

Алгоритмы растеризации

- **Растреризация** — это перевод изображения, описанного векторным форматом в пиксели или точки, для вывода на дисплей или принтер.
- Простейшие растровые алгоритмы:
 - переводение идеального объекта (отрезка, окружности и др.) в их растровые образы;
 - обработка растровых изображений.

Понятие связности

Определение связной области:

Множество пикселей, у каждого пикселя которого есть хотя бы один сосед, принадлежащий данному множеству.

- **8 – связность**, когда пикселы считаются соседними, если их x и y координаты отличаются не более чем на единицу, т.е.

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq 1.$$

- **4 – связность**, когда пикселы считаются соседними, если либо их x , либо y координаты отличаются не более чем на единицу, т.е.

$$|x_1 - x_2| \leq 1; |y_1 - y_2| \leq 1.$$

Соседи

пик



Понятие 4-связности является более сильным, чем 8-связность:
любые два 4-связных пиксела являются и 8-связными, но не наоборот

- **Линией** на растровой сетке выступает набор пикселов P_1, P_2, \dots, P_n , где любые два пиксела P_k, P_{k+1} являются соседними.
- Простые элементы, из которых складываются сложные объекты, будем называть **графическими примитивами**.
- Простейшим растровым графическим примитивом является **пиксел**.
- Сложными графическими примитивами являются линии и фигуры.

Задача построения
растрового изображения отрезка,
соединяющего точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

- $$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) = kx + b, x \in [x_1, x_2].$$

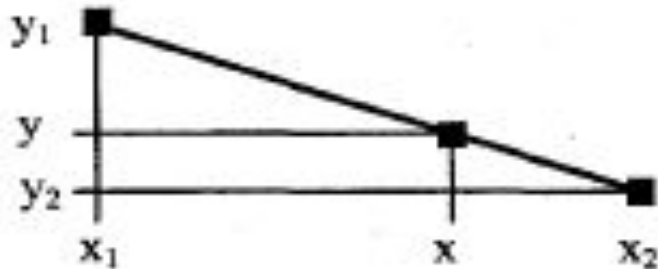
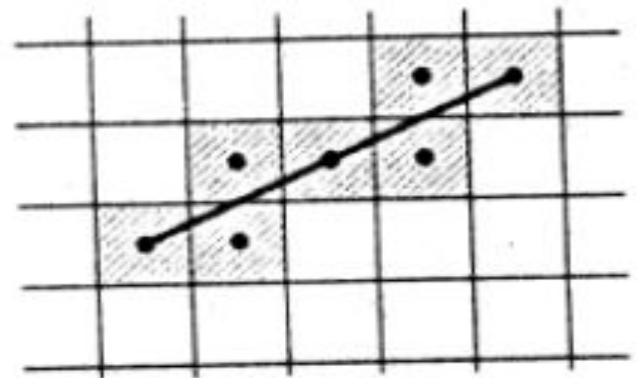


Рис. Отрезок прямой



Простейший алгоритм растрового представления отрезка

Будем считать, что $0 \leq y_2 - y_1 \leq x_2 - x_1$

```
// File Line1.cpp
void Line ( int x1, int y1, int x2,
int y2, int color )
{
double k =
((double)(y2-y1))/(x2-x1);
double b = y1 - k*x1;
for ( int x = x1; x <= x2; x++ )
putpixel ( x, round ( k*x + b ),
color );
}
```



Процесс определения пикселей, наилучшим образом аппроксимирующих заданный отрезок, называется **разложением в растр**.

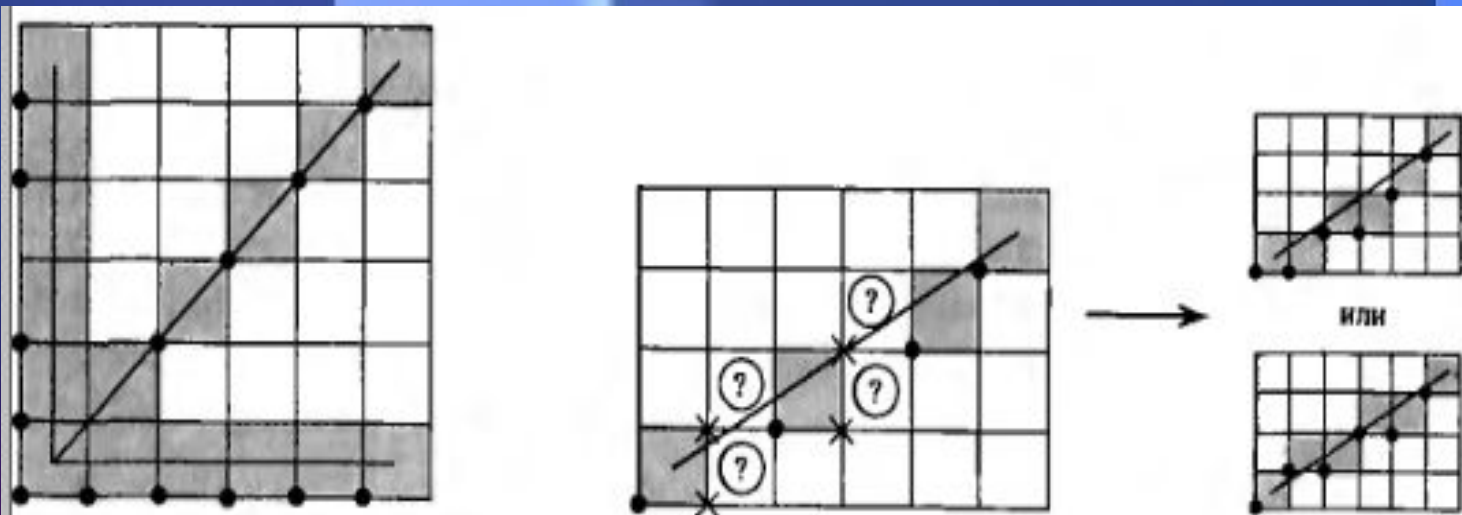
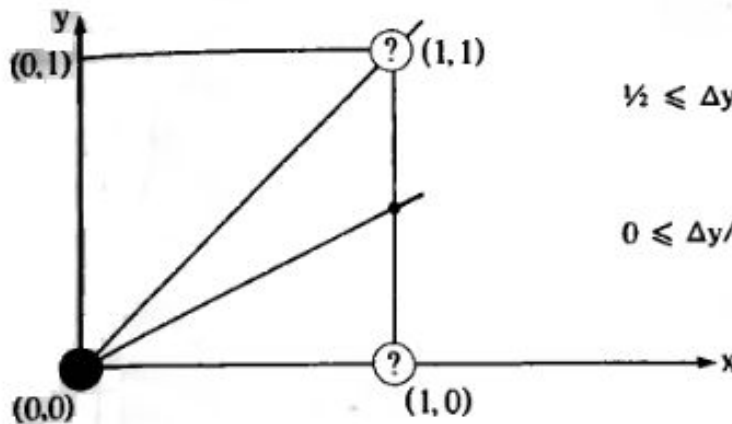


Рис. Разложение в растр отрезков прямых.

