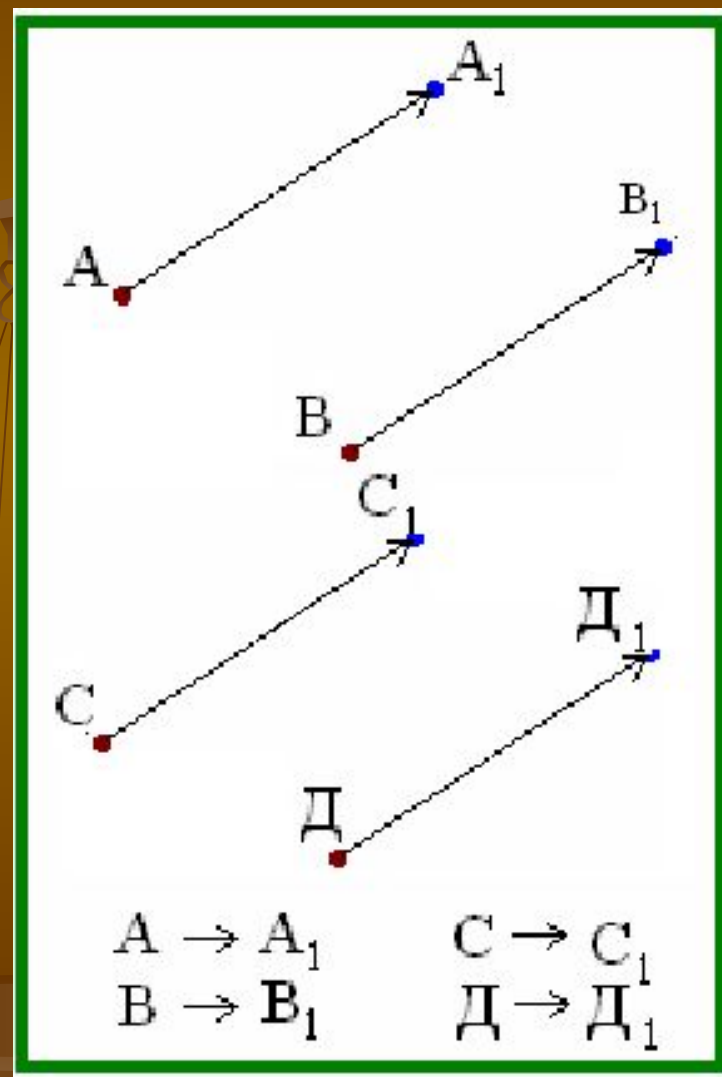


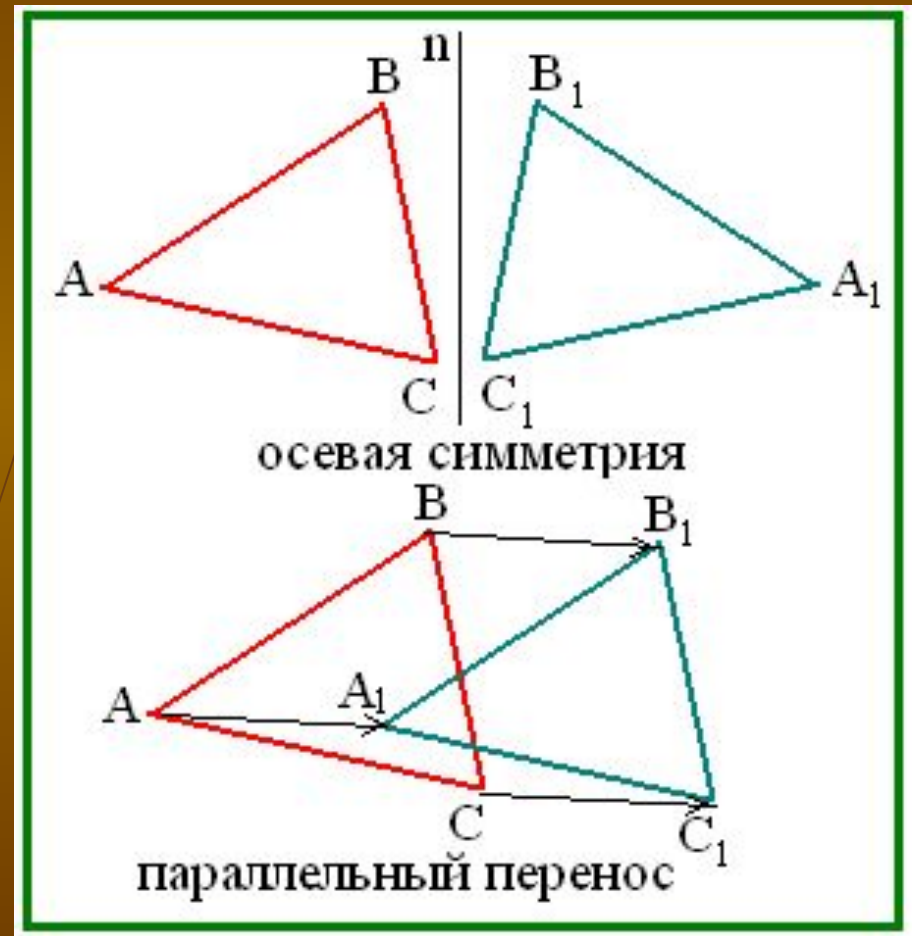
Отображение плоскости на себя – это движение плоскости.

