные правила

- Вычислим величину $f_1 = Const * a$, где $Const$ – константа, или $\varepsilon_{const}, \sigma_{const} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &< f_1 > = Const * < a > \\ &\varepsilon_{f_1} = \varepsilon_a \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \sigma_{f_1} = Const * \sigma_a$$

- Вычислим величину $f_2 = a^n$, где n – константа

$$\left.\begin{aligned} &< f_2 > = < a >^n \\ &\varepsilon_{f_2} = n\varepsilon_a \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \sigma_{f_2} = < f_2 > \varepsilon_a$$

- Если погрешность одной величины существенно меньше другой, то возможно пренебрежение:
  - Если $\sigma_a \gg \sigma_b, \sigma_c = \sigma_a + \sigma_b \approx \sigma_a$
  - Аналогично для относительных погрешностей

Пример расчета погрешностей

- Пусть дано:

$a = (10 \pm 1)\text{см} \qquad \varepsilon_a = 10\%$

$b = (20 \pm 2)\text{см} \qquad \varepsilon_b = 10\%$

$\text{c} = (15 \pm 1)\text{см} \qquad \varepsilon_{\text{c}} = 6\%$

- Необходимо вычислить:

$$T = \frac{10(a+b)}{c}$$

Тогда: $x = a + b \quad y = 10x \quad T = \frac{y}{c}$

Пример расчета погрешностей

- $< x >=< a >+< b >= 10 + 20 = 30$см
- $\sigma_x = \sigma_a + \sigma_b = 1+2=3$см
- $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{<x>} = \frac{3}{30} = 10\%$
- $< y >= 10 < x >= 10 * 30 = 300$см
- $\varepsilon_y = \varepsilon_x = 10\%$
- $< T >= \frac{<y>}{<c>} = \frac{300}{15} = 20$
- $\varepsilon_T = \varepsilon_y + \varepsilon_c = 10\% + 6\% = 16\%$
- $\sigma_T = \varepsilon_T * < T > = 20 * 16\% = 3.2$
- $\underline{T = (2.0 \pm 0.3) * 10}$

Другие методы расчета

- Пусть $y = f(x_1 \dots x_n)$ и $x_i = < x_i > \pm \sigma_{x_i}$, чему равно σ_y?
- Часто бывает удобно использовать метод границ:
  - Находим f_{min} и f_{max} на области погрешности всех x_i, и $\sigma_y = {(f_{max} - f_{min})}/{2}$
- Или использовать метод частной производной:

$$\sigma_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \sigma_{x_i}$$

Пример расчета другими методами

- Метод границ:

$$T_{max} = \frac{10(a_{max}+b_{max})}{c_{min}} = \frac{10(11+22)}{14} = 23.6$$

$$T_{min} = \frac{10(a_{min}+b_{min})}{c_{max}} = \frac{10(9+18)}{16} = 16.9$$

$$\sigma_T = \frac{(T_{max}-T_{min})}{2} \approx 3$$

- Метод расчета из частной производной:

$$\sigma_T = \frac{10}{< c >}\sigma_a + \frac{10}{< c >}\sigma_b + \frac{10(< a >+< b >)}{< c >^2}\sigma_c =$$

$$= \frac{10}{15}1 + \frac{10}{15}2 + \frac{10(10+20)}{15^2}1 \approx 3$$

Оформление расчета погрешностей

- Погрешности прямых измерений должны быть объяснены
- Все формулы расчета погрешностей косвенных измерений должны быть указаны
- Пренебрежения погрешностями некоторых величин (если присутствуют) должны быть указаны
- Считать погрешности можно приближенно
- Погрешность погрешности $\approx 30\%$

Правила построения графика

- y(x), y – вертикальная координата, x – горизонтальная
- Ориентация миллиметровки либо книжная, либо альбомная
- Отступ для осей 1-2см от края миллиметровки
- Занять максимальное место на миллиметровке
- Удобный, читаемый масштаб $(1\text{кл} = 1{,}2{,}4{,}5 * 10^{n}\text{ед. измерения оси})$
- Оси могут пересекаться не в точке (0,0)
- Оси подписаны, подписана размерность
- От 4 до 10 подписанных цифр на оси
- Кресты ошибок. Не должно быть точек на оси
- Подпись графика и легенда

