Общие методы решения уравнений

Метод замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$:

- при решении показательных уравнений, когда переходили от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0, a \neq 1)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;
- при решении логарифмических уравнений, когда переходили от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$, к уравнению $f(x) = g(x)$.

$y = h(x) -$ монотонная функция

$y = x^9 -$ возрастающая функция

$$(5x+3)^9 = (7x+8)^9 \Leftrightarrow 5x+3 = 7x+8$$

$y = h(x) -$ немонотонная функция

$$(5x+3)^8 = (7x+8)^8 \nLeftrightarrow 5x+3 = 7x+8$$

$$\sin 7x = \sin 5x \nLeftrightarrow 7x = 5x$$

Метод разложения на множители:

- $$f(x)g(x)h(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ h(x) = 0. \end{array}\right.$$

Пример:

- Решить уравнение $\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0.$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}-3=0\\ 2^{x^2+6x+5}-1=0\\ \ln(x-8)=0\end{array}\right.$$

ОДЗ: $\begin{cases}x+2\geq 0\\ x-8>0\end{cases}\Leftrightarrow x>8$

$$\sqrt{x+2}-3=0\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=3\Leftrightarrow x+2=9\Leftrightarrow x_1=7$$

$$2^{x^2+6x+5}-1=0\Leftrightarrow 2^{x^2+6x+5}=2^0\Leftrightarrow x^2+6x+5=0\Leftrightarrow x_2=-5;\ x_3=-1$$

$$\ln(x-8)=0\Leftrightarrow x-8=1\Leftrightarrow x_4=9$$

Ответ: 9.

Пример:

- Решить уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Решение:

$$x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = x(x-1)(x+1) - 6(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2 + x - 6)$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{array}\right.$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -3;\ x_3 = 2$$

Ответ: $-3; 1; 2$.

Метод введения новой переменной:

- $$f(x) = 0$$
$$p(g(x)) = 0$$
$$u = g(x)$$
$$p(u) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} g(x) = u_1, \\ g(x) = u_2, \\ \quad\quad \dots \\ g(x) = u_n. \end{array}\right.$$
$u_1, u_2, \dots, u_n$ — корни уравнения $p(u) = 0$.

Пример:

- Решить уравнение $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$.

Решение:

$u = x^2 - x$

$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21} \Leftrightarrow \sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}$

$\left(\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7}\right)^2 = \left(\sqrt{2u + 21}\right)^2$

$u + 2 + 2\sqrt{(u + 2)(u + 7)} + u + 7 = 2u + 21$

$\sqrt{(u + 2)(u + 7)} = 6$

$\left(\sqrt{(u + 2)(u + 7)}\right)^2 = 36$

$u^2 + 9u + 14 = 36$

$u^2 + 9u - 22 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 2;\ u_2 = -11$

$\sqrt{u_1 + 2} + \sqrt{u_1 + 7} = \sqrt{2u_1 + 21} \Leftrightarrow \sqrt{2 + 2} + \sqrt{2 + 7} = \sqrt{2 \cdot 2 + 21}$ – верно

$\sqrt{u_2 + 2} + \sqrt{u_2 + 7} = \sqrt{2u_2 + 21} \Leftrightarrow \sqrt{2 - 11} + \sqrt{2 - 11} = \sqrt{2 \cdot (-11) + 21}$ – неверно

$x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2$

Ответ: $-1; 2$.

Пример:

- Решить уравнение $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

Решение:

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$

$u = \sin x$

$-2u^2 - 5u - 2 = 0$

$2u^2 + 5u + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -2$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -\frac{1}{2}\\ \sin x = -2\end{array}\right.$$

$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

$\sin x = -2$ – уравнение не имеет решений

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Пример:

Решить уравнение $\lg^2 x^3 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0$.

Решение:

$\lg^2 x^3 = (3\lg x)^2 = 9\lg^2 x$

$\log_{0,1} 10x = \log_{10^{-1}} 10x = -\lg 10x = -(\lg 10 + \lg x)$

$\lg^2 x^3 + \log_{0,1} 10x - 7 = 0 \Leftrightarrow 9\lg^2 x - 1 - \lg x - 7 = 0$

$u = \lg x$

$9u^2 - u - 8 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1;\ u_2 = -\dfrac{8}{9}$

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 1 \\ \lg x = -\dfrac{8}{9} \end{array}\right.$$

$\lg x = 1 \Leftrightarrow x = 10$

$\lg x = -\dfrac{8}{9} \Leftrightarrow 10^{-\frac{8}{9}}$

Ответ: $10;\ 10^{-\frac{8}{9}}$.

Пример:

- Решить уравнение $x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} = 40.$

Решение:

$$A^2 + B^2, A = x, B = \frac{9x}{9+x}$$

$$\left(x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} - 2x\frac{9x}{9+x}\right) + 2x\frac{9x}{9+x} = 40$$

$$\left(x - \frac{9x}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2 + 18\frac{x^2}{9+x} = 40$$

$$u = \frac{x^2}{9+x}$$

$$u^2 + 18u - 40 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 2;\ u_2 = -20$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{9+x} = 2 \\ \frac{x^2}{9+x} = -20 \end{array}\right.$$