- Представим себе, что каждой точке плоскости сопоставляется (ставится в соответствие) какая – то точка этой же плоскости, причём любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке. Говорят, что дано **отображение плоскости на себя**.
- **Движение плоскости** – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние.



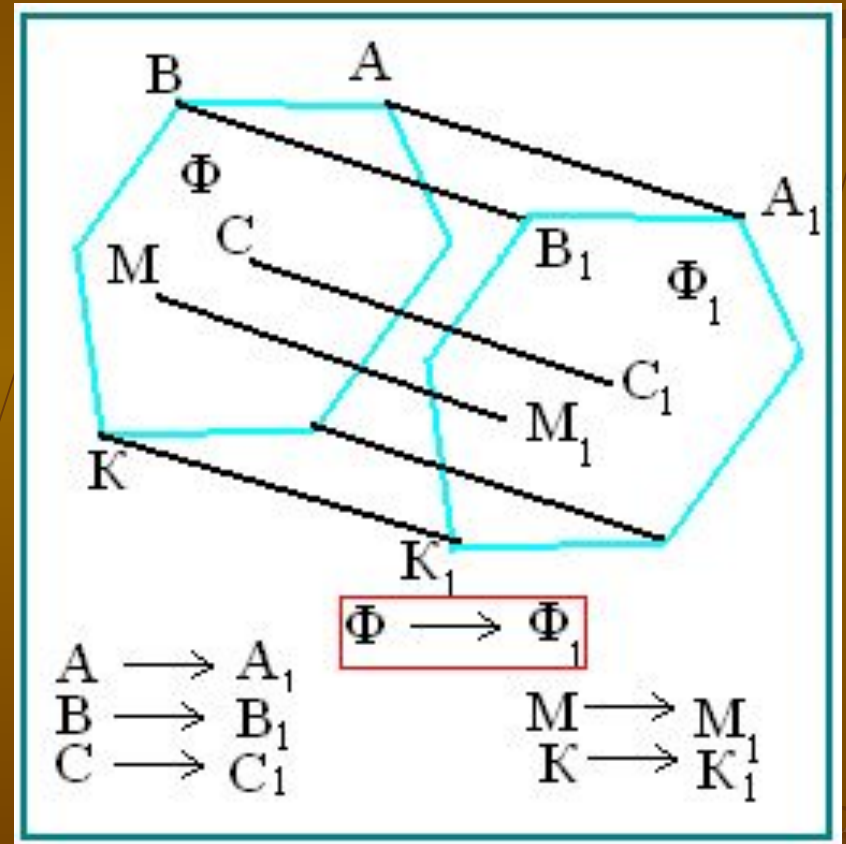
Понятие движения.

- Движение плоскости – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.
- Теорема. При движении отрезок отображается на отрезок.
- Следствие. При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.
- Примеры движения. Осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, параллельный перенос.



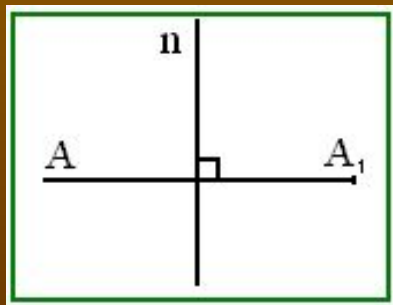
Наложения и движения.

- В курсе геометрии равенство фигур определяется с помощью наложений. Фигура Φ равна фигуре Φ_1 , если фигуру Φ можно совместить наложением с фигурой Φ_1 .
- Понятие наложения в геометрии относится к основным понятиям, поэтому определение наложения не даётся.
- **Наложение** – это отображение плоскости на себя.