- В 1965 году Брезенхейм предложил простой целочисленный алгоритм для растрового построения отрезка, первоначально предназначенный для использования в графопостроителях.
- Алгоритм выбирает оптимальные растровые координаты для представления отрезка.
- В процессе работы одна из координат – либо x , либо y изменяется на единицу.
- Изменение другой координаты (либо на нуль, либо на единицу) зависит от расстояния между действительным положением отрезка и ближайшими координатами сетки. Такое расстояние назовем **ошибкой**.

- Угловой коэффициент $k \in [0,1]$.
- Если $k \geq \frac{1}{2}$, то точка пересечения с прямой $x=1$ будет расположено ближе к прямой $y=1$, чем к прямой $y=0$.
- Следовательно, точка растра $(1,1)$ лучше аппроксимирует ход отрезка, чем точка $(1,0)$.
- Если $k < \frac{1}{2}$, то верно обратное.



$\frac{1}{2} \leq \Delta y / \Delta x \leq 1$ (ошибка ≥ 0)

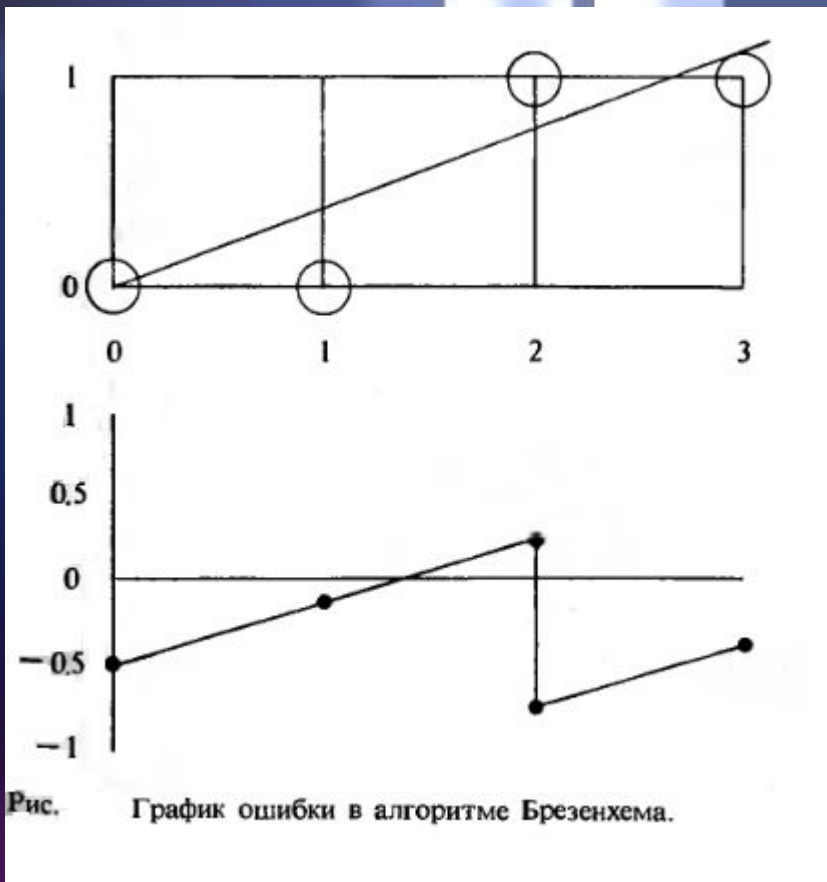
$0 \leq \Delta y / \Delta x < \frac{1}{2}$ (ошибка < 0)

Инициализировать ошибку в $-\frac{1}{2}$

ошибка = ошибка + $\Delta y / \Delta x$

Основная идея алгоритма Брезенхема.

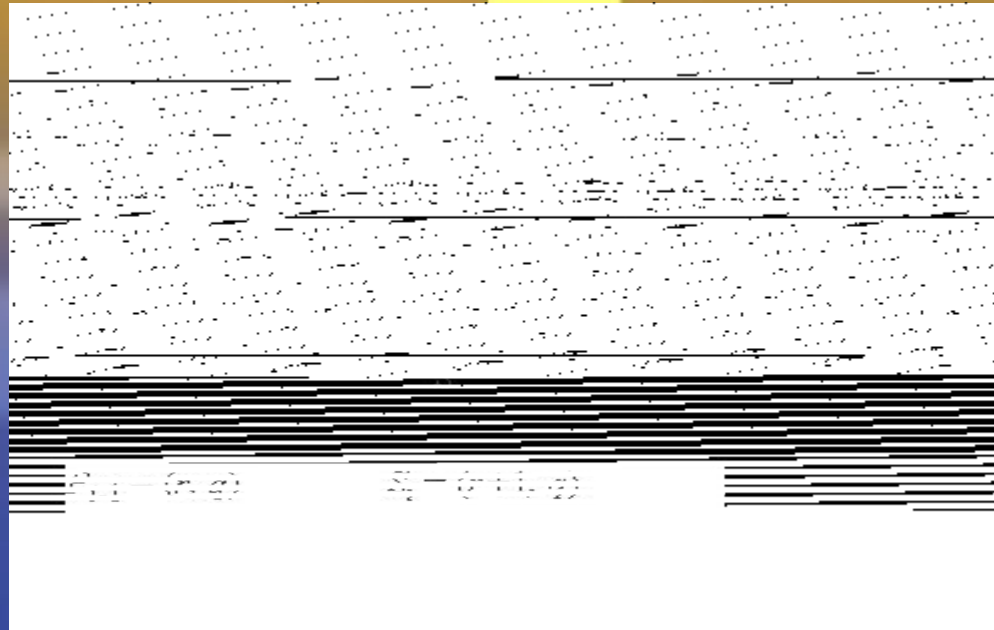
- Не все отрезки проходят через точки растра.
- На рис. иллюстрируется отрезок с $k = \frac{3}{8}$.