Пример построения графика

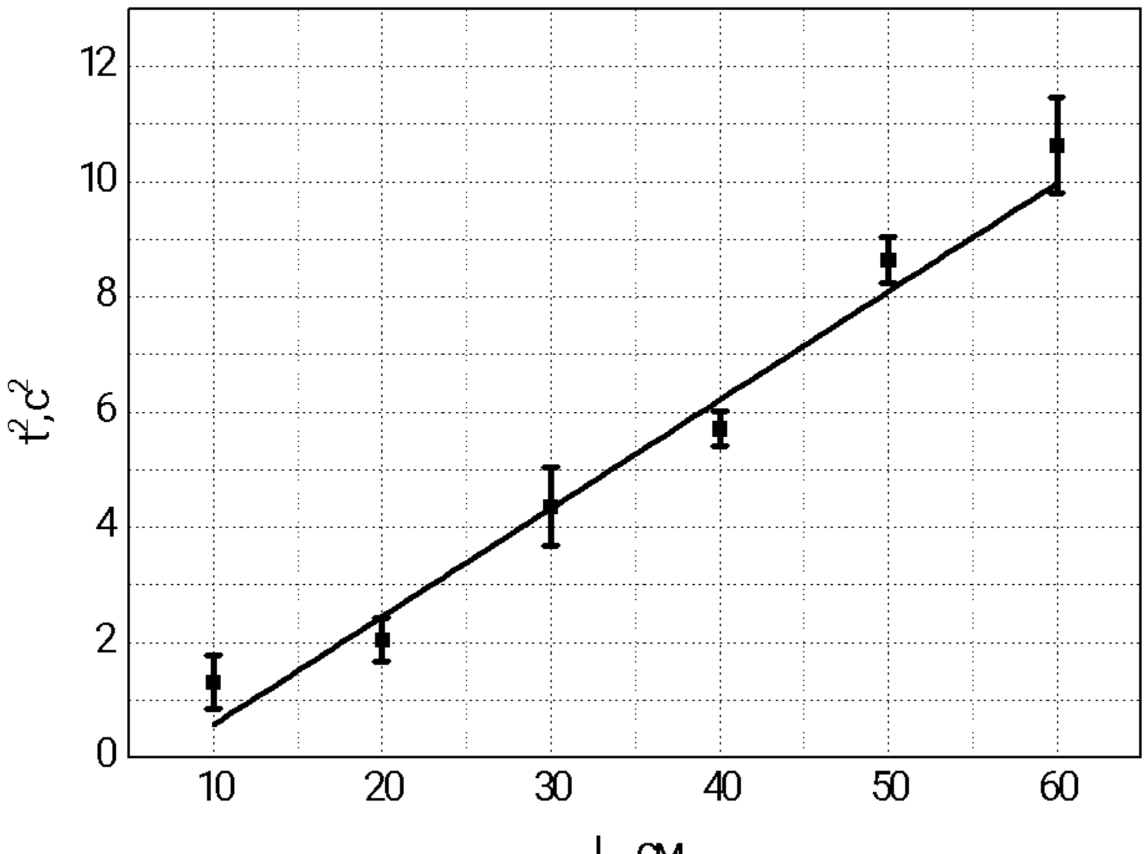