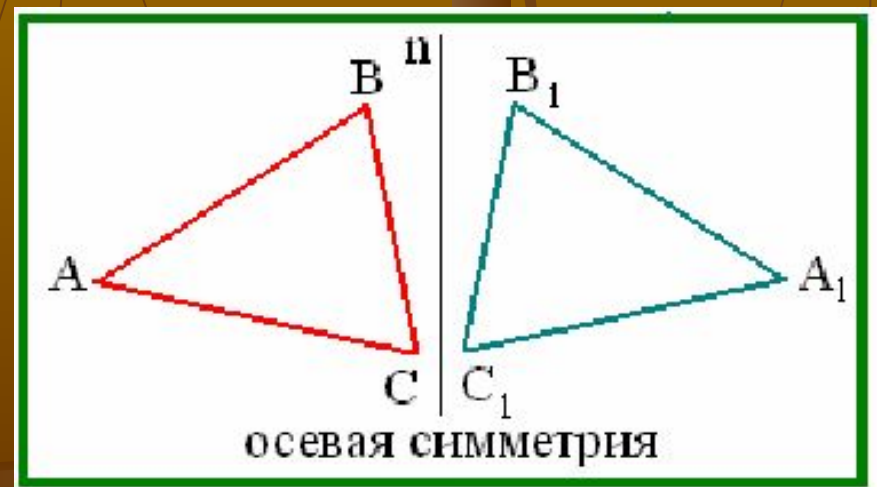


Осевая симметрия – это движение.

- Две точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой n , если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему. Прямая n называется осью симметрии.
- Каждая точка прямой n считается симметричной самой себе.

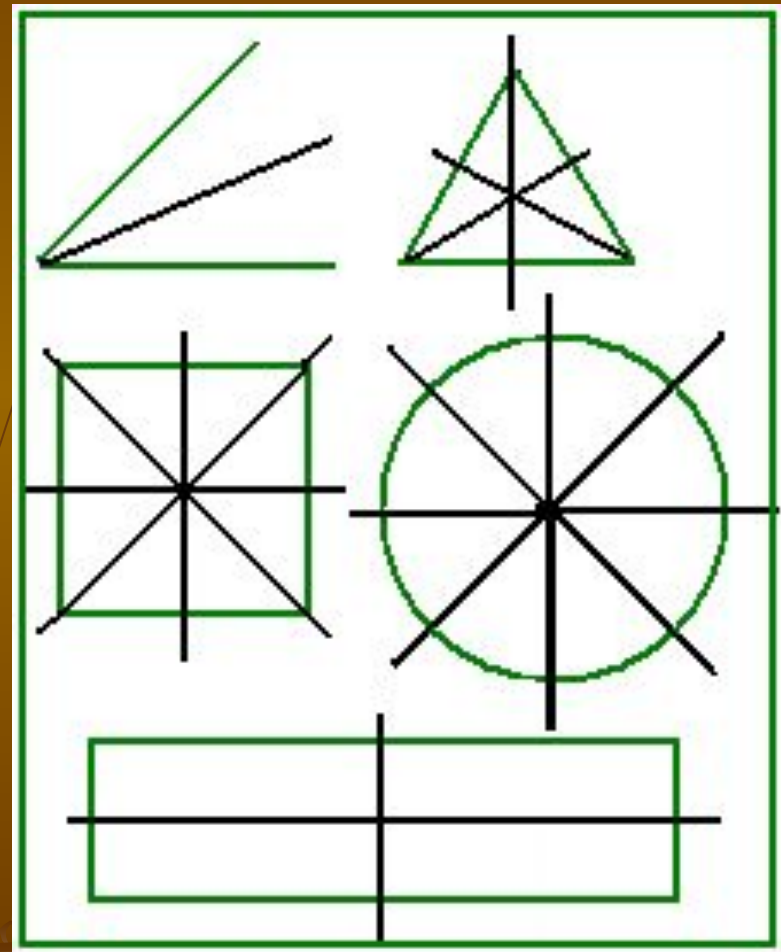


- Фигуры называются симметричными относительно прямой, если для каждой точки фигуры Φ соответствует симметричная точка фигуры Φ_1 относительно оси симметрии.



