

ВоГУ

Лекция 24 (6)

Электрический ток

*Кузина Л.А.,
к.ф.-м.н.,
доцент*

2017 г.

План

1. Электрический ток и его характеристики.
Основные определения
 - 1.1. Сила тока
 - 1.2. Плотность тока
 - 1.3. Электродвижущая сила
 - 1.4. Напряжение
2. Закон Ома
3. Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей
4. Закон Джоуля-Ленца (в интегральной и локальной форме)
5. Процессы заряда и разряда конденсатора

Электрический ток

Электрический ток – направленное движение электрических зарядов

Сила тока

Определение:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Сила тока численно равна заряду, проходящему через сечение проводника за единицу времени

Сила тока – скаляр (не вектор)

$$[I] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}$$

$$I = \frac{q}{\Delta t}$$

- ТОЛЬКО ДЛЯ ПОСТОЯННОГО тока

Плотность тока

Определение:

$$j = \frac{dI}{dS}$$

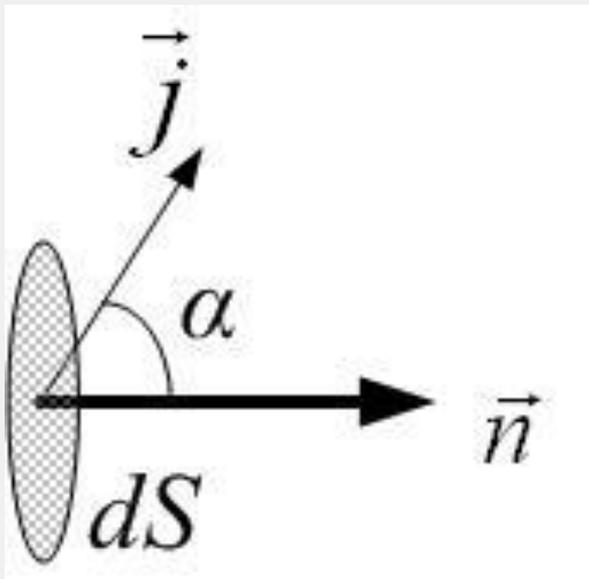
Плотность тока – это сила тока, приходящаяся на единицу площади сечения проводника

$$[j] = \frac{[I]}{[S]} = \frac{A}{m^2}$$

Плотность тока – вектор; направлен параллельно скорости движения зарядов

$$j = \frac{dI}{dS}$$

$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ – ток, проходящий через элемент сечения проводника dS



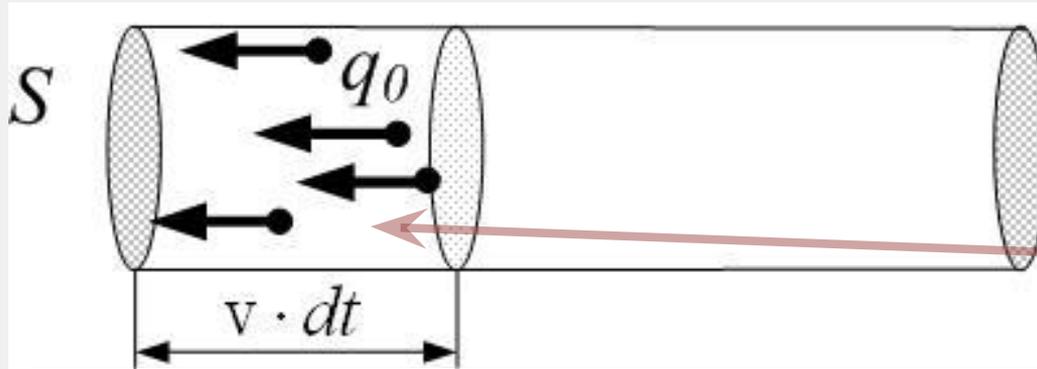
Полный ток через поверхность S :