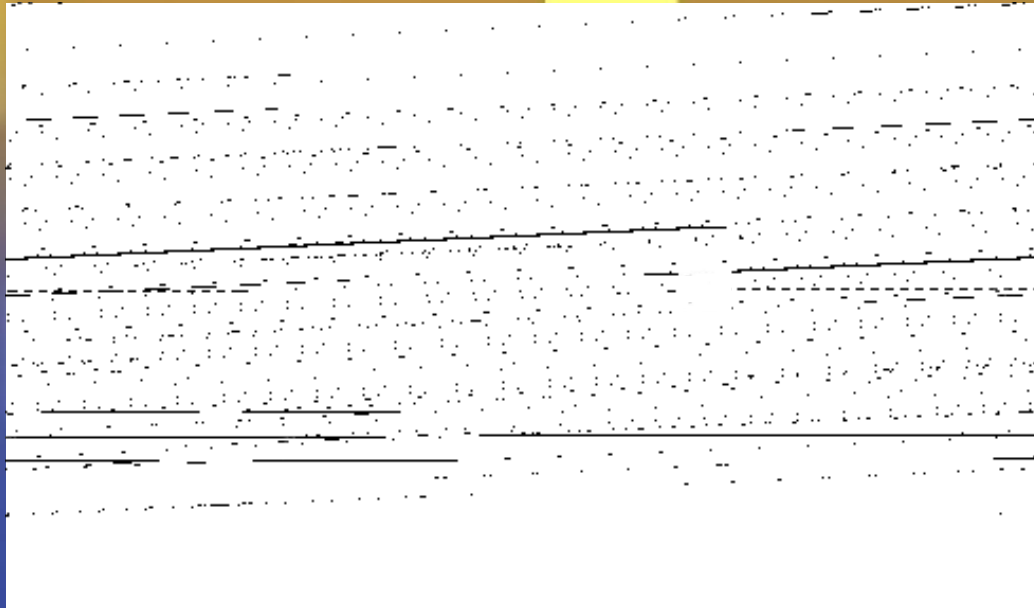
- Отрезок проходит через точку растра (0,0) и последовательно пересекает три пиксела.
- Также иллюстрируется вычисление ошибки при представлении отрезка дискретными пикселами.

Алгоритмы построения отрезка имеют ряд недостатков:

1. выполняют операции над числами с плавающей точкой, а желательно было бы работать с целочисленной арифметикой;
2. на каждом шаге выполняется операция округления, что также снижает быстродействие.



- Пиксель P_{i-1} уже найден как ближайший к реальному отрезку.
- Требуется определить, какой из пикселей (T_i или S_i) будет установлен следующим.
- В алгоритме используется управляющая переменная d_i , которая на каждом шаге пропорциональна разности между S и T .
- Если $S < T$, то S_i ближе к отрезку, иначе выбирается T_i .



- Пусть отрезок проходит из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2) .
- Исходя из начальных условий, точка (x_1, y_1) ближе к началу координат.
- Перенесем оба конца отрезка с помощью преобразования $T(-x_1, -y_1)$, так чтобы первый конец отрезка совпал с началом координат.
- Начальной точкой отрезка стала точка $(0, 0)$, конечной точкой – (dx, dy) , где $dx = x_2 - x_1$, $dy = y_2 - y_1$

- Уравнение прямой $y = x \frac{dy}{dx}$.
- Обозначим $P_{i-1}(r, q)$.
- Тогда $S_i = (r+1, q)$ и $T_i = (r+1, q+1)$.
- Из подобия треугольников $\frac{dy}{dx} = \frac{S+q}{r+1}$.
- Тогда $S = \frac{dy}{dx}(r+1) - q$.
- $T = 1 - S$.
- $T = 1 - \frac{dy}{dx}(r+1) + q$.
- $S - T = 2 \frac{dy}{dx}(r+1) - 2q - 1$.
- Поскольку $r = x_{i-1}$ и $q = y_{i-1}$, обозначим $d_i = dx(S - T)$
- $d_i = 2 x_{i-1} dy - 2 y_{i-1} dx + 2 dy - dx$.

- $d_i = 2 x_{i-1} dy - 2 y_{i-1} dx + 2 dy - dx.$
- $d_{i+1} = 2 x_i dy - 2 y_i dx + 2 dy - dx.$
- $d_{i+1} - d_i = 2 dy (x_i - x_{i-1}) - 2 dx (y_i - y_{i-1}).$
- Известно, что $x_i - x_{i-1} = 1$, тогда
- $d_{i+1} - d_i = 2 dy - 2 dx (y_i - y_{i-1}).$

ИЛИ

- $d_{i+1} = d_i + 2 dy - 2 dx (y_i - y_{i-1})$ - итеративная формула вычисления управляющего коэффициента d_{i+1} по предыдущему значению d_i .

- Если $d_i \geq 0$, тогда выбирается T_i и

$$y_i = y_{i-1} + 1, d_{i+1} = d_i + 2(dy - dx).$$
- Если $d_i < 0$, тогда выбирается S_i и

$$y_i = y_{i-1} \text{ и } d_{i+1} = d_i + 2dy.$$
- Начальные значения d_1 с учетом того, что

