ВоГУ

Лекция 24 (6)

Электрический ток

Кузина Л.А.,
к.ф.-м.н.,
доцент

2017 г.

План

1. Электрический ток и его характеристики. Основные определения
   1.1. Сила тока
   1.2. Плотность тока
   1.3. Электродвижущая сила
   1. 4. Напряжение
2. Закон Ома
3. Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей
4. Закон Джоуля-Ленца (в интегральной и локальной форме)
5. Процессы заряда и разряда конденсатора

Электрический ток

Электрический ток – **направленное** движение электрических зарядов

Сила тока

Определение: $I = \frac{dq}{dt}$

Сила тока численно равна заряду, проходящему через сечение проводника за единицу времени

$$[I] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{Кл}{с} = A$$

Сила тока – скаляр (не вектор)

$$I = \frac{q}{\Delta t}$$

- только для постоянного тока

Плотность тока

Определение: $j = \dfrac{dI}{dS}$

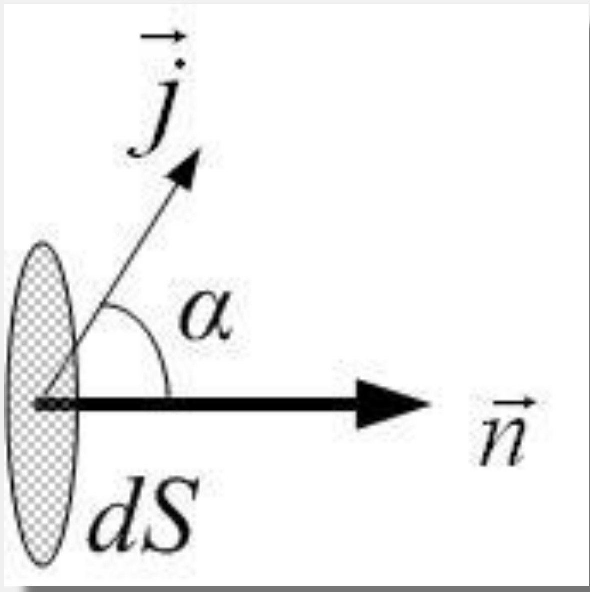
Плотность тока – это сила тока, приходящаяся на единицу площади сечения проводника

$$[j] = \frac{[I]}{[S]} = \frac{A}{м^2}$$

Плотность тока – вектор; направлен параллельно скорости движения зарядов

$$j = \frac{dI}{dS}$$

$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ – ток, проходящий через элемент сечения проводника ***dS***



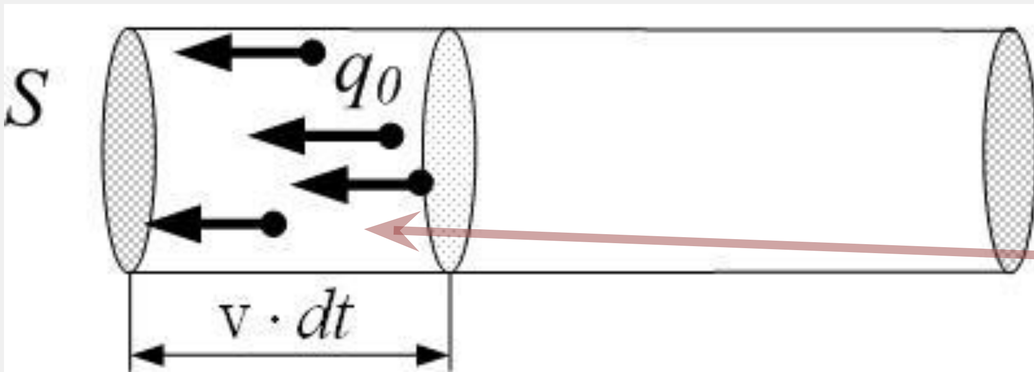
Полный ток через поверхность ***S*:**

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j \cdot \cos\alpha \cdot dS$$