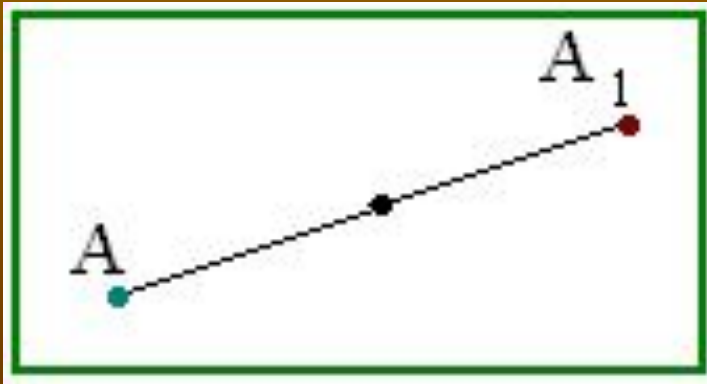
Фигуры, обладающие осевой симметрией.

- Фигура называется симметричной относительно прямой, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой также принадлежит этой фигуре.
- Имеются фигуры, у которых нет ни одной оси симметрии.

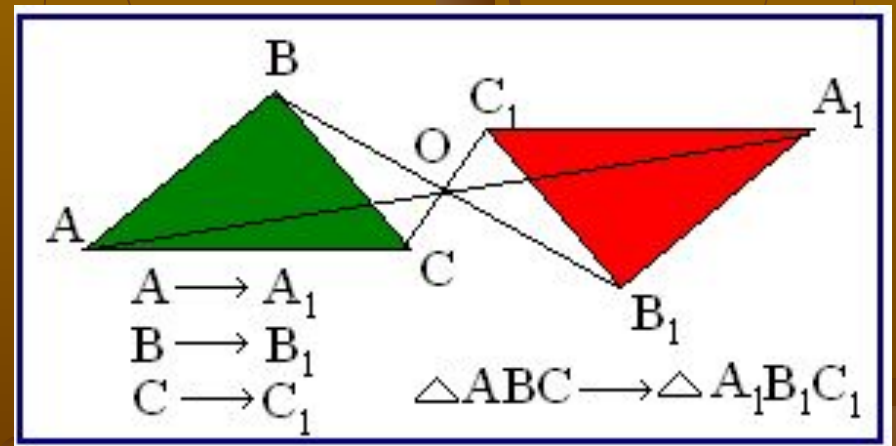


Центральная симметрия – это движение.

- Точки A и A_1 называются симметричными относительно точки O , если O – середина отрезка AA_1 . Точка O считается симметричной самой себе. Точка O называется центром симметрии.

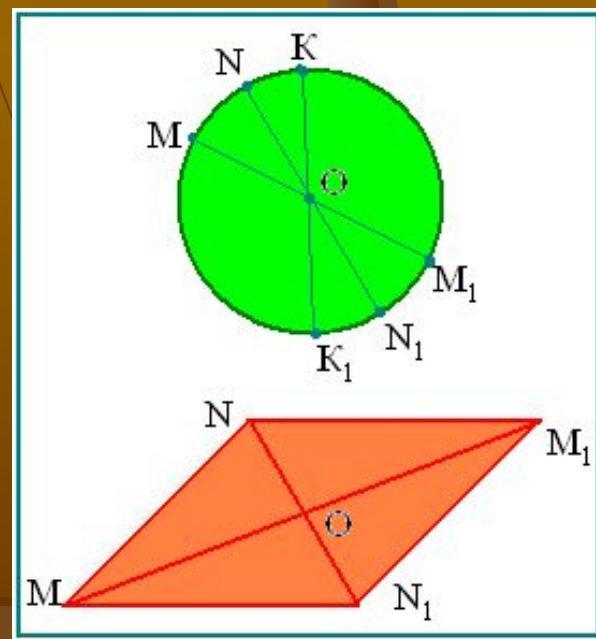


- Фигуры Φ и Φ_1 называются симметричными относительно точки O , если каждой точке фигуры Φ соответствует точка фигуры Φ_1 симметричная относительно центра O .



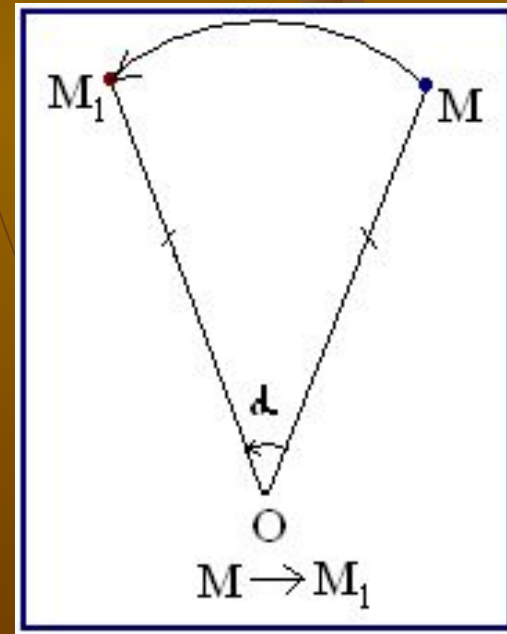
Фигуры, обладающие центральной симметрией.

