

Общие методы решения уравнений

Метод замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$:

- ▣ при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$) к уравнению $f(x) = g(x)$;
- ▣ при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$), к уравнению $f(x) = g(x)$.

$y = h(x)$ – монотонная функция

$y = x^9$ – возрастающая функция

$$(5x + 3)^9 = (7x + 8)^9 \Leftrightarrow 5x + 3 = 7x + 8$$

$y = h(x)$ – немонотонная функция

$$(5x + 3)^8 = (7x + 8)^8 \not\Leftrightarrow 5x + 3 = 7x + 8$$

$$\sin 7x = \sin 5x \not\Leftrightarrow 7x = 5x$$

Метод разложения на множители:

- $f(x)g(x)h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ h(x) = 0. \end{cases}$

Пример:

Решить уравнение $(\sqrt{x+2} - 3)(2^{x^2+6x+5} - 1)\ln(x-8) = 0$.

Решение:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - 3 = 0 \\ 2^{x^2+6x+5} - 1 = 0 \\ \ln(x-8) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8$$

$$\sqrt{x+2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 3 \Leftrightarrow x+2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 7$$

$$2^{x^2+6x+5} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2+6x+5} = 2^0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -5; x_3 = -1$$

$$\ln(x-8) = 0 \Leftrightarrow x-8 = 1 \Leftrightarrow x_4 = 9$$

Ответ: 9.

Пример:

Решить уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Решение:

$$\begin{aligned}x^3 - 7x + 6 &= x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6)\end{aligned}$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -3; x_3 = 2$$

Ответ: $-3; 1; 2$.

Метод введения новой переменной:

- $$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ p(g(x)) &= 0 \\ u &= g(x) \\ p(u) &= 0 \\ \left[\begin{array}{l} g(x) = u_1, \\ g(x) = u_2, \\ \dots \\ g(x) = u_n. \end{array} \right. \end{aligned}$$

u_1, u_2, \dots, u_n — корни уравнения $p(u) = 0$.

Пример:

Решить уравнение $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$.

Решение:

$$u = x^2 - x$$

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21} \Leftrightarrow \sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}$$

$$(\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7})^2 = (\sqrt{2u + 21})^2$$

$$u + 2 + 2\sqrt{(u + 2)(u + 7)} + u + 7 = 2u + 21$$

$$\sqrt{(u + 2)(u + 7)} = 6$$

$$(\sqrt{(u + 2)(u + 7)})^2 = 36$$

$$u^2 + 9u + 14 = 36$$

$$u^2 + 9u - 22 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 2; u_2 = -11$$

$$\sqrt{u_1 + 2} + \sqrt{u_1 + 7} = \sqrt{2u_1 + 21} \Leftrightarrow \sqrt{2 + 2} + \sqrt{2 + 7} = \sqrt{2 \cdot 2 + 21} - \text{верно}$$

$$\sqrt{u_2 + 2} + \sqrt{u_2 + 7} = \sqrt{2u_2 + 21} \Leftrightarrow \sqrt{2 - 11} + \sqrt{2 - 11} = \sqrt{2 \cdot (-11) + 21} - \text{неверно}$$

$$x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$$

Ответ: $-1; 2$.

Пример:

Решить уравнение $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

Решение:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$$

$$u = \sin x$$

$$-2u^2 - 5u - 2 = 0$$

$$2u^2 + 5u + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -2$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -2 \end{array} \right.$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$\sin x = -2$ — уравнение не имеет решений

Ответ: $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример:

Решить уравнение $\lg^2 x^3 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$.

●
Решение:

$$\lg^2 x^3 = (3 \lg x)^2 = 9 \lg^2 x$$

$$\log_{0,1} 10x = \log_{10^{-1}} 10x = -\lg 10x = -(\lg 10 + \lg x)$$

$$\lg^2 x^3 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0 \Leftrightarrow 9 \lg^2 x - 1 - \lg x - 7 = 0$$

$$u = \lg x$$

$$9u^2 - u - 8 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1; u_2 = -\frac{8}{9}$$

$$\begin{cases} \lg x = 1 \\ \lg x = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\lg x = 1 \Leftrightarrow x = 10$$

$$\lg x = -\frac{8}{9} \Leftrightarrow 10^{-\frac{8}{9}}$$

Ответ: $10; 10^{-\frac{8}{9}}$.

Пример:

● Решить уравнение $x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40$.

Решение:

$$A^2 + B^2, A = x, B = \frac{9x}{9+x}$$
$$\left(x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} - 2x \frac{9x}{9+x}\right) + 2x \frac{9x}{9+x} = 40$$

$$\left(x - \frac{9x}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2 + 18 \frac{x^2}{9+x} = 40$$

$$u = \frac{x^2}{9+x}$$

$$u^2 + 18u - 40 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 2; u_2 = -20$$

Ответ: $1 \pm \sqrt{19}$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9+x} = 2 \\ \frac{x^2}{9+x} = -20 \end{cases}$$
$$\frac{x^2}{9+x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 18 + 2x \\ x \neq -9 \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$$
$$\frac{x^2}{9+x} = -20 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -180 - 20x \\ x \neq -9 \end{cases} \text{ — не имеет корней}$$

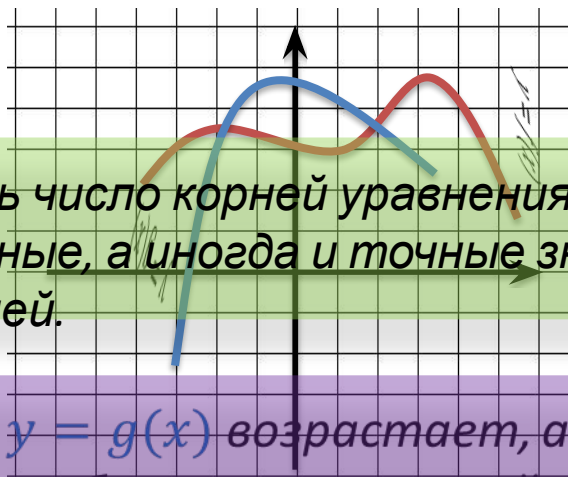
Функционально-графический

МЕТОД:

$$f(x) = g(x)$$

Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

Если одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень.