v - средняя скорость направленного движения зарядов

q_0 – заряд частицы

n – концентрация заряженных частиц



$$dN = n \cdot dV$$

$$dV = S v dt$$

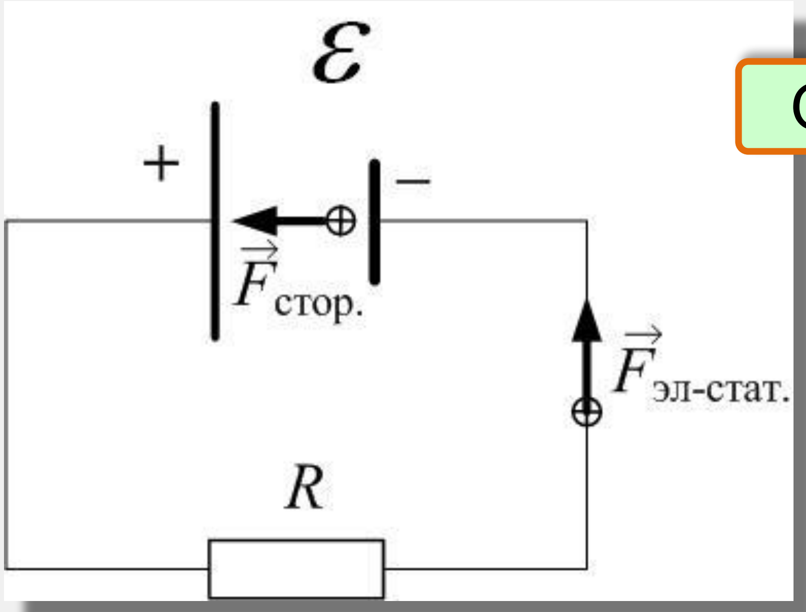
$dq = q_0 \cdot dN$ – заряд, перенесённый через сечение ***S*** за ***dt***

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q_0 \cdot n \cdot S \cdot v \cdot dt}{dt} = q_0 \cdot n \cdot S \cdot v$$

$$j = \frac{I}{S} = \frac{q_0 \cdot n \cdot \cancel{S} \cdot v}{\cancel{S}} = q_0 \cdot n \cdot v \rightarrow \boxed{\vec{j} = q_0 \cdot n \cdot \vec{v}}$$

Электродвижущая сила (ЭДС)

Для того, чтобы <u>ток</u> в проводнике <u>поддерживался</u>, нужны сторонние силы (неэлектростатические)



Определение:

ЭДС источника – это работа сторонних сил по переносу единичного заряда в цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{стор.}}{q}$$

$$[\mathcal{E}] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{Дж}{Кл} = В \quad (\text{Вольт})$$

$$\vec{E}_{\text{стор.}} = \frac{\vec{F}_{\text{стор.}}}{q}$$

- напряжённость поля сторонних сил

Сила, действующая на заряд:

$$\vec{F}_{\text{стор.}} = q \cdot \vec{E}_{\text{стор.}}$$

Работа сторонних сил при переносе заряда ***q*** на произвольном участке цепи от точки 1 до точки 2:

$$A_{\text{стор.}12} = \int_1^2 dA_{\text{стор.}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{стор.}} d\vec{l} = \int_1^2 q \cdot \vec{E}_{\text{стор.}} d\vec{l} = q \cdot \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} d\vec{l}$$

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор.}}}{q} \rightarrow \mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} d\vec{l}$$

Для замкнутого контура:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_{\text{стор.}} d\vec{l}$$

Напряжённость суммарного поля кулоновских (электростатических) и сторонних сил равна:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}}$$

Суммарная (полная) сила:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = q \cdot \left(\vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}}\right)$$

Работа суммарной силы при переносе заряда на участке цепи при переносе заряда *q* на произвольном участке цепи от точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \cdot \int_1^2 \left(\vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}}\right) \cdot d\vec{l} = q \cdot \boxed{\int_1^2 \vec{E}_{\text{кул.}} d\vec{l}} + q \cdot \boxed{\int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} d\vec{l}}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул.}} d\vec{l}$$

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор.}} d\vec{l}$$

$$\boxed{A_{12} = q \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + q \cdot \mathcal{E}_{12}}$$