- Фигура называется симметричной относительно точки O , если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре.
- Точка O называется центром симметрии фигуры, т. е. фигура обладает центральной симметрией.
- Центральная симметрия- это поворот плоскости на 180° .
- Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, является окружность и параллелограмм.



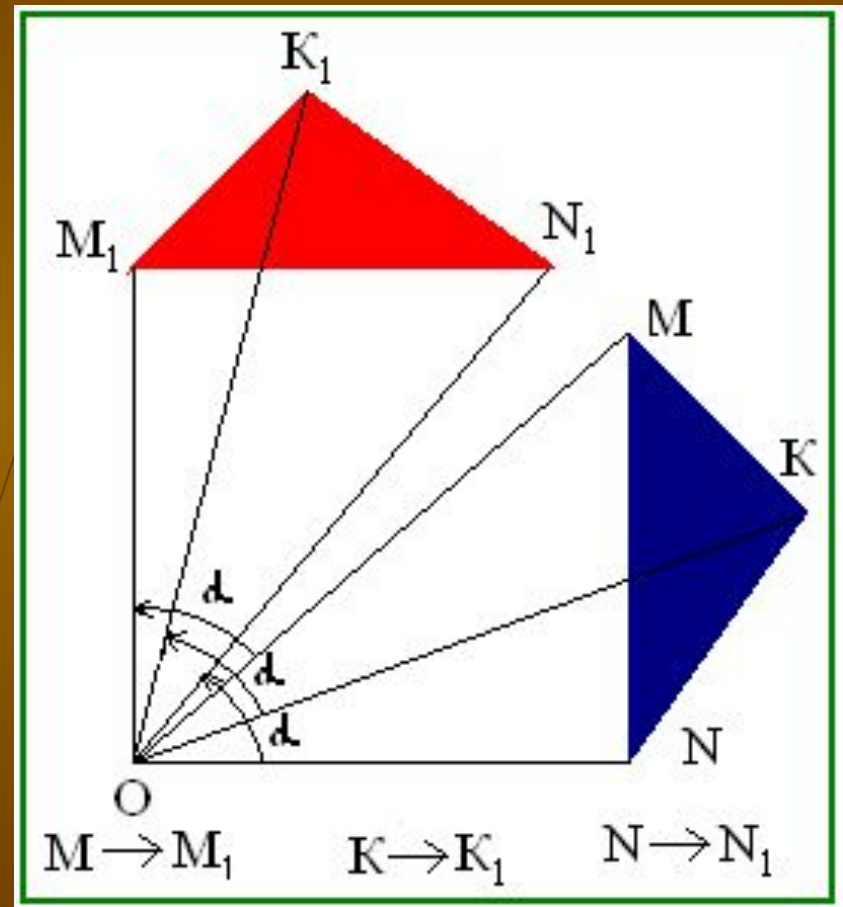
Поворот – это движение.

- Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1 что $OM = OM_1$ и угол MOM_1 равен α .
- При этом точка O остаётся на месте, те отображаются сама на себя, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении – по часовой стрелке или против.
- Поворот является движением (отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния).