$$(x_0, y_0) = (0, 0), d_1 = 2dy - dx.$$

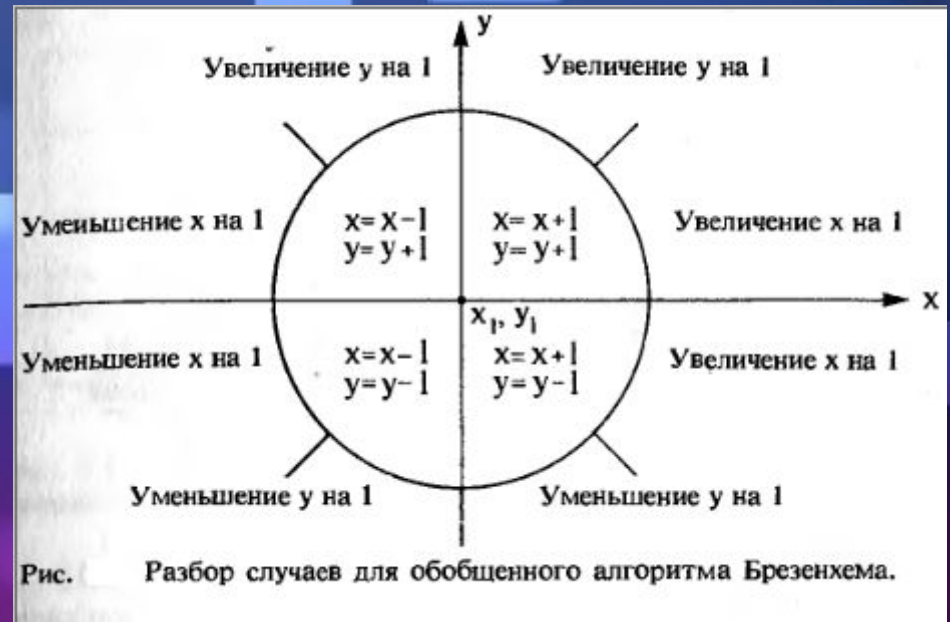
- Преимущество: для работы алгоритма требуются минимальные арифметические возможности: сложение, вычитание и сдвиг влево для умножения на 2.

```

void MyLine(int x1, int y1, int x2, int y2, int c)
{
int dx, dy, inc1, inc2, d, x, y, Xend;
dx = abs(x2 - x1);
dy = abs(y2 - y1);
d = dy << 1 - dx;
inc1 = dy << 1;
inc2 = (dy - dx) << 1;
if (x1 > x2)
{
x = x2;
y = y2;
Xend = x1;
}
else
{
x = x1;
y = y1;
Xend = x2;
};
putpixel(x, y, c);
while (x < Xend)
{
x++;
if (d < 0) d = d + inc1;
else
{
y++;
d = d + inc2;
};
putpixel(x, y, c);
};
}

```

Если $dy > dx$, то необходимо будет использовать этот же алгоритм, но пошагово увеличивая y и на каждом шаге вычислять x .



Методы устранения ступенчатости

Основная причина появления лестничного эффекта заключается в том, что отрезки, ребра многоугольника, цветовые границы и пр. имеют непрерывную природу, тогда как растровые устройства дискретны.

Лестничный эффект проявляется:

- 1) при визуализации мелких деталей;
- 2) при прорисовке ребер и границ;
- 3) при анимации мелких деталей.

Метод увеличения частоты выборки

- Каждый пиксель делится на **подпиксели** в процессе формирования раstra более высокого разрешения.
- В некоторой степени можно получить лучшие результаты, если рассматривать больше подпикселей и учитывать их влияние с помощью весов при определении атрибутов.

+	+
+	+

Увеличение разрешения в два раза

+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

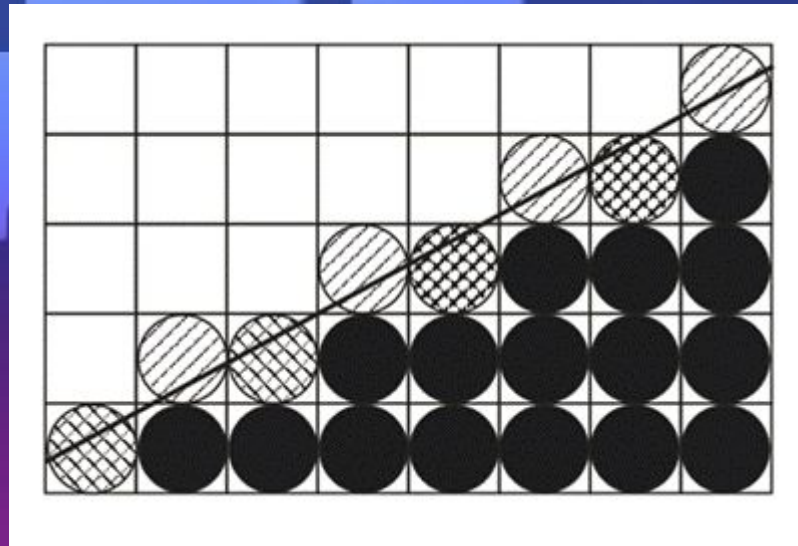
Увеличение разрешения в четыре раза

1	2	1
2	4	2
1	2	1

1	2	3	4	3	2	1
2	4	6	8	6	4	2
3	6	9	12	9	6	3
4	8	12	16	12	8	4
3	6	9	12	9	6	3
2	4	6	8	6	4	2
1	2	3	4	3	2	1

Метод, основанный на использовании полутонов

Интенсивность пикселя на ребре устанавливается пропорционально площади части пикселя, находящегося внутри многоугольника.



Растровое представление окружности

- $$x^2 + y^2 = R^2$$

Генерируется 1/8 часть окружности.

Остальные ее части получаем последовательными отражениями.

Пусть центр окружности и начальная точка находятся точно в точках растра.

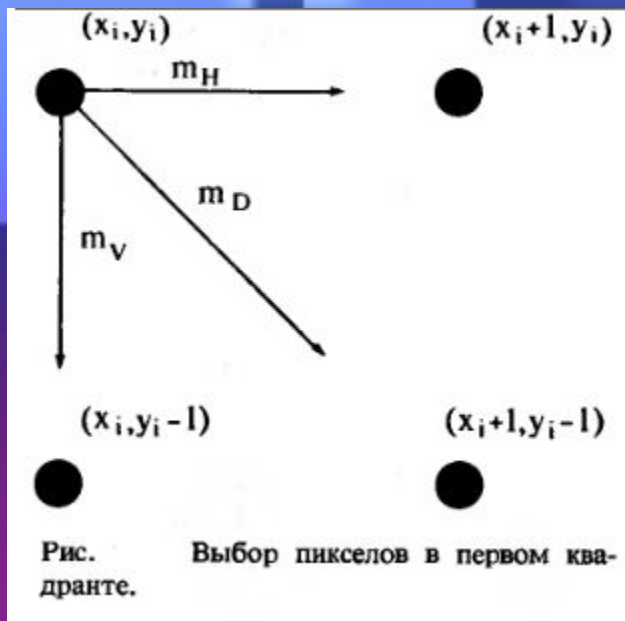
Выбираем генерацию по часовой стрелке с началом в точке $x=0, y=R$

y — монотонно убывающая функция аргумента x .

m_H — горизонтально вправо,
 m_D — по диагонали вниз и вправо,
 m_V — вертикально вниз.

$$m_H = |(x_i + 1)^2 + (y_i)^2 - R^2|$$
$$m_D = |(x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2|$$
$$m_V = |(x_i)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2|$$

Алгоритм выбирает пиксел соответствующий $\min\{m_H, m_D, m_V\}$.