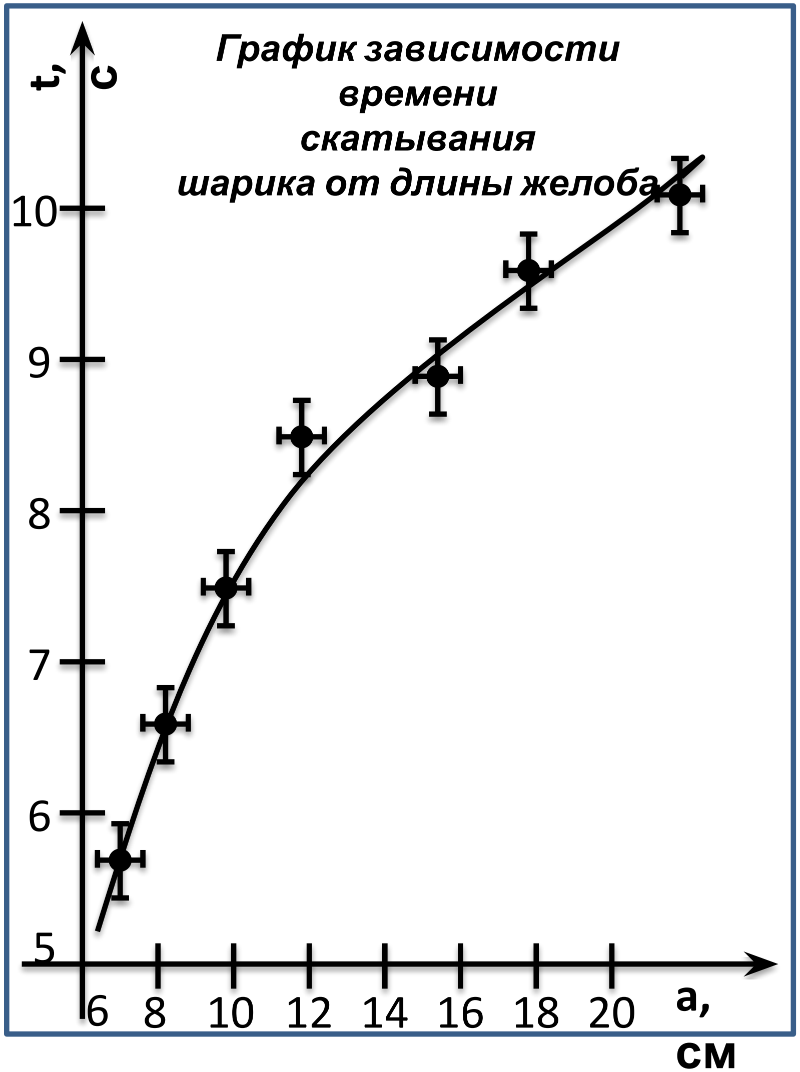
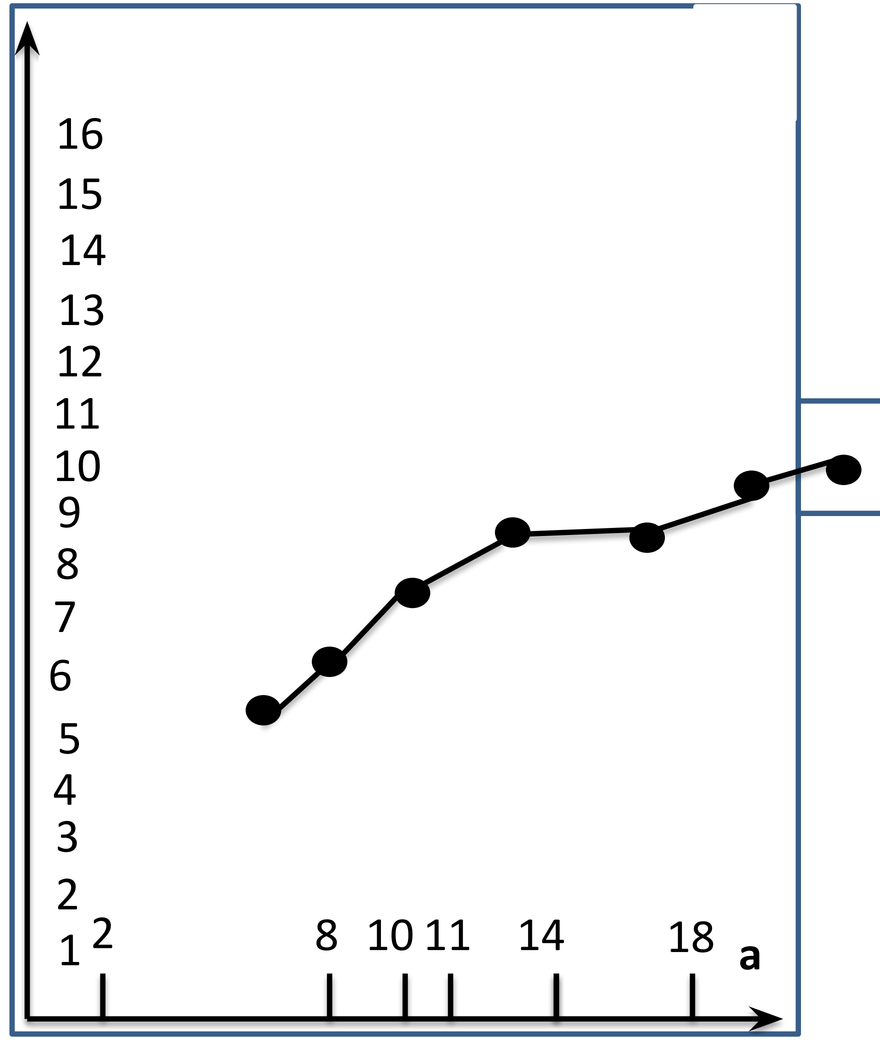