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j \cdot \cos \alpha \cdot dS$$

v - средняя скорость направленного движения зарядов

q_0 - заряд частицы

n - концентрация заряженных частиц



$$dN = n \cdot dV$$

$$dV = S v dt$$

$dq = q_0 \cdot dN$ - заряд, перенесённый через сечение S за dt

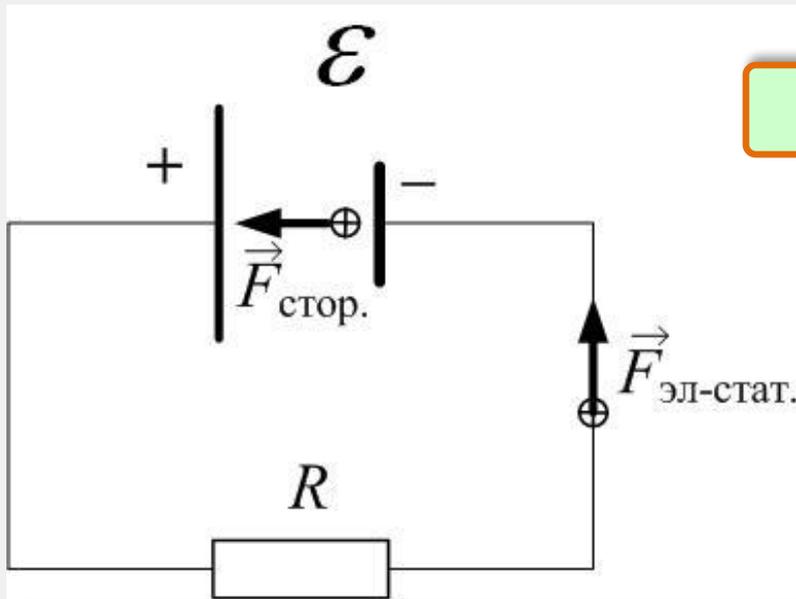
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q_0 \cdot n \cdot S \cdot v \cdot dt}{dt} = q_0 \cdot n \cdot S \cdot v$$

$$j = \frac{I}{S} = \frac{q_0 \cdot n \cdot \cancel{S} \cdot v}{\cancel{S}} = q_0 \cdot n \cdot v$$

$$\vec{j} = q_0 \cdot n \cdot \vec{v}$$

Электродвижущая сила (ЭДС)

Для того, чтобы ток в проводнике поддерживался, нужны сторонние силы (неэлектростатические)



Определение:

ЭДС источника – это работа сторонних сил по переносу единичного заряда в цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор.}}}{q}$$

$$[\mathcal{E}] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В} \quad (\text{Вольт})$$

$$\vec{E}_{\text{стор.}} = \frac{\vec{F}_{\text{стор.}}}{q}$$

- напряжённость поля сторонних сил

Сила, действующая на заряд:

$$\vec{F}_{\text{стор.}} = q \cdot \vec{E}_{\text{стор.}}$$

Работа сторонних сил при переносе заряда q на произвольном участке цепи от точки 1 до точки 2:

$$A_{\text{стор.}12} = \int_1^2 dA_{\text{стор.}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 q \cdot \vec{E}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{l} = q \cdot \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор.}}}{q}$$



$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{l}$$

Для замкнутого контура:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{l}$$

Напряжённость суммарного поля кулоновских (электростатических) и сторонних сил равна: $\vec{E} = \vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}}$

Суммарная (полная) сила $\vec{F} = q \cdot \vec{E} = q \cdot (\vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}})$

Работа суммарной силы при переносе заряда на участке цепи при переносе заряда q на произвольном участке цепи от точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \cdot \int_1^2 (\vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}}) \cdot d\vec{l} = q \cdot \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул.}} \cdot d\vec{l} + q \cdot \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{l}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул.}} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} \cdot d\vec{l}$$

$$A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \mathcal{E}_{12}$$

Напряжение

Определение:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q}$$

Напряжение численно равно суммарной работе кулоновских и сторонних сил по переносу единичного заряда на данном участке цепи

$$A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \mathcal{E}_{12}$$

$$U_{12} = \frac{q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \mathcal{E}_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$$

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$$

Напряжение

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$$

Понятие напряжения обобщает понятия разность потенциалов и ЭДС

Частные случаи:

Контур замкнут (1=2)

$$\varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow U = \mathcal{E}$$

Однородный участок цепи (не содержит ЭДС) $U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)$

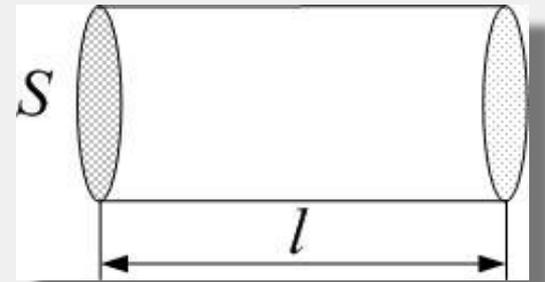
Закон Ома (для участка цепи)