Пример:

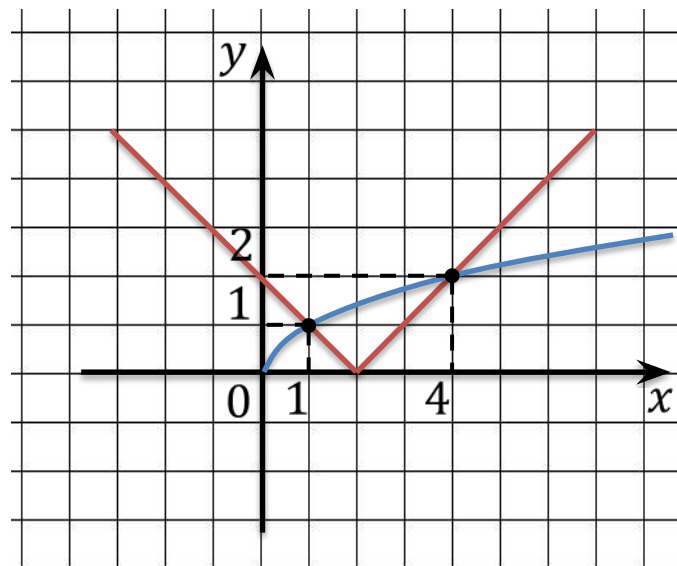
● Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Решение:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

Ответ: 1; 4.



Пример:

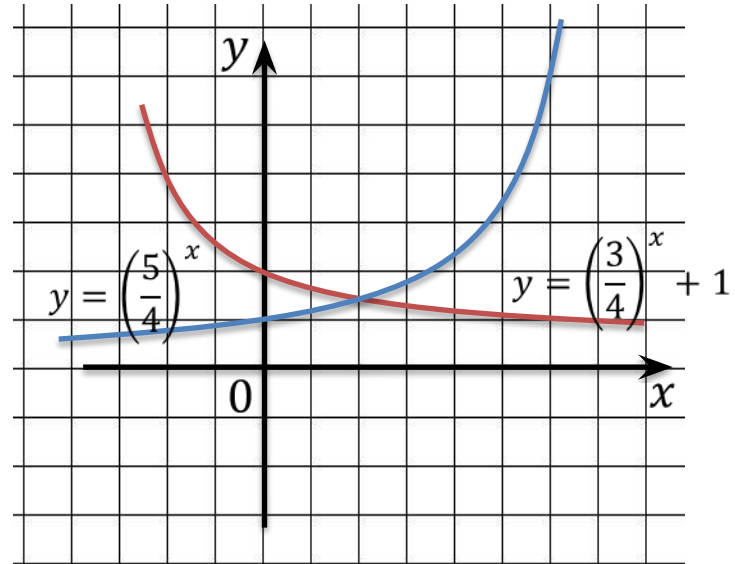
● Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$x = 2$ – корень уравнения

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$$



Ответ: 2.

Если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно a и наименьшее значение другой функции тоже равно a , то уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке X равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$$

● Решить уравнение $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение:

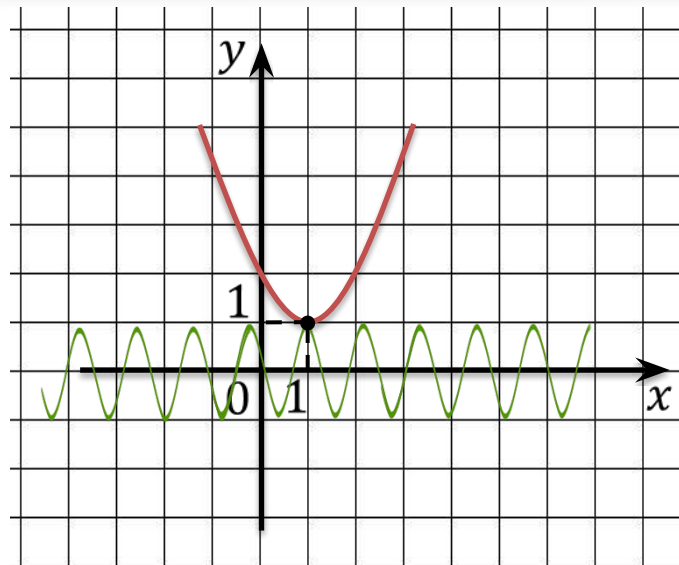
$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_{\text{в}} = 1; y_{\text{в}} = 1 \Rightarrow y_{\text{наим}} = 1$$

$$y = \cos 2\pi x \Rightarrow y_{\text{наиб}} = 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ \cos 2\pi x = 1 \end{cases}$$

Ответ: 1.



Метод замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Метод разложения на
множители

Метод введения новой
переменной

Функционально-графический
метод