График зависимости квадрата времени скатывания шарика от длины желоба

Примеры правильного и неправильного графика





Аппроксимация экспериментальных значений

- Аппроксимация – подбор коэффициентов математической зависимости, приближенно описывающей экспериментальные значения.
- Наиболее простая математическая зависимость – линейная: $y=kx+b$
- k – угол наклона прямой на графике
- b – смещение графика

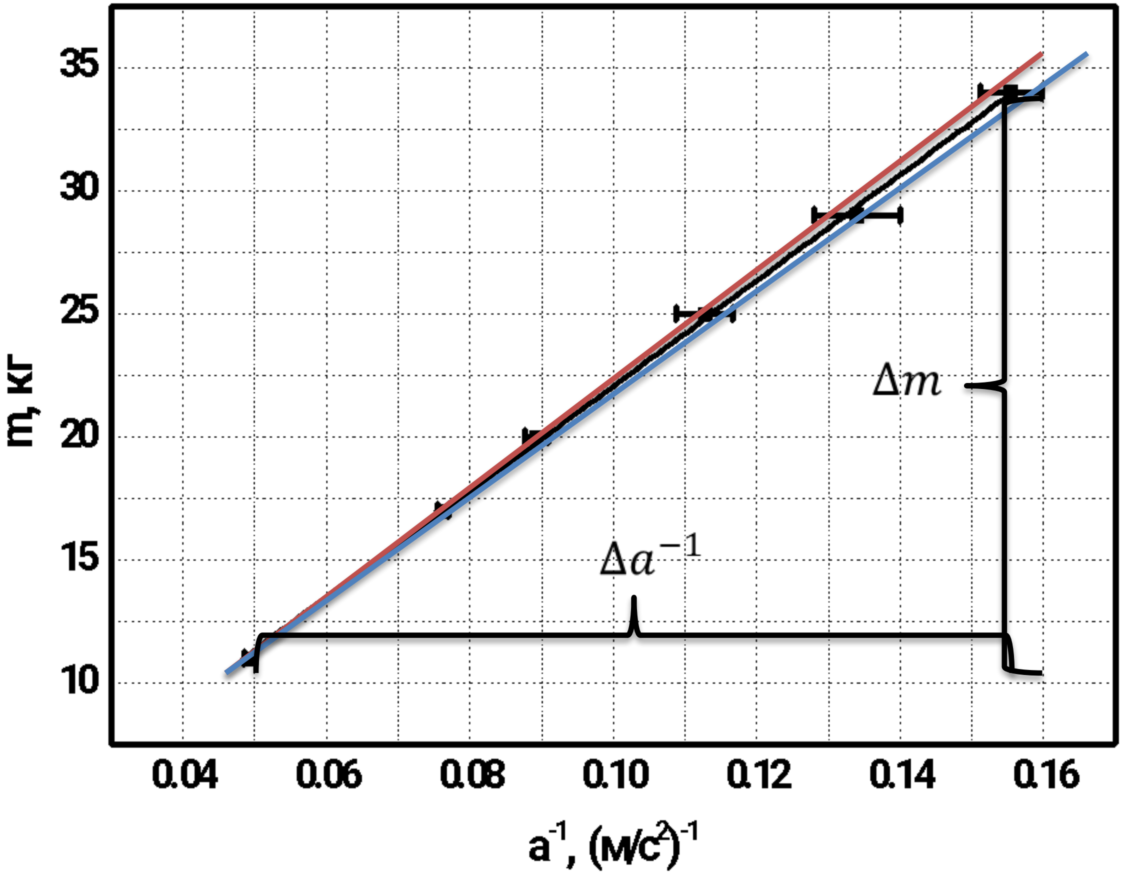
Аппроксимация экспериментальных значений