В окрестности точки (x_i, y_i) возможны только пять типов пересечений окружности и сетки раstra

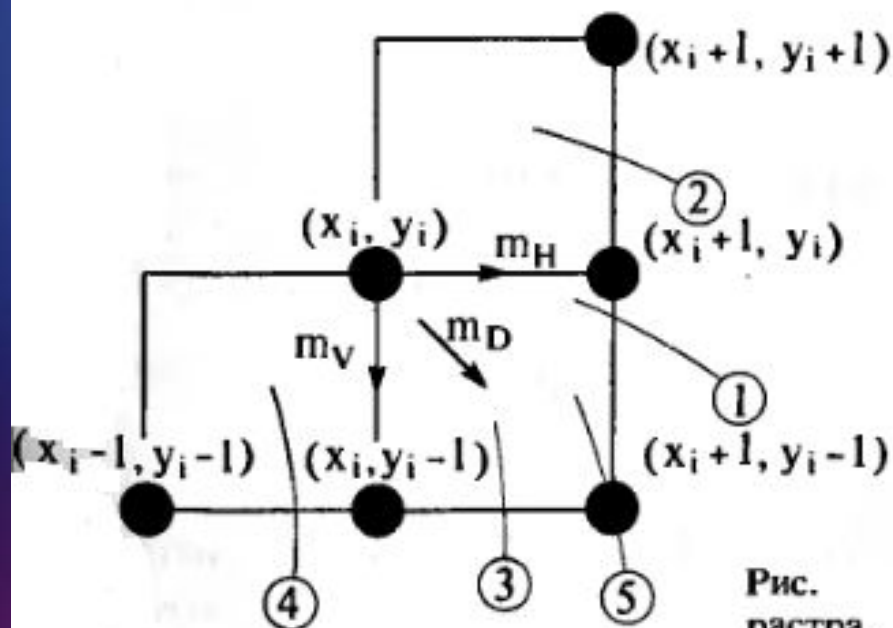


Рис.
раstra.

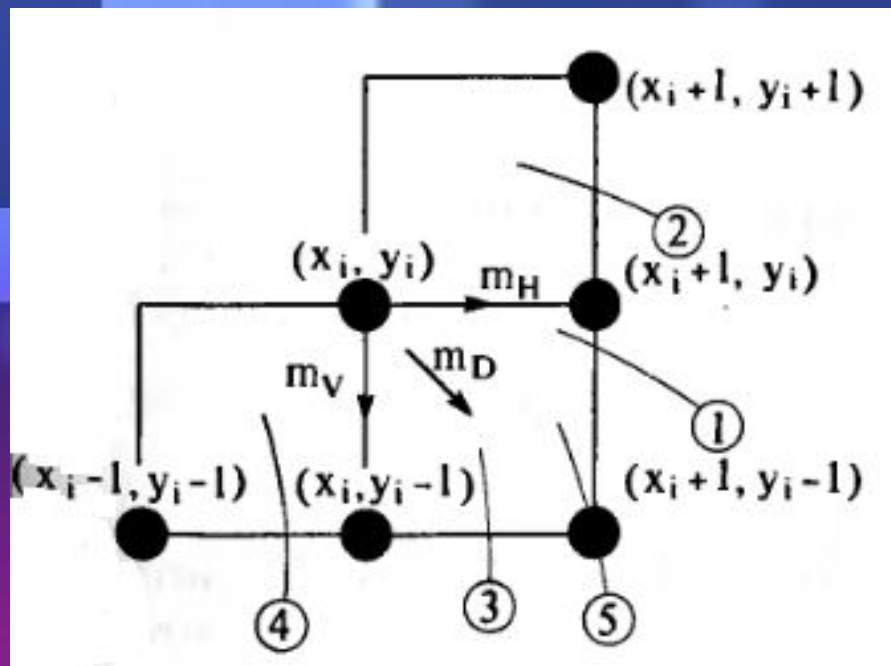
Пересечение окружности и сетки

Обозначим

$$\Delta_i = (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2$$

При $\Delta_i < 0$ диагональная точка $(x_i + 1, y_i - 1)$ находится внутри реальной окружности, т.е. это случаи 1 или 2.

Выбираем либо направление m_H (пиксел $(x_i + 1, y_i)$),
либо направление m_D (пиксел $(x_i + 1, y_i - 1)$).

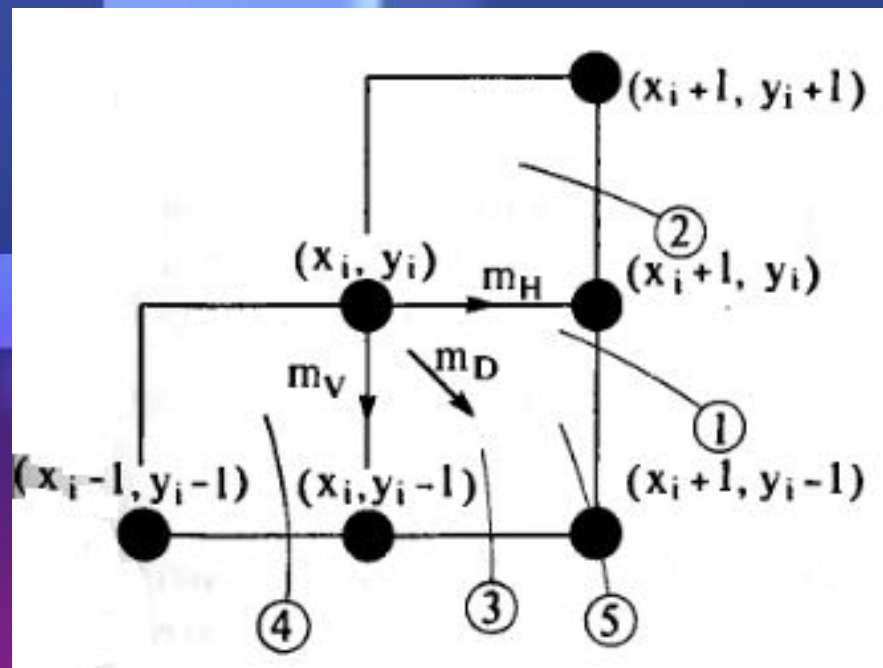


Вычислим

$$\delta = |(x_i + 1)^2 + (y_i)^2 - R^2| - |(x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2|$$