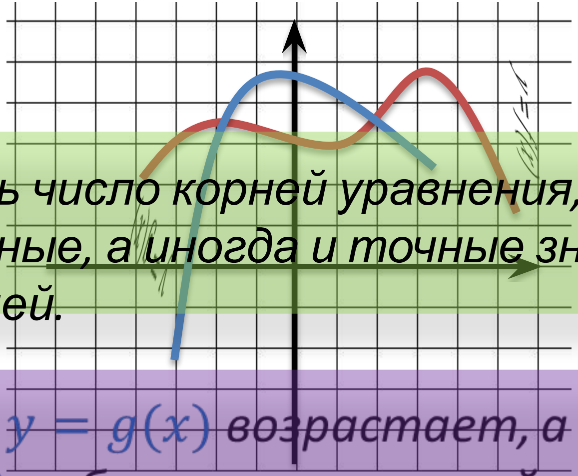
$$\frac{x^2}{9+x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 18 + 2x \\ x \neq -9 \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$$

$\frac{x^2}{9+x} = -20 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -180 - 20x \\ x \neq -9 \end{cases}$ – не имеет корней

Ответ: $1 \pm \sqrt{19}.$

Функционально-графический метод:

$$f(x) = g(x)$$



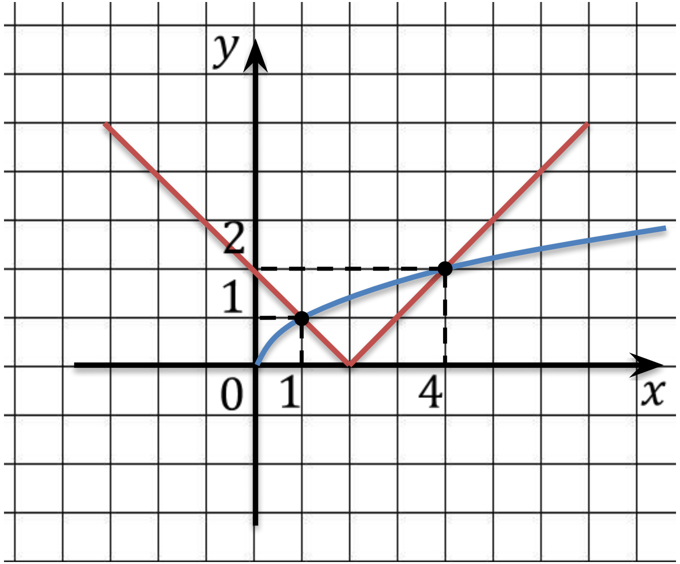
Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

Если одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень.

Пример:

- Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Решение:



$x_1 = 1$

$x_2 = 4$

Ответ: 1; 4.

Пример:

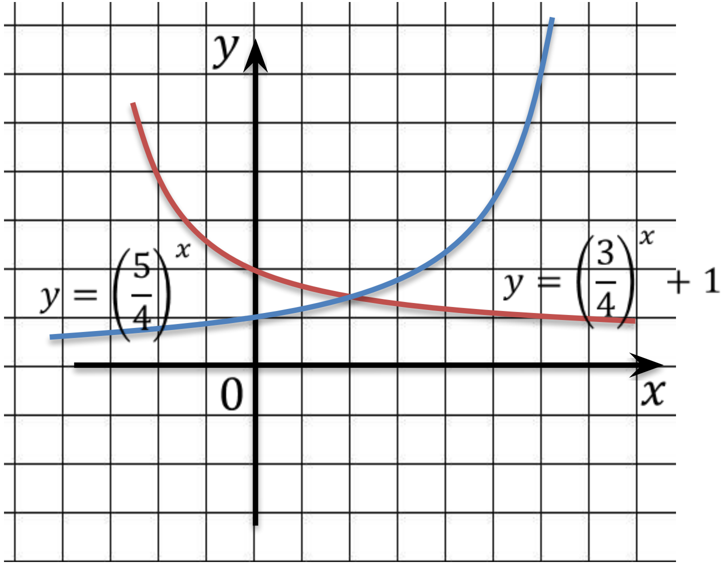
- Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение:

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$x = 2$ – корень уравнения

$\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$



Ответ: 2.

Если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно a и наименьшее значение другой функции тоже равно a, то уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке X равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$$

- Решить уравнение $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение:

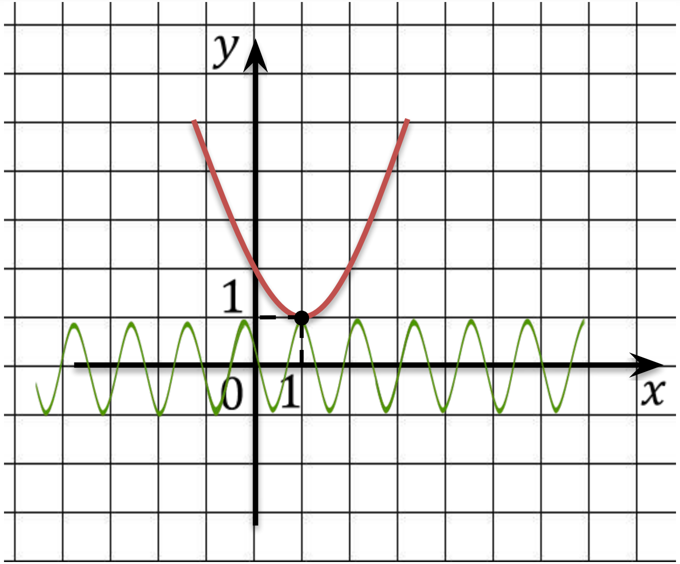
$y = x^2 - 2x + 2$

$x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x_{\text{в}} = 1;\ y_{\text{в}} = 1 \Rightarrow y_{\text{наим}} = 1$

$y = \cos 2\pi x \Rightarrow y_{\text{наиб}} = 1$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ \cos 2\pi x = 1 \end{cases}$$

Ответ: 1.



Метод замены уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$

Метод разложения на множители

Метод введения новой переменной

Функционально-графический метод