- Есть много математических методов аппроксимации, но они требуют времени в расчетах $\rightarrow$ наш метод - на глаз
- Находим максимальные и минимальные возможные параметры зависимости:

$$k_{min} \text{ и } k_{max} \rightarrow \ \sigma_k = \frac{k_{max} - k_{min}}{2}$$

$$b_{min} \text{ и } b_{max} \rightarrow \ \sigma_b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$$

Пример аппроксимации линейной зависимостью



В предположении F=ma, найдите F?

Строим график m(1/a), теоретически точки должны лечь на прямую с угловым коэффициентом $F = \frac{\Delta m}{\Delta a^{-1}}$.

Находим:

$$F_{min} = \frac{34\text{кг}}{0.117\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)^{-1}} = 290.6\text{Н}$$

$$F_{max} = \frac{36\text{кг}}{0.117\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)^{-1}} = 307.7\text{Н}$$

$$< F >= \frac{F_{min}+F_{max}}{2} = 299.2H \qquad \sigma_F = \frac{F_{max}-F_{min}}{2} = 8.5H \qquad \underline{F = (2.99 \pm 0.09) * 10^2 H}$$

Линеаризация зависимостей

- Если теоретическая зависимость нелинейная, то подбор коэффициентов на взгляд неочевиден.
- Для упрощения подбора коэффициентов зависимость приводится к линейному виду, заменой переменных.
- График строится в новых переменных
- Точки должны лечь на прямую
- Производится аппроксимация линейной зависимостью
- В линейной зависимости можно найти только 2 коэффициента

Пример линеаризации зависимости

- Пусть $y = \frac{Ax}{B+x}, A$ и B $-$ неизвестны
- Преобразуем зависимость:

$$\frac{x}{y} = \frac{B}{A} + \frac{x}{A}$$

- Заменим переменные:

$y' = \frac{x}{y}$ $x' = x$

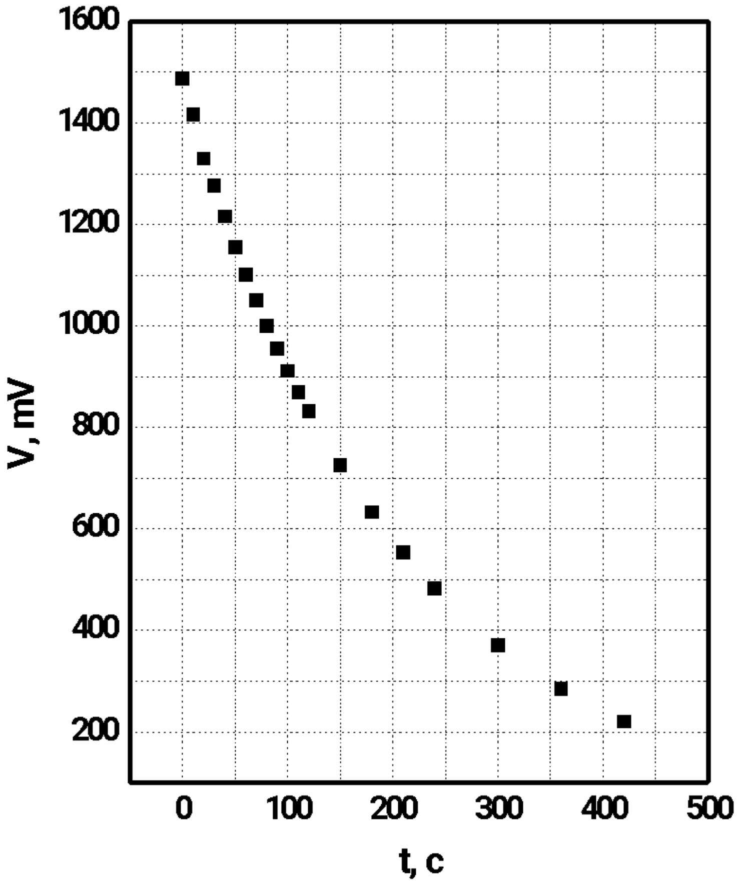
- Тогда: $y' = \frac{B}{A} + \frac{x'}{A}$ - линейная
- Из графика $y'(x')$ найдем угловой коэффициент, равный $\frac{1}{A}$. Из него рассчитаем A.
- Найдем смещение, равное $\frac{B}{A}$. Из уже рассчитанного A и смещения рассчитаем B.