Напряжение

Определение:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q}$$

Напряжение численно равно суммарной работе кулоновских и сторонних сил по переносу единичного заряда на данном участке цепи

$$A_{12} = q\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) + q\cdot\varepsilon_{12}$$

$$U_{12} = \frac{q\cdot(\varphi_1 - \varphi_2) + q\cdot\varepsilon_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}$$

$$\boxed{U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}$$

Напряжение

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$$

Понятие напряжения обобщает понятия разность потенциалов и ЭДС

Частные случаи:

Контур замкнут (1=2)

$\varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow U = \mathcal{E}$

Однородный участок цепи (не содержит ЭДС) $U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)$

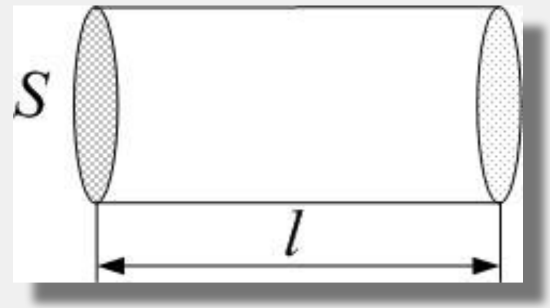
Закон Ома (для участка цепи)

Установлен экспериментально

$$I = \frac{U}{R}$$

Сопротивление проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



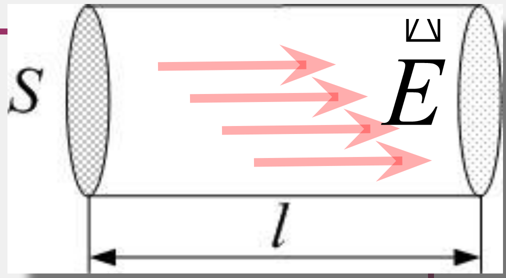
Зависит от температуры:

$$\boxed{\rho} = \boxed{\rho_0}(1 + \alpha \cdot t),$$
$$\boxed{R} = \boxed{R_0}(1 + \alpha \cdot t)$$

При температуре t^0C

При 0^0C

Закон Ома в дифференциальной (локальной) форме



$$\begin{cases} j = \dfrac{I}{S} \\ I = \boxed{\dfrac{U}{R}} \\ R = \rho \dfrac{l}{S} \\ U = \boxed{E \cdot l} \end{cases} \Rightarrow \quad j = \frac{I}{S} = \frac{U}{SR} = \frac{U}{S\rho \frac{l}{S}} = \frac{U}{\rho \cdot l} = \frac{\boxed{E \cdot l}}{\rho \cdot l} = \boxed{\frac{E}{\rho}}$$

Определение: $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\rho}}$

Удельная электропроводимость – это величина, обратная удельному сопротивлению

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}}$$

Закон Ома

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot \left(\vec{E}_{\text{кул.}} + \vec{E}_{\text{стор.}}\right)$$

Закон Ома в интегральной форме для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R} \equiv \frac{U_{12}}{R} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R}$$

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon$$

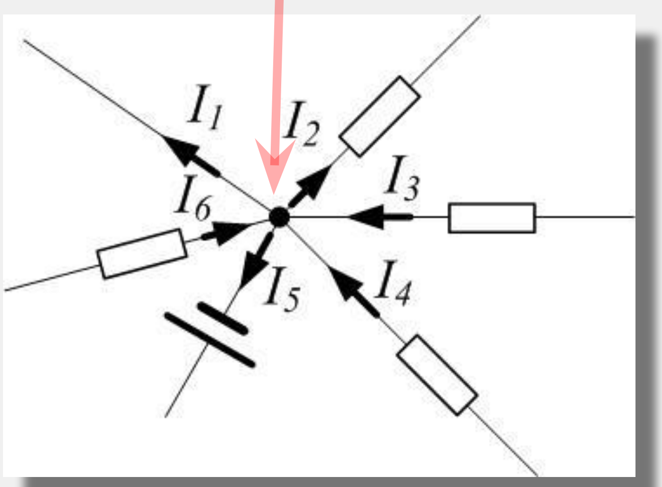
Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей

Первое правило (для узла)

$$\sum_i I_i = 0$$

I правило:
Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

Узел



Пример:

$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей

Второе правило (для произвольного контура)

Для каждого участка любого замкнутого контура:

$$(IR)_i = (\varphi_1 - \varphi_2)_i + \varepsilon_i$$

Просуммируем по всему замкнутому контуру с учётом, что поле кулоновских сил потенциально:

$$\sum_i (\varphi_1 - \varphi_2)_i = \oint_L \vec{E}_{\text{кул.}} d\vec{l} = 0$$

$$\boxed{\sum_i (IR)_i = \sum_i \varepsilon_i}$$

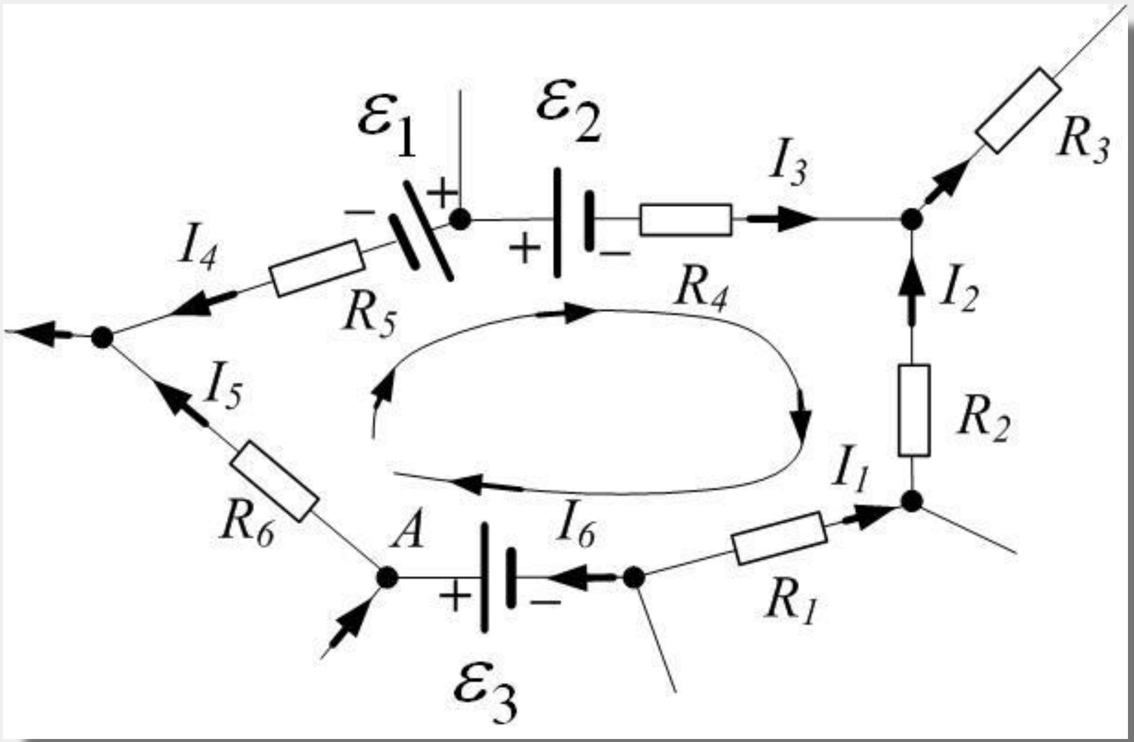
II правило:

Алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС, включенных в данный контур.

Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей

Второе правило (для произвольного контура)

Пример:

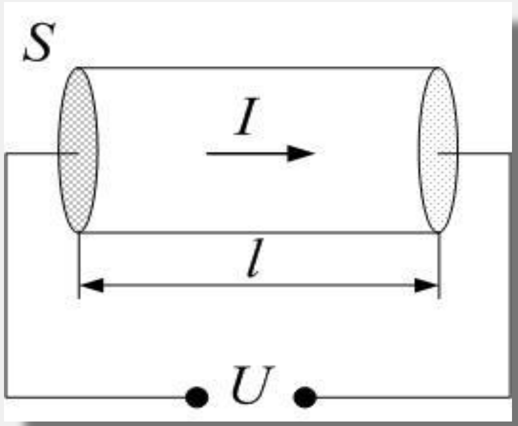


$$\sum_i (IR)_i = \sum_i \varepsilon_i$$

$$I_5R_6 - I_4R_5 + I_3R_4 - I_2R_2 - I_1R_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца

Работа тока за малый промежуток времени dt по переносу заряда $dq=Idt$ по проводнику сопротивлением R, на который подано напряжение U равна:



$$dA = dq \cdot U$$

$$dA = \boxed{dq} \cdot U = I \cdot U \cdot dt$$

Мощность тока:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{I \cdot U \cdot dt}{dt} = \boxed{I \cdot U}$$

$$P = I \cdot U = I \cdot (I \cdot R) = \boxed{I^2 R}$$

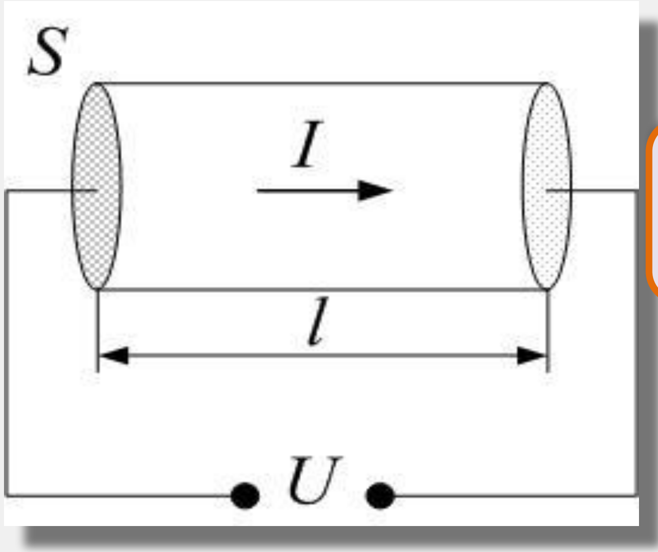
$$P = I \cdot U = \frac{U}{R} \cdot U = \boxed{\frac{U^2}{R}}$$

$$\boxed{P = I \cdot U = I^2 R = \frac{U^2}{R}}$$

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме

Если работа сводится к выделению теплоты на резисторе, то:

$$dA = dQ = IUdt$$

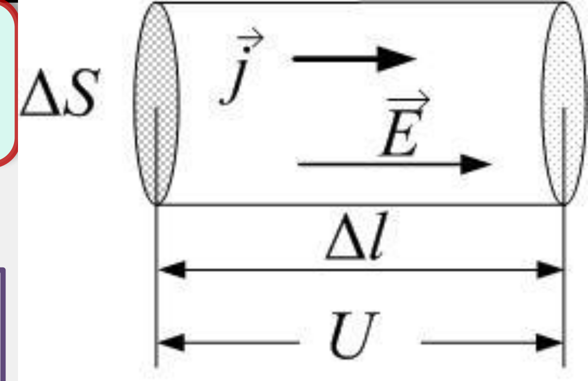


Теплота, выделившаяся за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dQ = \int_{t_1}^{t_2} IUdt$$

$$Q = R \cdot \int_{t_1}^{t_2} I^2 dt$$

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной (локальной) форме



Удельная тепловая мощность тока равна количеству теплоты, выделяющемуся в единице объёма проводника за единицу времени:

$$w = \frac{dQ}{dt \cdot \Delta V}$$

$$w = \frac{dQ}{dt \cdot \Delta V} = \frac{I \cdot U \cdot \cancel{dt}}{\cancel{dt} \cdot \Delta S \cdot \Delta l} = \frac{I \cdot U}{\Delta S \cdot \Delta l} = \frac{I}{\Delta S} \cdot \frac{U}{\Delta l} = j \cdot E$$