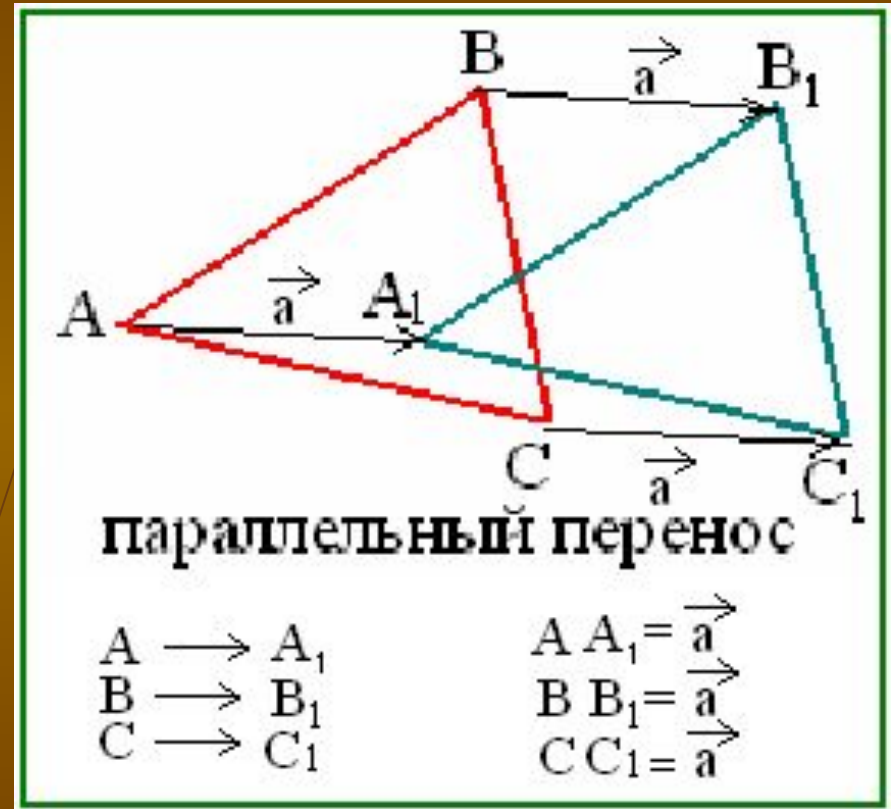
Поворот фигуры.

- Пусть O – центр поворота, α – угол поворота против часовой стрелки (так задаётся поворот).
- Поворот сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение.
- Это движение можно представить себе как поворот всей плоскости вокруг данной точки на данный угол.

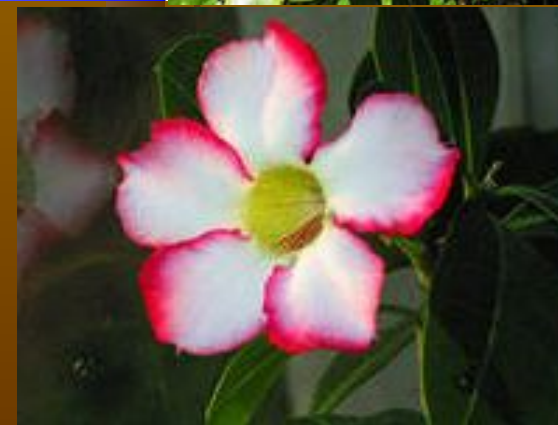
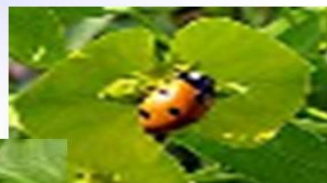


Параллельный перенос – это движение, которое сохраняет расстояние между точками.

- Пусть \vec{a} – данный вектор. Параллельным переносом на вектор \vec{a} называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка A отображается в соответственную точку A_1
- Параллельный перенос является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния.
- Это движение можно представить как сдвиг всей плоскости на вектор \vec{a} .



Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии или центр симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно стебля.