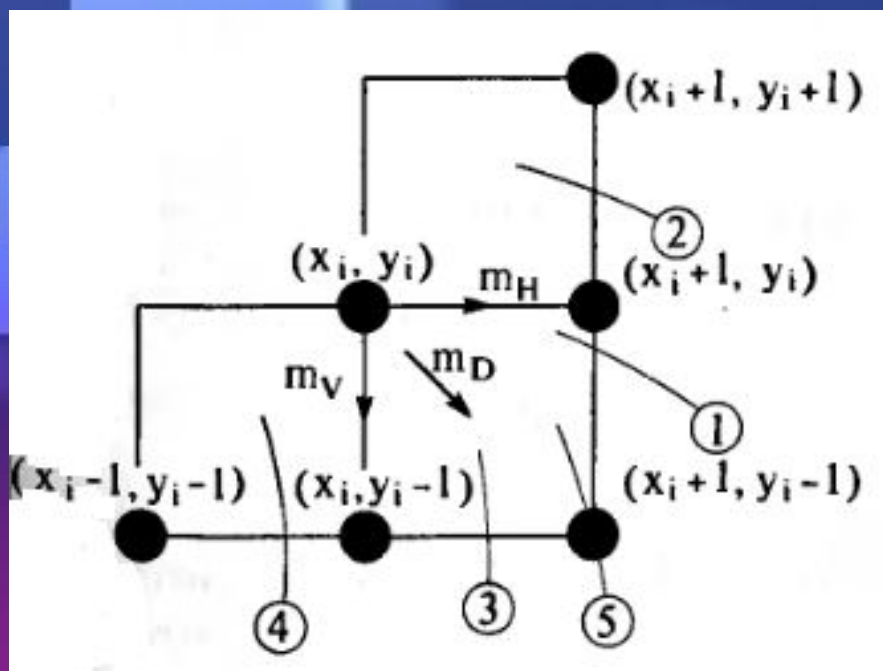
Если $\delta \leq 0$, то выбираем направление m_H (пиксел $(x_i + 1, y_i)$).

Если $\delta > 0$, то выбираем направление m_D (пиксел $(x_i + 1, y_i - 1)$).



При $\Delta_i > 0$ диагональная точка $(x_i + 1, y_i - 1)$ находится вне окружности, т.е. это случай 3 или 4.

Выбираем либо направление m_V (пиксел $(x_i, y_i - 1)$), либо направление m_D (пиксел $(x_i + 1, y_i - 1)$).



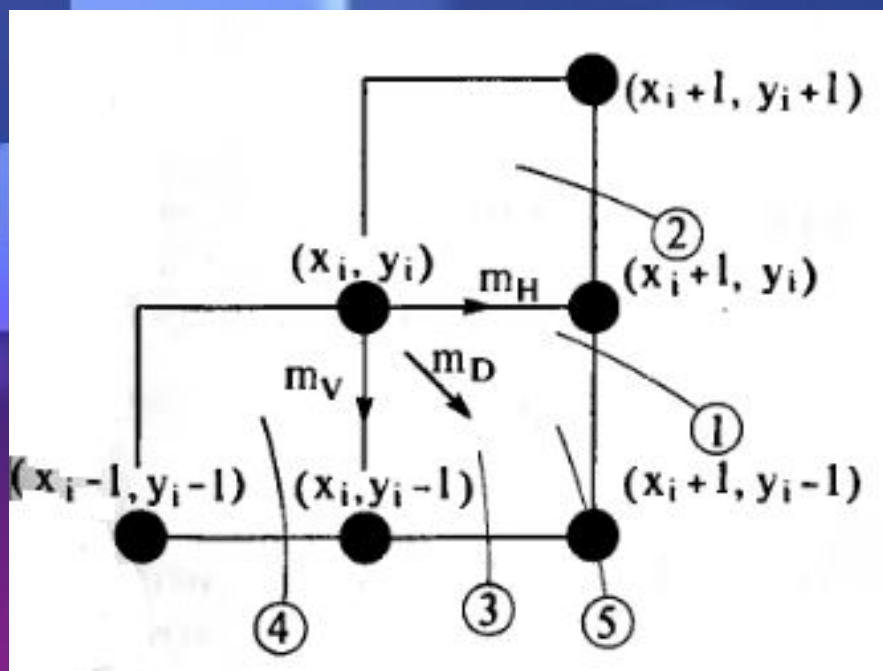
Вычислим

$$\delta' = |(x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2| - |(x_i)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2|$$

Если $\delta' \leq 0$, то выбираем направление

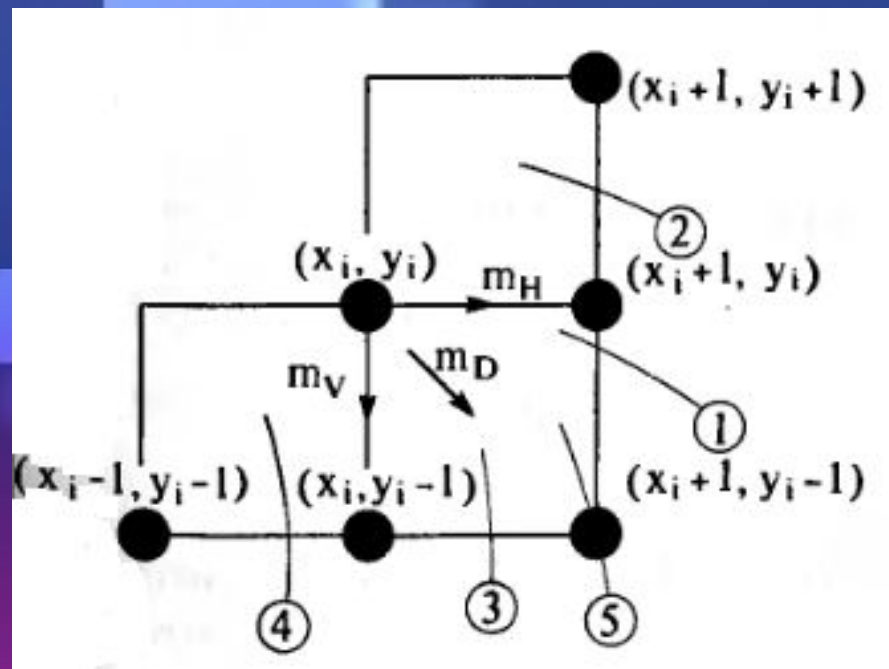
m_D (пиксел $(x_i + 1, y_i - 1)$).