$$\boxed{w = j \cdot E}$$

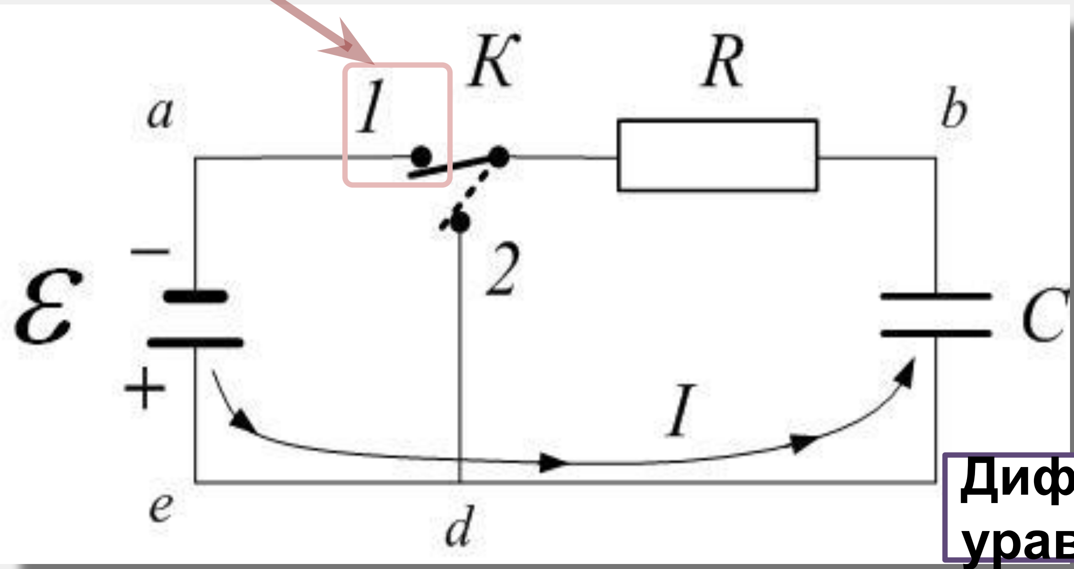
$$j = \gamma \cdot E \qquad E = j \cdot \rho$$

$$w = j \cdot E = \gamma \cdot E^2$$

$$w = j \cdot E = j \cdot (j \cdot \rho) = \rho \cdot j^2$$

Процессы заряда и разряда конденсатора

А) заряд



II правило Кирхгофа

$$I \cdot R + U = \mathcal{E}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q'$$

$$U = \frac{q}{C}$$

Дифф. уравнение:

$$q' \cdot R + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

Решение уравнения:

$$q = C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Доказательство решения:

$$q = C\cdot\mathcal{E}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q' = C\cdot\mathcal{E}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)'$$

$$q' = C\cdot\mathcal{E}\left(0 - e^{-\frac{t}{RC}}\cdot\left(-\frac{1}{RC}\right)\right)$$

$$q' = \frac{\cancel{C}\cdot\mathcal{E}}{R\cancel{C}}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q'\cdot R + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{\cancel{R}}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot\cancel{R} + \frac{\cancel{C}\cdot\mathcal{E}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{\cancel{C}} = \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E}\cdot\left(e^{-\frac{t}{RC}} + 1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \mathcal{E}$$