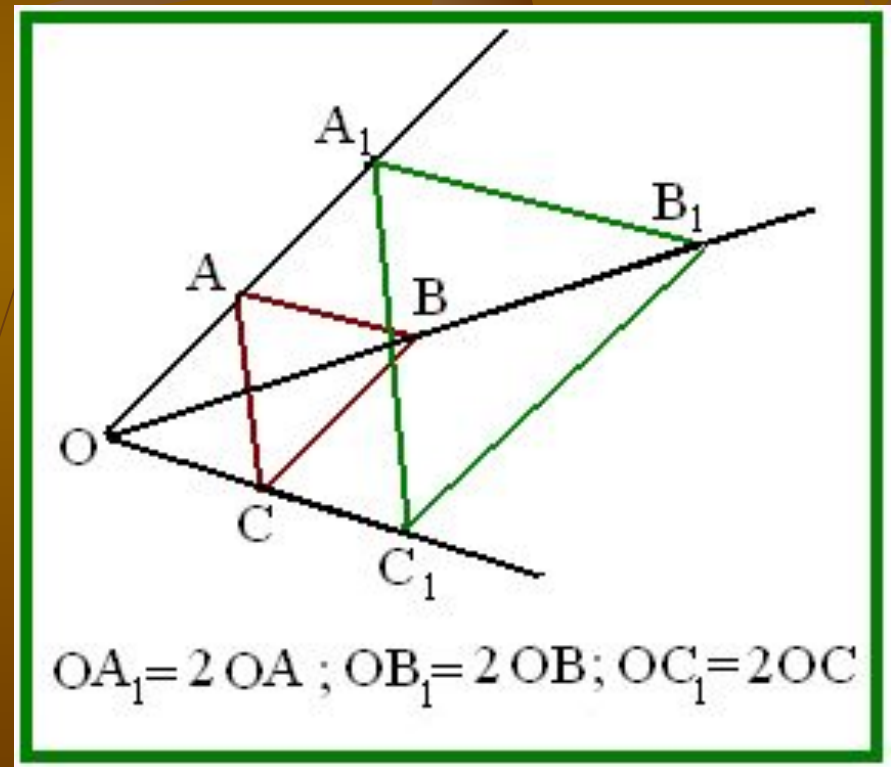


Осевая и центральная симметрия в растительном мире



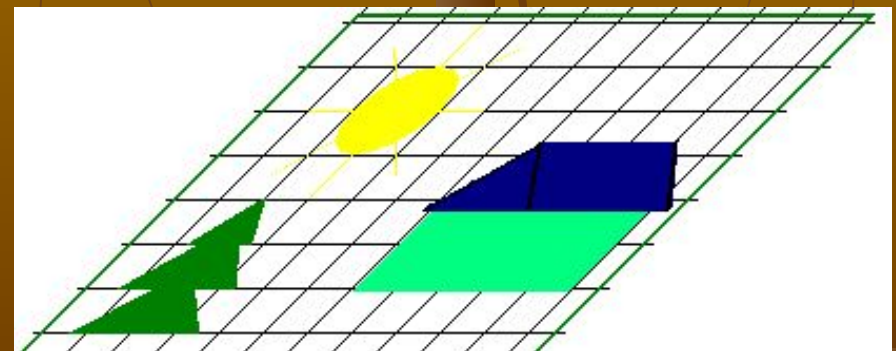
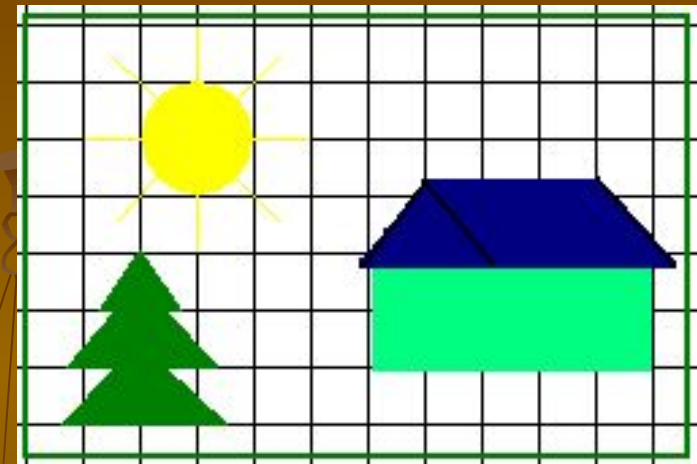
Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 1$ называется геометрическое преобразование, которое произвольно взятую точку A переводит в такую точку A_1 , что $OA_1 = k \cdot OA$

- Гомотетия переводит каждую прямую в параллельную ей прямую, каждую окружность переводит в окружность.
- Гомотетия сохраняет углы, а все длины увеличивает в $|k|$ раз. Из этого следует, что гомотетия сохраняет форму фигур (но не размеры).
- Если $k > 1$, то происходит увеличение формы фигуры. Если $0 < k < 1$, то происходит уменьшение формы фигуры.
- Гомотетия является преобразованием подобия.



Преобразование плоскости называется **аффинным**, если оно каждую прямую переводит в прямую, а параллельные между собой прямые переводит в параллельные прямые.

- При аффинных преобразованиях длины отрезков и углы могут изменяться.
- При аффинных преобразованиях не сохраняется отношение длин отрезков, однако отношение длин двух параллельных отрезков сохраняется.
- Середина отрезка переходит в середину отрезка, медиана треугольника - в медиану, круг - в эллипс, параллелограмм в параллелограмм.



Композиция отображений на плоскости – это последовательно выполненные движения плоскости.

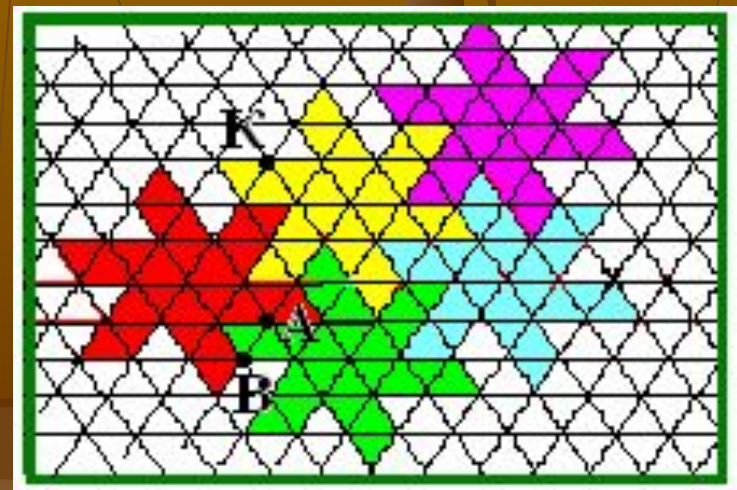
- В геометрии рассматриваются последовательности преобразований, которые переводят некоторую фигуру саму в себя.



