

---

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ЛОГИКА И  
ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ**

---

---

# **Структура курса**

## **1. Математическая логика**

### **1.1. Логика высказываний**

### **1.2. Алгебра логики**

### **1.3. Логика предикатов**

## **2. Аксиоматический метод**

## **3. Теория алгоритмов**

---

- 
1. Игошин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. - Москва, 2008.
  2. Молчанов, В. А. Логика высказываний: учебное пособие для студентов факультета компьютерных наук и информационных технологий. - Саратов, 2014.
  3. Ершов, Ю. Л., Е. А. Палютин. Математическая логика. - Москва, 2011.
  4. Игошин, В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие. - Москва, 2007.
-

---

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

---

---

# Предмет математической логики

---

---

Логика возникла в VI—IV вв. до н. э. как «анализ мышления», т.е. анализ принципов правильных рассуждений.

Основоположник логики — древнегреческий ученый Аристотель (384-322 гг. до н. э.), который в сочинениях «Аналитики» впервые изложил идею дедуктивного вывода.

---

**ЛОГИКА** — междисциплинарная отрасль наук, изучающая

- законы причинно-следственной связи в окружающем мире;
- проявление законов причинно-следственной связи в рациональном мышлении человека (законы правильного мышления);
- отражение законов причинно-следственной связи в языках (естественных и искусственных).

# ЛОГИКА (ФОРМАЛЬНАЯ)

изучает формы, в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

# Научные законы

Утверждения	Физика	География	Физиология
$P_1$	Каждый металл — проводник	В каждом южном городе летом тепло	Все люди смертны
$P_2$	Ртуть — металл	Сочи — южный город.	Сократ — человек
Заключение	Ртуть — проводник	В Сочи летом тепло	Сократ смертен

**Общая форма всех этих законов  
- закон формальной логики**

$P_1$ . Каждый предмет, обладающий свойством  $R$ , обладает свойством  $Q$ .

$P_2$ : Предмет  $a$  обладает свойством  $R$ .

Заключение: Предмет  $a$  обладает свойством  $Q$ .

# Закон формальной логики в символьном виде

$$P_1: (\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x)).$$

$$P_2: R(a)$$

$$Q(a).$$

Одна из основных задач логики - систематическая формализация и каталогизация таких законов - правильных способов рассуждений.

В общем случае рассуждение - это последовательность умозаключений.

Умозаключение - способ получения новых суждений  $\Phi$  из ранее известных суждений  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ . Схематически это изображается диаграммой:

$$\frac{\Phi_1, \dots, \Phi_n}{\Phi}, \text{ где } \Phi_1, \dots, \Phi_n - \text{ посылки и } \Phi -$$

- заключение умозаключения.

---

Умозаключение называется:

- *дедуктивным*, если оно основано на структуре посылок и следствия, т.е. имеет общий характер;
- *индуктивным*, если оно основано на анализе содержания посылок и следствия, т.е. имеет частный конкретный характер.

В математике главную роль играют дедуктивные умозаключения, которые лежат в основе аксиоматического метода построения научной теории.

---

---

**Математическая логика** занимается задачами формализации и обоснования правильных способов рассуждений с помощью **математического аппарата.**

Главная цель – изучение **математических рассуждений** с целью точного определения понятия «**математическое доказательство**».

Первый исследователь этого направления - немецкий математик **Г.Лейбниц (1646—1716).**

---

## Этапы развития математической логики:

Английский математик Дж.Буль (1815—1864) создал алгебру логики.

Немецкий математик Г.Фреге (1848—1925) разработал логико-математические языки и теорию их осмысления (так называемую семантику).

Итальянский математик Дж.Пеано (1858—1932) изложил арифметику на языке математической логики.

---

В XIX веке математическая логика стала основанием всех математических наук:

- открытие неевклидовой геометрии,
- поиски обоснования математического анализа,
- открытие парадоксов, т.е. рассуждений, приводящих к противоречиям.

Парадокс Рассела (1902 г.):

$$A = \{X : X \in X\}$$

Парадокс лжеца: «Я лгу»

---

---

Анализ парадоксов привел к созданию программы Д.Гильберта (1862—1943) обоснования математики на основе **аксиоматического подхода.**

Систематический подход к математике на основе математической логики впервые изложили английские математики Б.Рассел (1872—1970) и А.Уайтхед (1861—1947) в работе «Основания математики» (1910—1913).

К.Гедель (1906-1978) показал ограниченность аксиоматического подхода к обоснованию математики.

---

---

Главная задача современной математической логики — изучение формальных теорий, представляющих собой множества теорем, получающихся из исходных аксиом с помощью дедуктивных умозаключений.