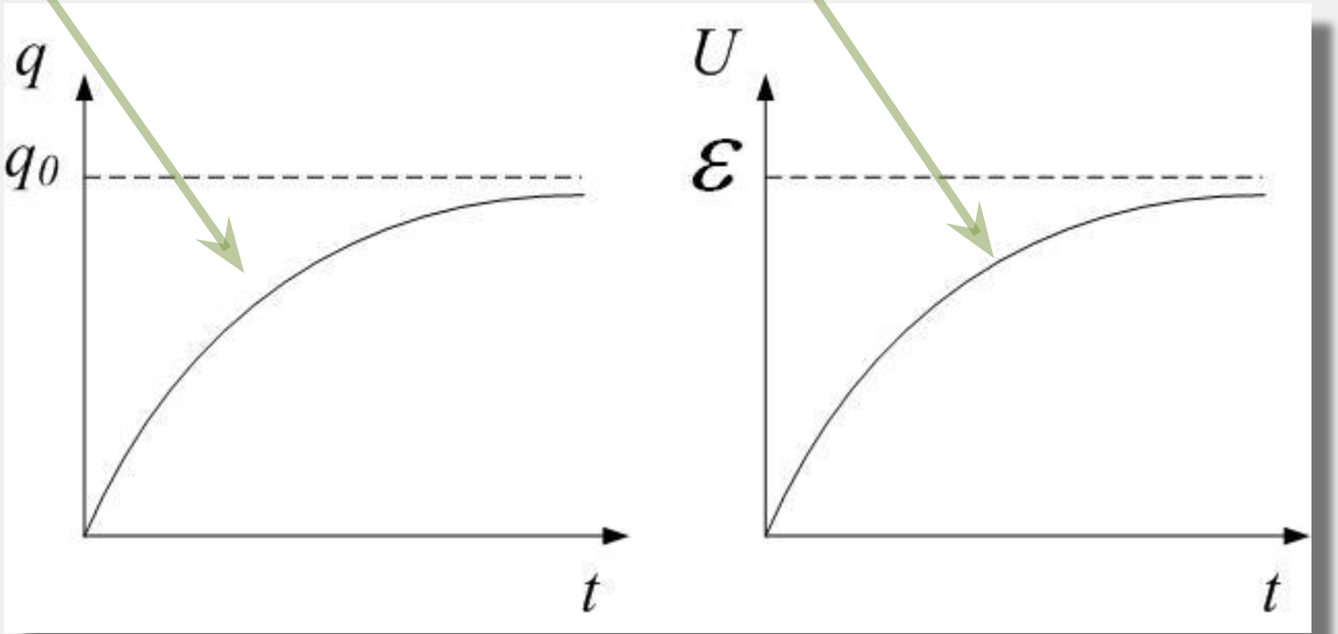
$$q = C \cdot \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$q_0 = C \cdot \mathcal{E}$$

– максимальный заряд, до которого заряжается конденсатор

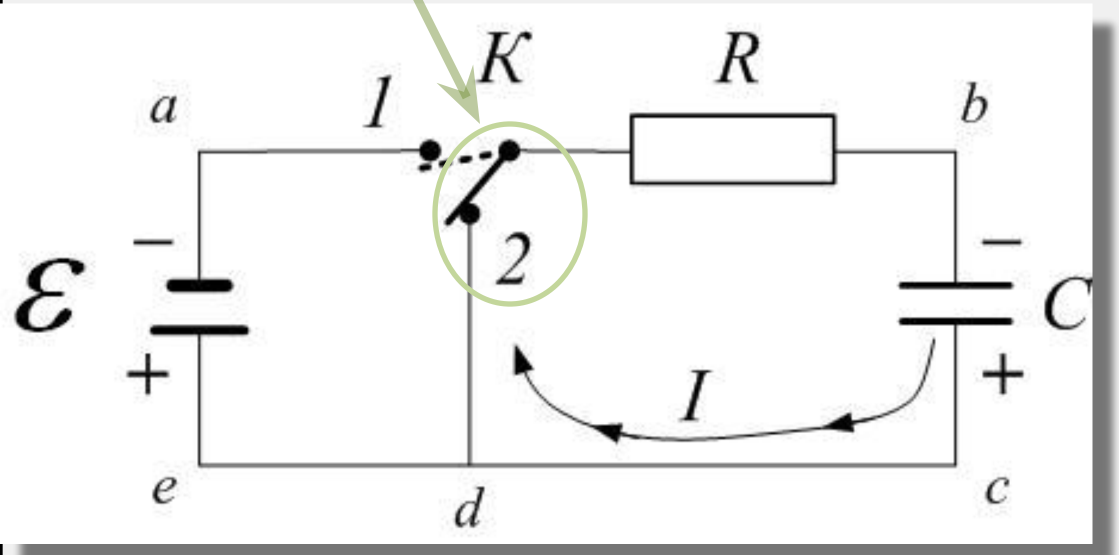
$$q(t) = q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$U = \frac{q}{C} = \mathcal{E} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



