

Лекция 3.9. Степенные ряды.

Теорема (формула Коши-Адамара):

1) если $\sqrt[n]{|a_n|}$ – неограничена, то радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $R = 0$.

2) если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то $R = +\infty$.

3) если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$
 $\in (0, +\infty)$, то R
– радиус сходимости степенного

ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема:

Пусть для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $R > 0$. Тогда:

$$1) \forall r \in (0; R) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow S(x) \text{ на } [-r, r];$$

$$2) S(x) \in C(-R, R);$$

$$3) \forall x_0, x \in (-R, R) \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x a_n t^n dt = \int_{x_0}^x S(t) dt;$$

$$4) S(x) \in C^{\infty}(-R, R).$$

Теорема (ряд Тейлора):

Пусть для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $R > 0$,

и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ для $\forall x \in (-R, R)$.

$$\text{Тогда } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Определение:

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ называется
рядом Тейлора функции $f(x)$.

Замечание:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x) \implies a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Теорема (Абеля):

Пусть для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $R > 0$ и
пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится.
Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C(-R, R]$.

Замечание:

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Определение:

Если $\exists \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$, то сопоставление

числовому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ числа A называется

методом суммирования по Абелю.

Пример:

Возьмём ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

Лекция 3.9. Бесконечные произведения

Определение:

Пара последовательностей $\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_k = \prod_{n=1}^k u_n\}_{k=1}^{\infty} \right)$

называется бесконечным произведением и обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_k \neq 0$, то бесконечное произведение называется сходящимся.

Если $\nexists \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_k$, то бесконечное произведение называется расходящимся.

Если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_k = 0$, то бесконечное произведение называется расходящимся к 0.

Утверждение:

Если среди членов $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ встречается бесконечно много отрицательных членов, то $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ не является сходящимся.

Поэтому далее без ограничения общности полагаем

$$u_n \geq 0 \quad \forall n.$$

Если среди u_n есть 0, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_k = 0$, поэтому полагаем

$$u_n > 0 \quad \forall n.$$

Теорема:

Если $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Далее вместо $u_n = 1 + a_n, a_n > -1$.

Теорема:

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ сходится

\Leftrightarrow сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$.

Определение:

$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся,

если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln u_n|$.

Если $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, но не абсолютно, то оно называется условно сходящимся.

Теорема:

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ абсолютно сходится \Leftrightarrow сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.