Лекция 3.9. **Степенные ряды.**

Теорема (формула Коши-Адамара):

1) если $\sqrt[n]{|a_n|}$ – неограничена, то радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $R = 0$.

2) если $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то $R = +\infty$.

3) если $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \in (0, +\infty)$, то R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема:

Пусть для $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $R > 0$. Тогда:

1) $\forall r \in (0; R)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows S(x)$ на $[-r, r]$;

2) $S(x) \in C(-R, R)$;

3) $\forall x_0, x \in (-R, R)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_n t^n dt = \int\limits_{x_0}^{x} S(t) dt$;

4) $S(x) \in C^{\infty}(-R, R)$.

Теорема (ряд Тейлора):

Пусть для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad R > 0,$

и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ для $\forall x \in (-R, R)$.

Тогда $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

<u>Определение:</u>

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ называется рядом Тейлора функции $f(x)$.

<u>Замечание:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x) \Longrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

<u>Теорема (Абеля):</u>

Пусть для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $R > 0$ и

пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится.

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C(-R, R]$.

<u>Замечание:</u>

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

<u>Определение:</u>

Если $\exists \lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$, то сопоставление числовому ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ числа A называется методом суммирования по Абелю.

Пример:

Возьмём ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

Лекция 3.9. ***Бесконечные произведения***

Определение:

Пара последовательностей $\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_k = \prod_{n=1}^{k} u_n\}_{k=1}^{\infty}\right)$ называется бесконечным произведением и обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k \neq 0$, то бесконечное произведение называется сходящимся.

Если $\nexists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k$, то бесконечное произведение называется расходящимся.

Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k = 0$, то бесконечное произведение называется расходящимся к 0.

Утверждение:

Если среди членов $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ встречается бесконечно много отрицательных членов, то $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ не является сходящимся.

Поэтому далее без ограничения общности полагаем

$$u_n \geq 0 \ \ \forall n.$$

Если среди u_n есть 0, то $\lim_{k\to\infty} \Pi_k = 0$, поэтому полагаем

$$u_n > 0 \ \ \forall n.$$

Теорема:

Если $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Далее вместо $u_n = 1 + a_n, a_n > -1.$

Теорема:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) \text{ сходится}$$

$$\Leftrightarrow \text{ сходится ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n).$$

Определение:

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n \text{ называется абсолютно сходящимся,}$$

$$\text{если сходится ряд } \sum_{n=1}^{\infty} |\ln u_n| \,.$$

$$\text{Если } \prod_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится, но не абсолютно, то}$$

оно называется условно сходящимся.

Теорема:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ абсолютно сходится } \Leftrightarrow \text{ сходится ряд } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \,.$$