Процессы заряда и разряда конденсатора

Б) Разряд конденсатора



II правило Кирхгофа:

$$I \cdot R + U = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q'$$

$$U = \frac{q}{C}$$

Дифф. уравнение :

$$q' \cdot R + \frac{q}{C} = 0$$

Решение уравнения:

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Доказательство решения:

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \equiv q' = q_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{RC}} \right)'$$

$$q' = q_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC} \right) \right)$$

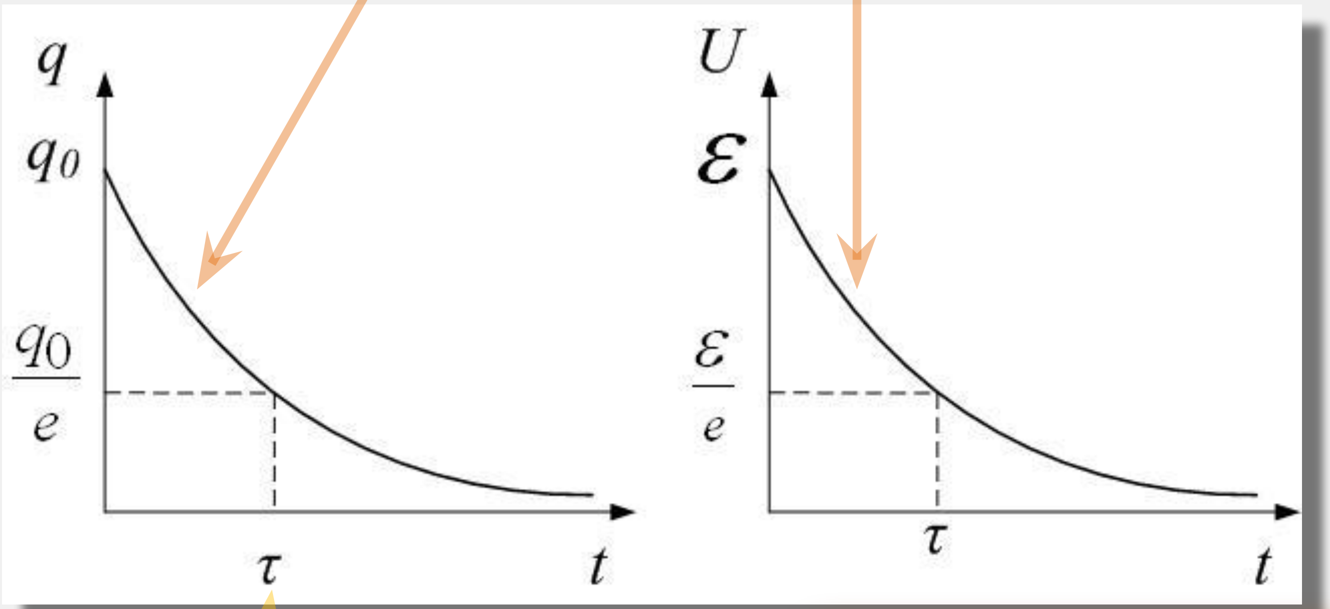
$$q' = -\frac{q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q' \cdot R + \frac{q}{C} = 0$$

$$-\frac{q_0}{\cancel{R}C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \cancel{R} + \frac{q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}{C} = 0 \rightarrow \frac{q_0}{C} \cdot \left(-e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-\frac{t}{RC}} \right) = 0$$

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \mathcal{E} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



Определение: $\tau = RC$ **– постоянная времени RC-цепочки**

$$q = q_0 \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}} = q_0 \cdot e^{-\frac{RC}{RC}} = q_0 \cdot e^{-1} = \frac{q_0}{e} \approx \frac{q_0}{2.7}$$

За время релаксации ***τ*** заряд конденсатора уменьшается в ***e*** раз