Установлен
экспериментально

$$I = \frac{U}{R}$$

Сопротивление
проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



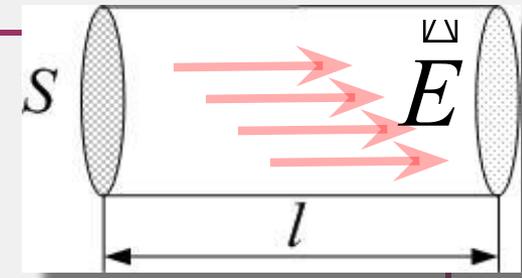
Зависит от
температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \cdot t),$$
$$R = R_0 (1 + \alpha \cdot t)$$

При 0°C

При температуре
 $t^\circ\text{C}$

Закон Ома в дифференциальной (локальной) форме



$$\begin{cases}
 j = \frac{I}{S} \\
 I = \frac{U}{R} \\
 R = \rho \frac{l}{S} \\
 U = E \cdot l
 \end{cases}
 \Rightarrow
 j = \frac{I}{S} = \frac{U}{SR} = \frac{U}{S \rho \frac{l}{S}} = \frac{U}{\rho \cdot l} = \frac{E \cdot l}{\rho \cdot l} = \frac{E}{\rho}$$

Определение: $\gamma = \frac{1}{\rho}$

Удельная электропроводимость – это величина, обратная удельному сопротивлению

$$j = \gamma \cdot E$$

Закон Ома

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot (\vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}})$$

**Закон Ома в
интегральной форме
для неоднородного
участка цепи:**

$$I = \frac{U}{R} \equiv \frac{U_{12}}{R} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}}{R}$$

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}$$

Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей

Первое правило (для узла)

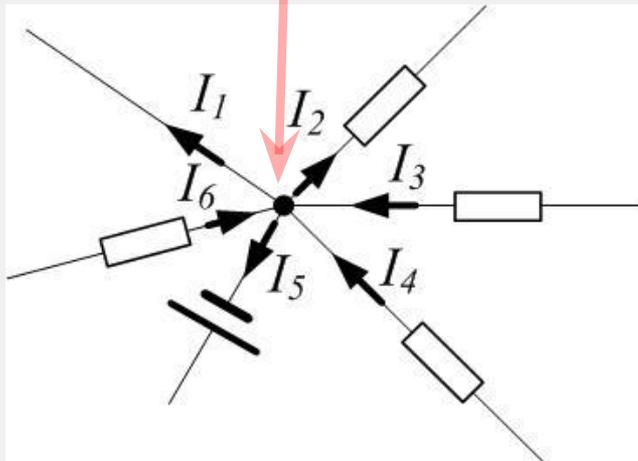
$$\sum I_i = 0$$

I правило:

i

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

Узел



Пример:

$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей

Второе правило (для произвольного контура)

Для каждого участка любого замкнутого контура:

$$(IR)_i = (\varphi_1 - \varphi_2)_i + \mathcal{E}_i$$

Просуммируем по всему замкнутому контуру с учётом, что поле

кулоновских сил потенциально: $\sum_i (\varphi_1 - \varphi_2)_i = \oint_L \overset{\Delta}{E}_{\text{кул.}} \overset{\Delta}{dl} = 0$

$$\sum_i (IR)_i = \sum_i \mathcal{E}_i$$

II правило:

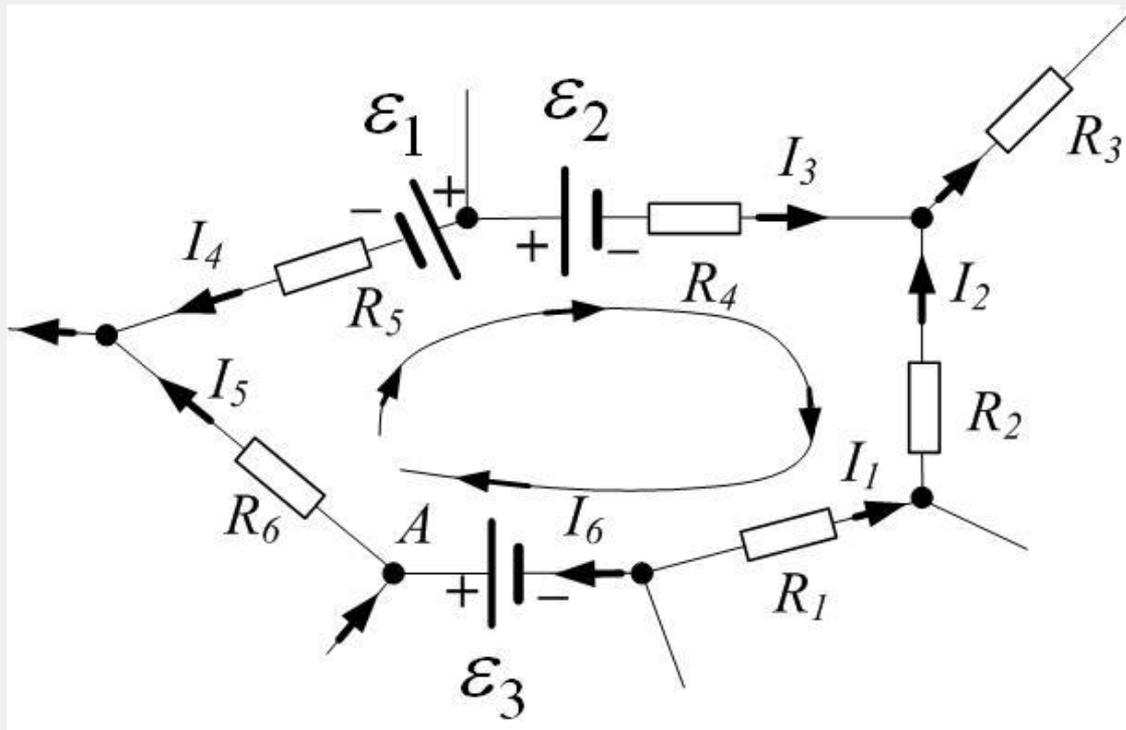
Алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС,

включённых в данный контур

Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей

Второе правило (для произвольного контура)

Пример:

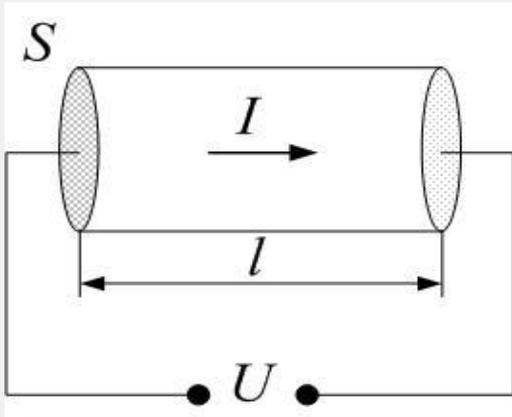


$$\sum_i (IR)_i = \sum_i \varepsilon_i$$

$$I_5 R_6 - I_4 R_5 + I_3 R_4 - I_2 R_2 - I_1 R_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца

Работа тока за малый промежуток времени dt по переносу заряда $dq=Idt$ по проводнику сопротивлением R , на который подано напряжение U равна:



$$dA = dq \cdot U$$

$$dA = dq \cdot U = I \cdot U \cdot dt$$

**Мощность
тока:**

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{I \cdot U \cdot dt}{dt} = I \cdot U$$

$$P = I \cdot U = I \cdot (I \cdot R) = I^2 R$$

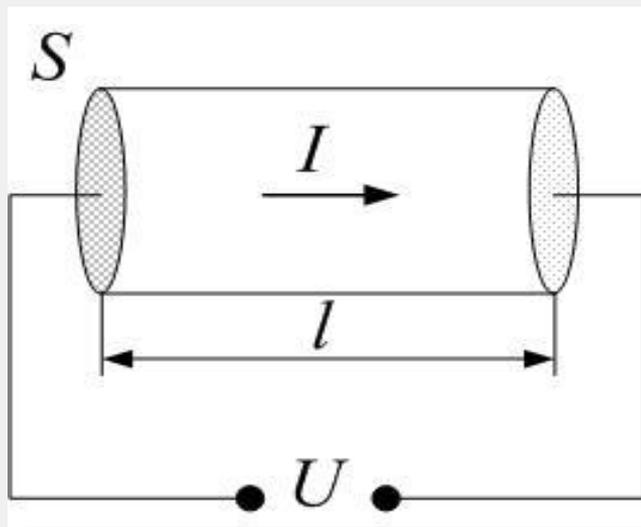
$$P = I \cdot U = \frac{U}{R} \cdot U = \frac{U^2}{R}$$