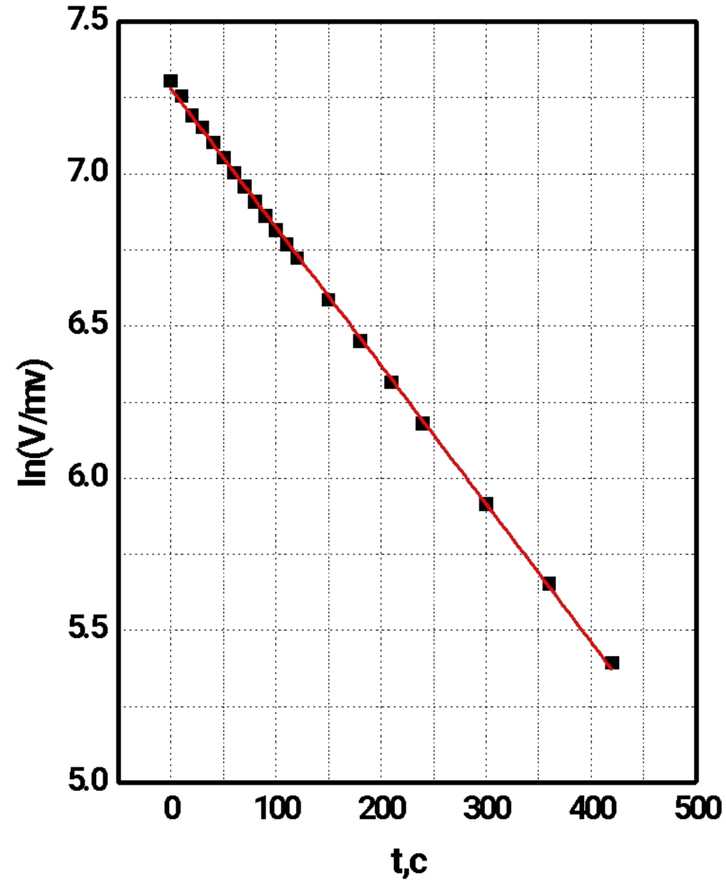
Наиболее частые зависимости и их линеаризация

Зависимость	1ая новая переменна я	2ая новая переменна я	Линеаризованная зависимость	Угловой коэффициент	Смещение

Перестроение зависимости в других переменных

В предположении $V = V_0 \exp(-\beta t)$, строим график $Ln(V)$ от t





Полученные результаты и выводы

- Вспомнить, а что же требовалось в условии?
- Представить полученные результаты
- Ответить на все поставленные в задаче вопросы

Представление конечного результата

- Желательно аппроксимировать точки теоретической зависимостью и найти все коэффициенты зависимости
- Оценить погрешности
- Представить конечные ответы в нормальном или нормализированном виде:

$$x = (1{,}006 \pm 0{,}002) * 10^3 \text{слона}$$

$$y = (0{,}500 \pm 0{,}012) * \frac{10^{-1}\text{пальцев}}{\text{месяц}}$$

- Записать относительную погрешность результатов

Как записать конечный ответ

- Все цифры числа, идя слева, начиная с первой отличной от 0 – значащие (З.Ц):

Пример: 0.056850, 12, 354, 100

- Абсолютная погрешность округляется до одной З.Ц., если 1ая З.Ц.>1: 0.0534→0.05
- Абсолютная погрешность округляется до двух З.Ц., если 1ая З.Ц.=1: 124.05 →120 →12*10
- Верные значащие цифры (В.З.Ц) числа – цифры, порядок которых $\geq$ порядку последней З.Ц. абсолютной погрешности
- Среднее значение округляется до верных значащих цифр