Проблемы: **непротиворечивость, полнота и разрешимость теорий.**

**Проблема разрешимости теорий — первоисточник теории алгоритмов!**

---

# Основная задача формальной логики.

База знаний – система аксиом:

$$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}.$$

Предложение:  $\psi$ .

**Задача (формальная):** проверить, что  $\psi$  **выводится** из  $\Gamma$  по законам формальной логики.

## Для решения такой задачи необходимо:

- Создать **формальный язык** для представления знаний.
- Выделить необходимую **систему законов** формальной логики.
- Проверить **корректность** логических законов.
- Проверить **полноту** построенной системы логических законов.
- Разработать **алгоритм** проверки **выводимости** одних предложений из других по заданным логическим законам.

В наше время бурное развитие математической логики и теории алгоритмов обусловлено:

- распространением информационно-коммуникационных технологий на основе современной компьютерной техники,
- необходимостью создания теоретических основ обработки и передачи информации, математического моделирования самых разнообразных задач и процессов.

# Логика в информатике

В предыдущем примере:

➤ *исходные знания (база знаний):*

$P_1$ : Каждый металл — проводник.

$P_2$ : Ртуть — металл.

➤ *новые знания:*

Ртуть — проводник.

**Новые знания –  
результат применения закона  
формальной логики:**

$$P_1: (\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$P_2: R(a)$$

$$Q(a)$$

**Использована интерпретация  
формул закона логики:**

$R(x)$  — «предмет  $x$  — металл»;

$Q(x)$  — «предмет  $x$  — проводник»;

$a$  — «ртуть».

## Другая интерпретация формул закона логики:

$R(x)$  — «предмет  $x$  — южный город»;

$Q(x)$  — «предмет  $x$  — теплый летом»;

$a$  — «Сочи».



# Основная задача формальной логики.

База знаний – система аксиом:

$$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}.$$

Предложение:  $\psi$ .

**Задача (формальная):** проверить, что  $\psi$  выводится из  $\Gamma$  по законам формальной логики.

**Задача (неформальная):** выяснить, является ли предложение  $\psi$  следствием утверждений базы знаний  $\Gamma$ .

Приложение 1.

## Экспертные системы

База знаний  $\Gamma$  — база знаний экспертной системы.

Предложение  $\psi$  — запрос к базе знаний.

Аппарат логического вывода — ядро экспертной системы.

## Автоматизация научных исследований

База знаний  $\Gamma$  — система аксиом математической теории.

Предложение  $\psi$  — математическое утверждение.

Аппарат логического вывода — ядро автоматической системы доказательства теорем.

## Для реализации приложений 1,2 необходимо:

- Создать **формальный язык** для представления знаний.
- Выделить необходимую **систему законов** формальной логики.
- Проверить **корректность** логических законов.
- Проверить **полноту** построенной системы логических законов.
- Разработать **алгоритм** проверки **выводимости** одних предложений из других по заданным логическим законам.

## Программирование

Вычисление программы — последовательное преобразование интерпретатором одних состояний данных в другие согласно заданному алгоритму.

Логический вывод (доказательство) — последовательное построение по законам формальной логики одних утверждений из других, исходя из заданной базы знаний.

Программа	База знаний $\Gamma$
Вызов программы	Запрос $\psi$
Вычисление программы	Логический вывод (доказательство)
Интерпретатор программ	Правила вывода

Однако успешное вычисление программы завершается результатом, но не всякое доказательство, даже если оно корректно, является «результативным» (конструктивным).

Теоремы существования можно доказать, не предъявив при этом искомого объекта.

## Для этого необходимо:

- Разработать **формальный язык** для представления программ в виде логических утверждений.
- Сделать **логическое доказательство** конструктивным, чтобы оно могло играть роль вычисления.
- Проверить **вычислительную корректность** этого способа доказательства.
- Проверить **алгоритмическую полноту** этого способа доказательства.
- Сделать этот способ программирования удобным для **пользования**.

---

# Логика высказываний

---

---

*Высказывание* - повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания  $A, B, C, \dots$

*Истинностное значение* высказывания  $A$  обозначается символом  $\lambda(A)$  и определяется по формуле:

$\lambda(A)=1$ , если высказывание  $A$  истинно, и

$\lambda(A)=0$ , если  $A$  ложно.

---

---

# Алгебра высказываний

---

Из высказываний путем соединения их различными способами (с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно») можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется истинностно-функциональным комбинациям, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

---

Определение. *Алгеброй высказываний*  
называется множество всех высказываний  $P$  с  
логическими операциями  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ .

---