Например.

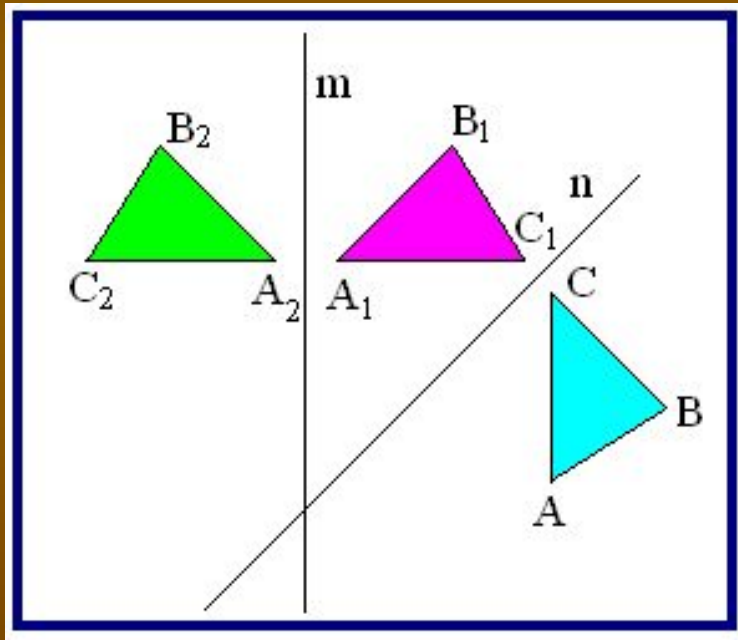
Для равностороннего треугольника движения плоскости переводят треугольник в себя.

- Например. Паркет, изображённый на рисунке, содержит такие композиции как симметрия относительно точки A и поворот относительно точки B , параллельный перенос на вектор AK .

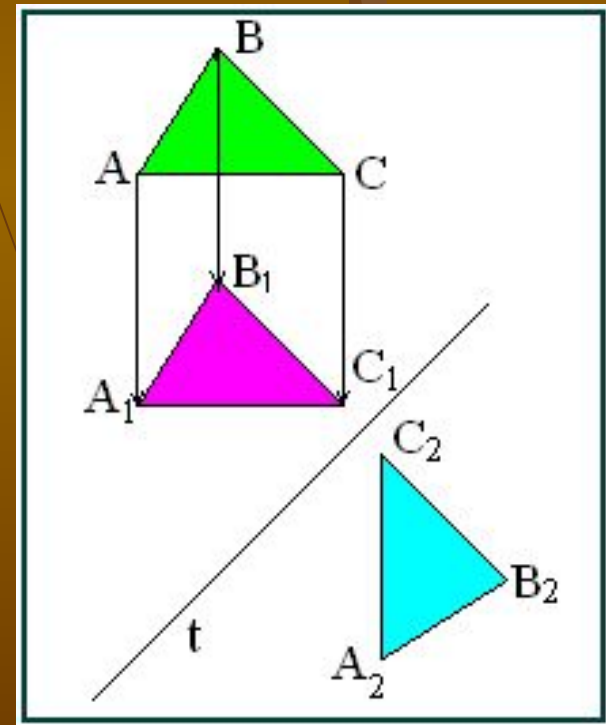


Примеры композиций.

- Последовательность осевых симметрий.



- Последовательность параллельного переноса и осевой симметрии.



Выводы.

Геометрическое преобразование плоскости – взаимно-однозначное отображение этой плоскости на себя. Наиболее важными геометрическими преобразованиями являются движения: осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, параллельный перенос. При этих преобразованиях сохраняется расстояния между двумя точками.

Существуют другие преобразования плоскости – преобразование подобия (гомотетия). Эти преобразования сохраняют пропорциональность. Аффинные преобразования сохраняют параллельность.

Композиция геометрических преобразований представляет собой последовательное выполнение различных геометрических преобразований плоскости.