Пример

- $a=10.035\pm0.0335$
- $\sigma_a = 0.0\underline{3}35 \approx 0.0\underline{3}$ $\qquad <a>=10.0\underline{3}5 \approx 10.0\underline{4}$
- $\underline{a=10.04\pm0.03}$

- $b=234.997\pm0.1454$
- $\sigma_b = 0.\underline{1}454 \approx 0.\underline{15}$ $\qquad <b>=234.9\underline{9}7 \approx 235.00$
- $\underline{b=235.00\pm0.15}$

Нормальная и нормализованная форма записи

- Нормальная: 1ая З.Ц. среднего значения ставится в порядок единиц:

a=$\underline{1}$0.04±0.03=($\underline{1}$.004±0.003)*$\underline{10}$

- Нормализованная: 1ая З.Ц. среднего значения ставится в порядок десятых:

b=$\underline{2}$35.00±0.15=(0.$\underline{2}$3500±0.00015)*$\underline{10^3}$

- В конечном итоге: знаем порядок и верные значащие цифры

Распределение времени на экспериментальном туре

1	Разобраться с оборудованием, проверить наличие	3мин
2	Придумать модель описания явления	5-10мин
3	Пробный эксперимент	5мин
4	Вывод теоретического описания	20мин
5	Подготовить таблицу измерений	2мин
6	Проведение измерений	45 мин
7	Обработка данных	30 мин
8	Оформление описания метода и теоретического описания	15 мин
9	Оценка погрешностей	10мин
10	Резервное время	10-20мин

Разбалловка

- Задачи оцениваются из 15ти баллов;
- Примерное распределение:

1	Описание метода	3-4 балла
2	Описание приемов, увеличивающих точность	1-2 балла
3	Результаты измерений (таблица)	3 балла
4	Многократность измерений	1-2 балла
5	Построение и оформление графиков	2 балла
6	Нахождение искомой величины или зависимости (попадание в «ворота»)	2-4 балла
7	Оценка погрешностей	1-2 балла

Тренировка записи экспериментальных чисел

- Запишите экспериментальные числа в нормальном или нормализованном виде:

$A=99.9\pm3.1$ Руб

$B=25.0007\pm0.154$ Руб

$C=1000.007*10^3\pm1000.007*10^1$ $м^2$

- Ответы:

$A=(1.00\pm0.03)*10^2$ Руб

$B=(0.2500\pm0.0015)*10^2$ Руб

$C=(1.00\pm0.01)*10^6$ $м^2$

Тренировка расчета погрешностей

- Рассчитайте значения формул используя данные из предыдущего задания:

$D=4B$ $E=A+4B$

$F=C^{0.5}$ $X=C^{0.5}*(A+5B)$

- Ответы:

$D=(1.000\pm0.005)*10^2$ Руб

$E=(2.00\pm0.04)*10^2$ Руб

$F=(1.000\pm0.005)*10^3$ м

$X=(2.00\pm0.05)*10^5$ Руб*м

Тренировка линеаризации зависимостей

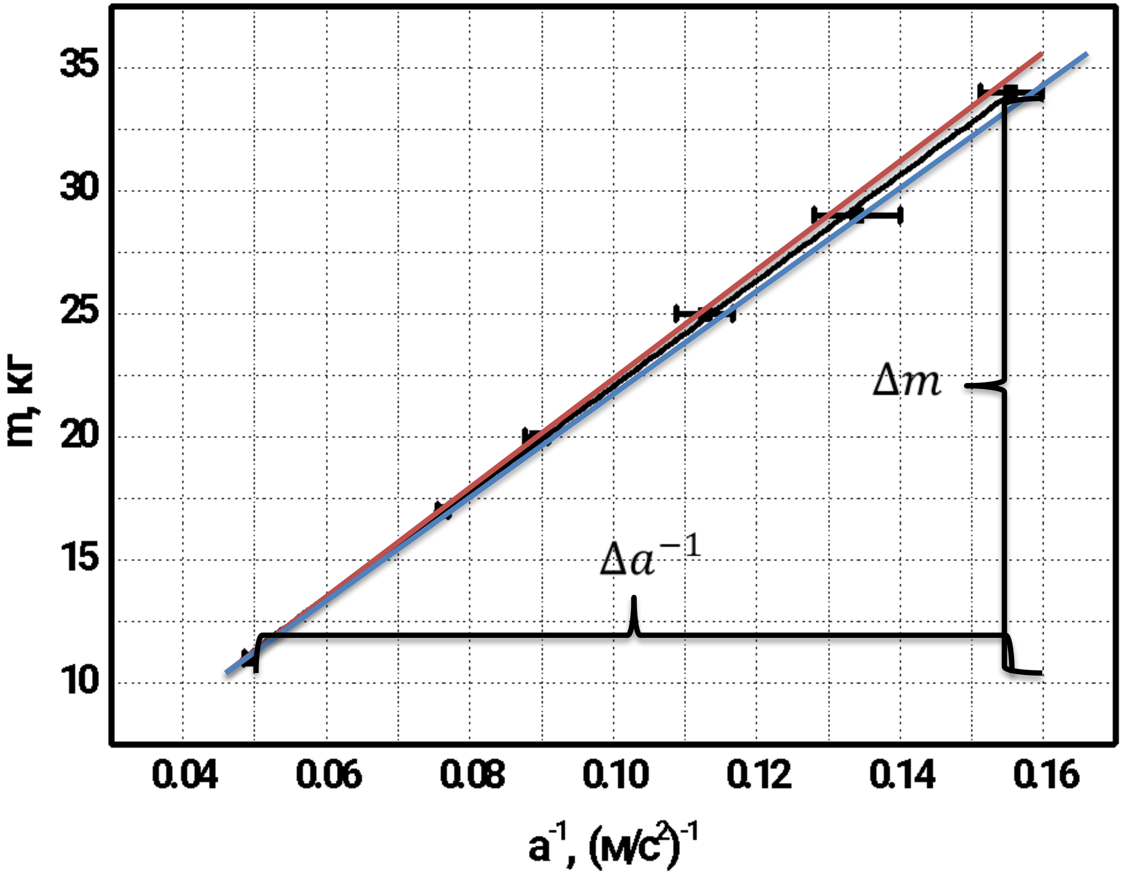
Зависимость	1ая новая переменная	2ая новая переменная	Линеариз. зависимость	Угловой коэфф.	Смещен.

Тренировка обработки таблицы и построения графика

- Несколько тел (масса тел известна точно) под действием одинаковой силы двигаются с разными ускорениями, которые измерены в сериях экспериментов. Рассчитайте среднее значение a для каждого эксперимента. Оцените случайную погрешность a. Постройте график зависимости $m(1/a_{ср})$. Какая сила действует на тела?

m, г	a1 , м/с^2	a2, м/с^2	a3, м/с^2	$a_{ср}$, м/с^2	$\Delta_{сл}a$, м/с^2	1/ $a_{ср}$, (м/с^2)$^{-1}$	Δ(1/ $a_{ср}$), (м/с^2)$^{-1}$
20	11.2	11.5	10.9	11.2	0.2	0.089	0.0016
34	6.4	6.7	6.2	6.43	0.18	0.155	0.0043
17	13.3	12.9	13.1	13.1	0.13	0.076	0.0008
11	20.2	19.9	20.7	20.3	0.29	0.049	0.0007
29	7.1	7.7	7.4	7.4	0.2	0.135	0.0037
25	8.4	8.9	9.3	8.87	0.31	0.113	0.0040

Тренировка расчет углового коэффициента



В предположении F=ma, найдите F?

Строим график m(1/a), теоретически точки должны лечь на прямую с угловым коэффициентом $F = \frac{\Delta m}{\Delta a^{-1}}$.

Находим:

$$F_{min} = \frac{34\text{кг}}{0.117(\frac{\text{м}}{\text{с}^2})^{-1}} = 290.6\text{Н}$$

$$F_{max} = \frac{36\text{кг}}{0.117(\frac{\text{м}}{\text{с}^2})^{-1}} = 307.7\text{Н}$$

$$< F >= \frac{F_{min}+F_{max}}{2} = 299.2H \qquad \sigma_F = \frac{F_{max}-F_{min}}{2} = 8.5H \qquad F = (2.99 \pm 0.09) * 10^2 H$$

Спасибо за внимание!