$$P = I \cdot U = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме

Если работа сводится к выделению теплоты на резисторе, то:

$$dA = dQ = IUdt$$

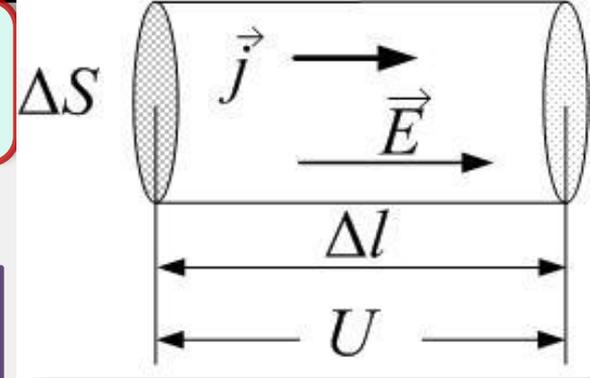


Теплота, выделившаяся за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dQ = \int_{t_1}^{t_2} IUdt$$

$$Q = R \cdot \int_{t_1}^{t_2} I^2 dt$$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной (локальной) форме



Удельная тепловая мощность тока равна количеству теплоты, выделяющемуся в единице объёма проводника за единицу времени:

$$w = \frac{dQ}{dt \cdot \Delta V}$$

$$w = \frac{dQ}{dt \cdot \Delta V} = \frac{I \cdot U \cdot dt}{dt \cdot \Delta S \cdot \Delta l} = \frac{I \cdot U}{\Delta S \cdot \Delta l} = \frac{I}{\Delta S} \cdot \frac{U}{\Delta l} = j \cdot E$$

$$w = j \cdot E$$

$$j = \gamma \cdot E$$

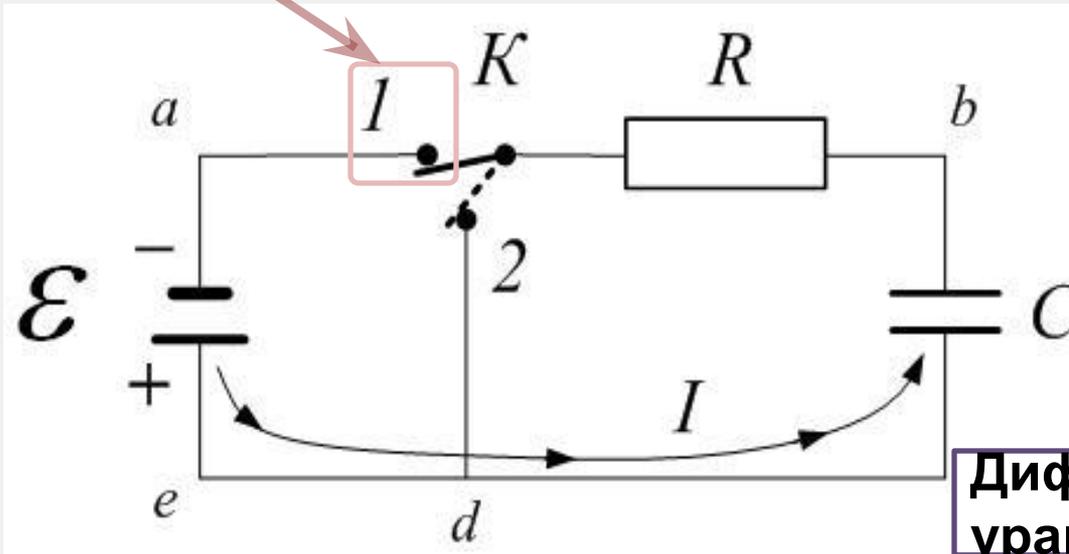
$$E = j \cdot \rho$$

$$w = j \cdot E = \gamma \cdot E^2$$

$$w = j \cdot E = j \cdot (j \cdot \rho) = \rho \cdot j^2$$

Процессы заряда и разряда конденсатора

А) заряд



II правило Кирхгофа

$$I \cdot R + U = \mathcal{E}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q'$$

$$U = \frac{q}{C}$$

Дифф.
уравнение:

$$q' \cdot R + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

Решение
уравнения:

$$q = C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Доказательство
решения:

$$q = C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q' = C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)'$$

$$q' = C \cdot \mathcal{E} \left(0 - e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC} \right) \right)$$

$$q' = \frac{\cancel{C} \cdot \mathcal{E}}{\cancel{RC}} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q' \cdot R + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

$$\frac{\cancel{\mathcal{E}}}{\cancel{R}} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \cancel{R} + \frac{\cancel{C} \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)}{\cancel{C}} = \mathcal{E}$$