Если $\delta' > 0$, то выбираем направление m_V (пиксел $(x_i, y_i - 1)$).



При $\Delta_i = 0$ диагональная точка $(x_i + 1, y_i - 1)$ находится на реальной окружности, т.е. это случай 5.

В этой ситуации $\delta > 0, \delta' < 0$, то выбираем направление m_D (пиксел $(x_i + 1, y_i - 1)$).



Рекуррентные соотношения для реализации
пошагового алгоритма:

направление m_H :

$$x_{i+1} = x_i + 1, y_{i+1} = y_i, \Delta_{i+1} = \Delta_i + 2x_{i+1} + 1$$

направление m_D :

$$x_{i+1} = x_i + 1, y_{i+1} = y_i - 1,$$
$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + 2x_{i+1} - 2y_{i+1} + 2$$

направление m_V :

$$x_{i+1} = x_i, y_{i+1} = y_i - 1, \Delta_{i+1} = \Delta_i - 2y_{i+1} + 1$$

Окружность в I октанте сгенерирована.

II октант получается зеркальным отражением относительно прямой $y=x$.

Получаем I квадрант.

Отражаем полученную часть окружности относительно прямой $x=0$.

Получаем часть окружности во II квадранте.

Верхнюю часть окружности отражаем относительно прямой $y=0$.

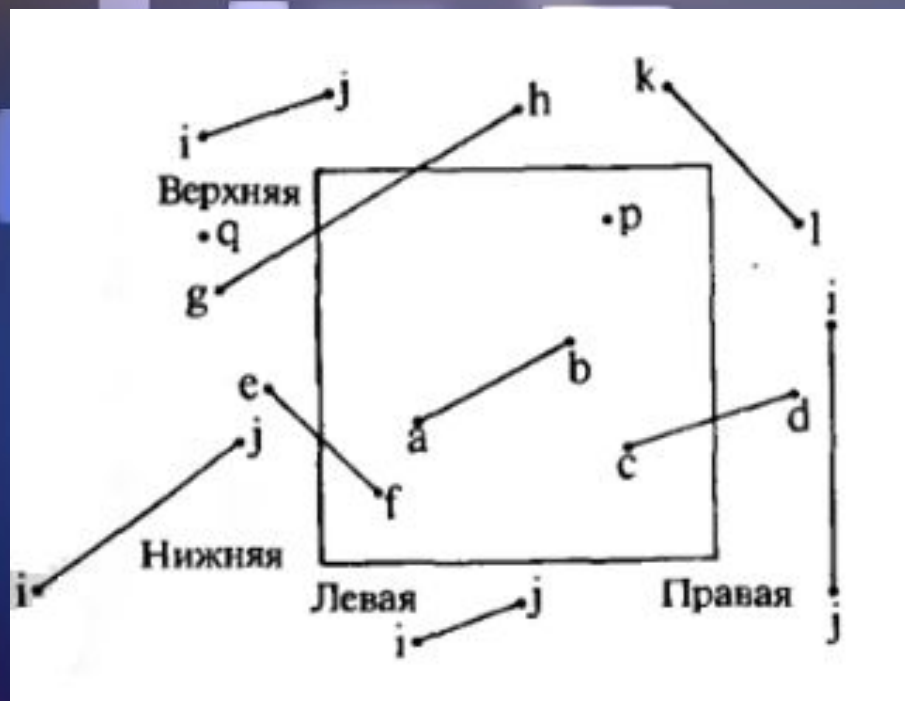
Получаем окружность.

Двумерные матрицы соответствующих преобразований



Рис. Генерация полной окружности из дуги в первом октанте.

Отсечение отрезка. Алгоритм Сазерленда-Кохена



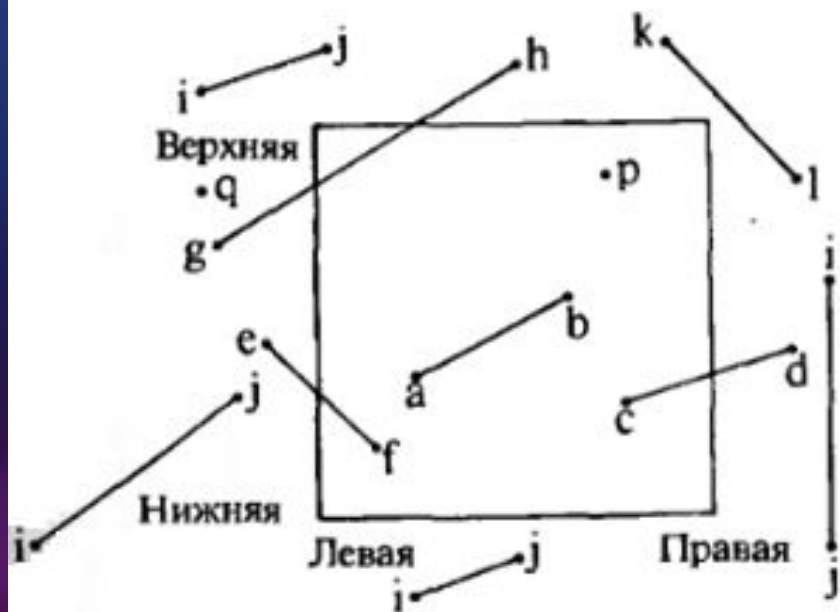
Точки, лежащие внутри отсекающего окна, удовлетворяют условию:

$$x_{\text{Л}} \leq x \leq x_{\text{П}}$$

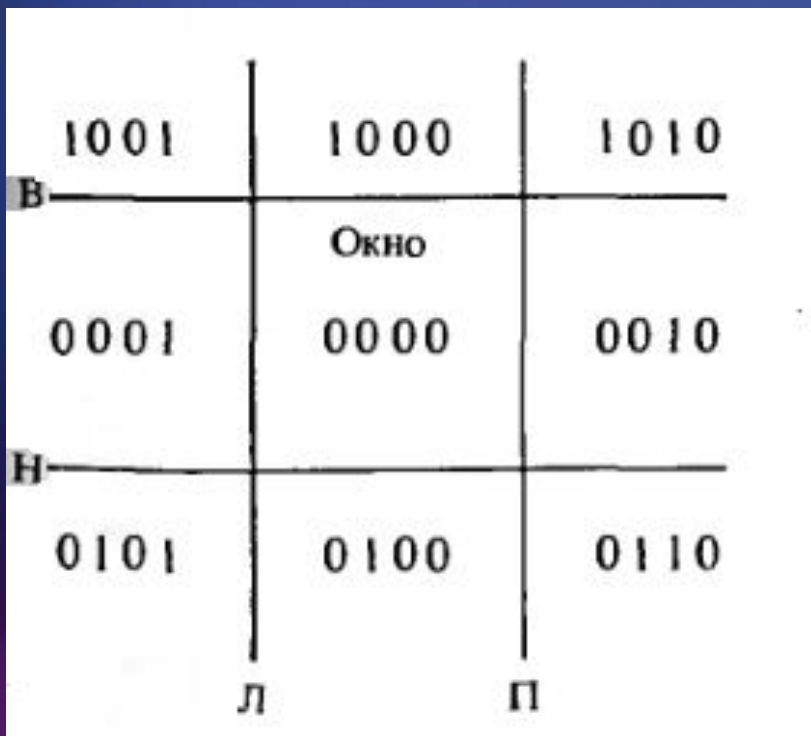
$$y_{\text{Н}} \leq y \leq y_{\text{В}}$$

Цель алгоритма: определение тех точек отрезка, которые лежат внутри отсекающего окна.

- Отрезок называется **ВИДИМЫМ** (лежащим внутри окна), если обе его концевые точки лежат внутри окна, например, отрезок ab .
- Если оба конца отрезка лежат справа, слева, выше или ниже окна, то этот отрезок называется **НЕВИДИМЫМ** (целиком лежит вне окна), например отрезок ij .
- Все остальные отрезки называются **ЧАСТИЧНО ВИДИМЫМИ** и к ним нужно применять алгоритмы



- для 1 бита – если точка левее окна
- для 2 бита – если точка правее окна
- для 3 бита – если точка ниже окна
- для 4 бита – если точка выше окна



u	v	$u \wedge v$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Алгоритм Сазерленда – Коэна для произвольного отрезка P_1P_2

- Для каждого отрезка P_1P_2 определить, не является ли он полностью видимым или может быть тривиально отвергнут как невидимый.
- Если P_1 вне окна, то продолжить выполнение, иначе поменять P_1 и P_2 местами.
- Заменить P_1 на точку пересечения P_1P_2 со стороной окна.

Таблица Коды концов отрезков

Отрезок (рис. 3.1)	Коды концов (рис. 3.2)	Результаты логического умножения	Примечания
<i>ab</i>	0000 0000	0000	Целиком видим
<i>ij</i>	0010 0110	0010	Целиком невидим
<i>ij</i>	1001 1000	1000	—”—
<i>ij</i>	0101 0001	0001	—”—
<i>ij</i>	0100 0100	0100	—”—
<i>cd</i>	0000 0010	0000	Частично видим
<i>ef</i>	0001 0000	0000	—”—
<i>gh</i>	0001 1000	0000	—”—
<i>kl</i>	1000 0010	0000	Целиком невидим

Пример

Координаты концевых точек

$$P_1 \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{6} \right), P_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), P_3 \left(-\frac{3}{2}, -1 \right), P_4 \left(\frac{3}{2}, 2 \right).$$

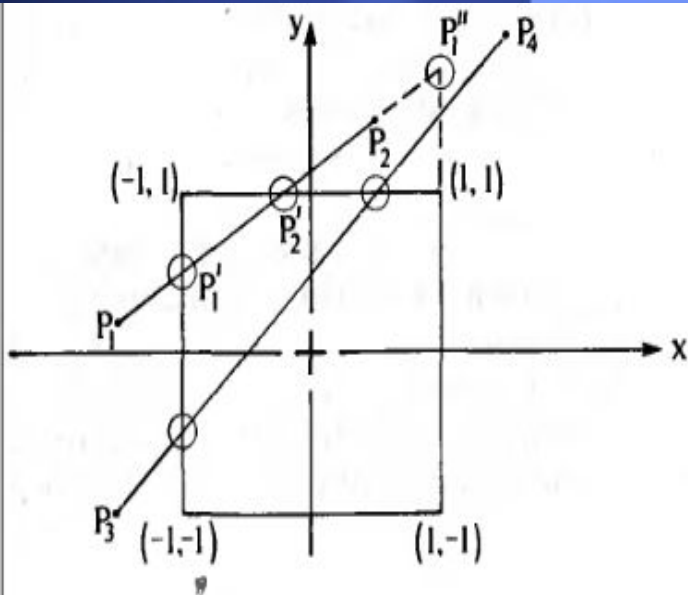
Окно $P = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

$P_1: 0001, P_2: 1000 \Rightarrow P_1 P_2$ - частично видимым $\Rightarrow P_1$ лежит вне окна.

Пересечение $P_1 P_2$ с $x=-1$ в $P_1'(-1, \frac{1}{2})$.

Заменяем точку P_1 на точку P_1' .

Отрезок $P_1 P_2$, где $P_1(-1, \frac{1}{2})$.



$P_1: 0000, P_2: 1000 \Rightarrow P_1 P_2$ - частично видимым $\Rightarrow P_1$ лежит внутри окна \Rightarrow меняем точки P_1, P_2 местами.

Отрезок $P_1 P_2$, где $P_1(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), P_2(-1, \frac{1}{2})$.

Пересечение $P_1 P_2$ с $y=1$ в $P_1'(-\frac{1}{4}, 1)$.

Заменяем точку P_1 на точку P_1' .

Отрезок $P_1 P_2$, где $P_1(-\frac{1}{4}, 1)$.

$P_1: 0000, P_2: 0000 \Rightarrow P_1 P_2$ - полностью видим.