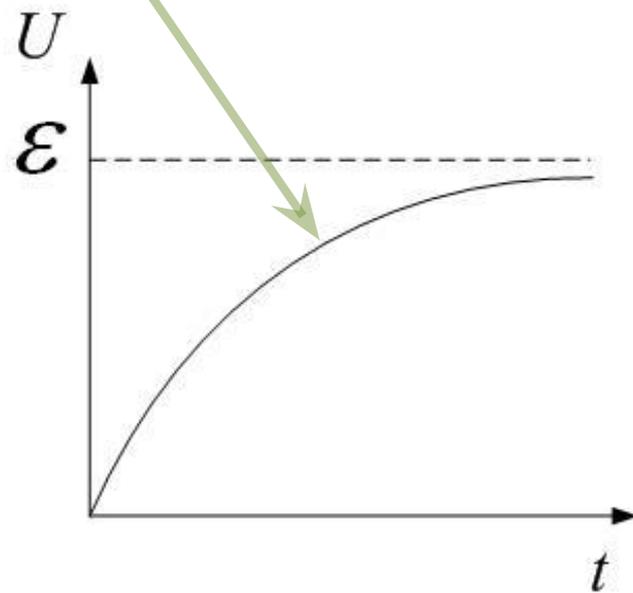
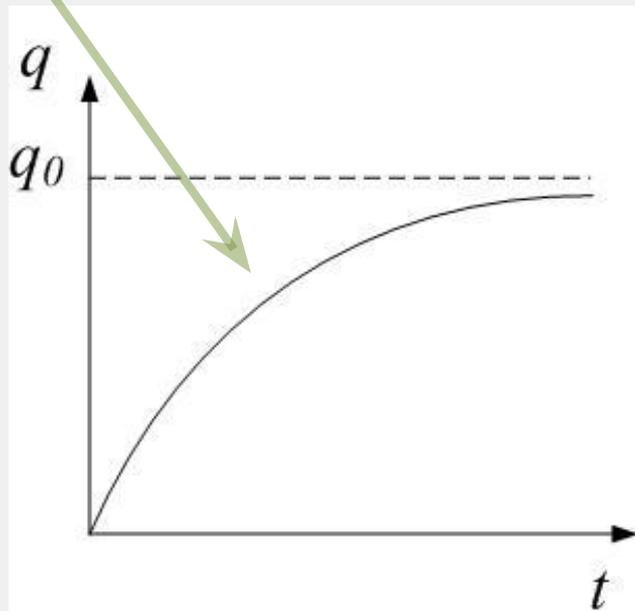
$$\mathcal{E} \cdot \left(e^{-\frac{t}{RC}} + 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = \mathcal{E}$$

$$q = C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$q_0 = C \cdot \mathcal{E}$ – максимальный заряд, до которого заряжается конденсатор

$$q(t) = q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$U = \frac{q}{C} = \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



Процессы заряда и разряда конденсатора

Б) Разряд конденсатора

II правило Кирхгофа:

$$I \cdot R + U = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q'$$

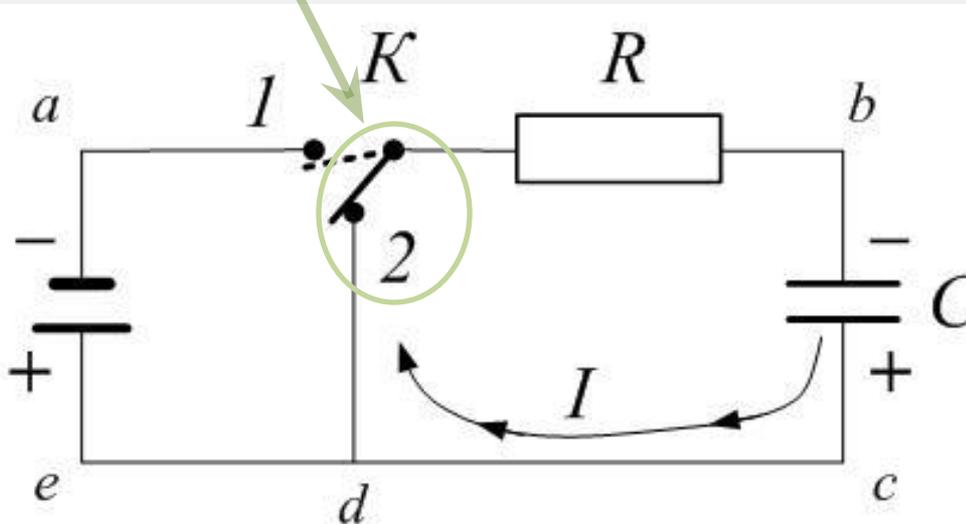
$$U = \frac{q}{C}$$

Дифф. уравнение:

$$q' \cdot R + \frac{q}{C} = 0$$

Решение уравнения:

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



Доказательство
решения:

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q' = q_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{RC}} \right)'$$

$$q' = q_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC} \right) \right)$$

$$q' = -\frac{q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

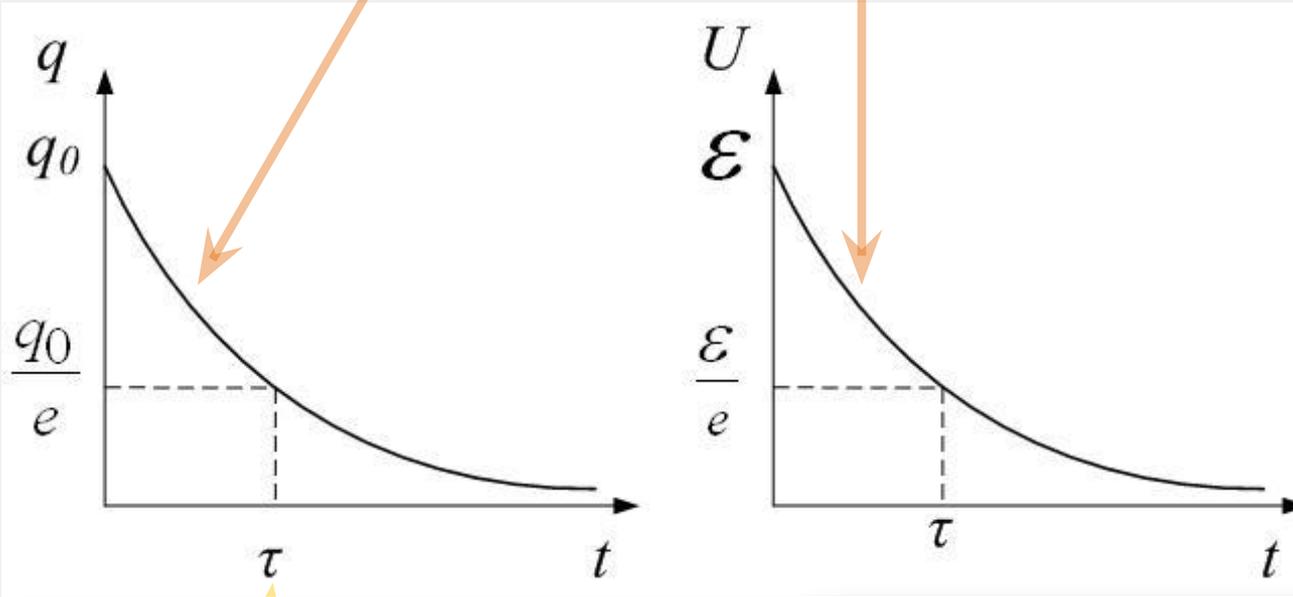
$$-\frac{q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot R + \frac{q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{C} = 0$$

$$q' \cdot R + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{q_0}{C} \cdot \left(-e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-\frac{t}{RC}} \right) = 0$$

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



Определение: $\tau = RC$ – постоянная времени RC-цепочки

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}} = q_0 \cdot e^{-\frac{RC}{RC}} = q_0 \cdot e^{-1} = \frac{q_0}{e} \approx \frac{q_0}{2.7}$$

За время релаксации τ заряд конденсатора уменьшается в e раз