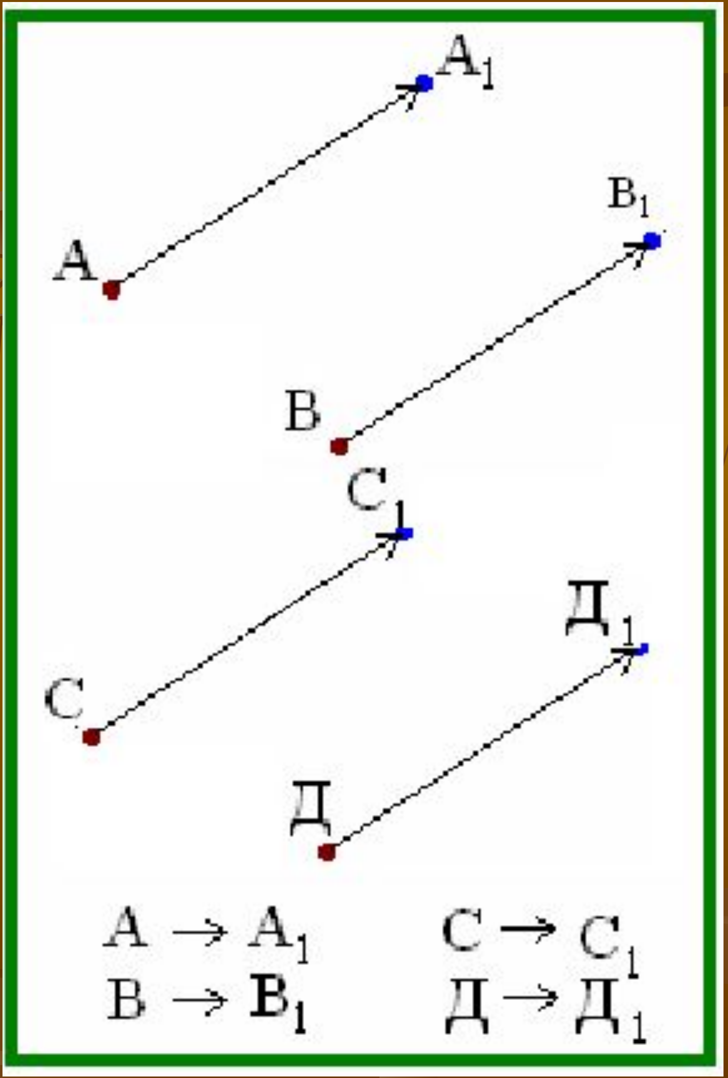
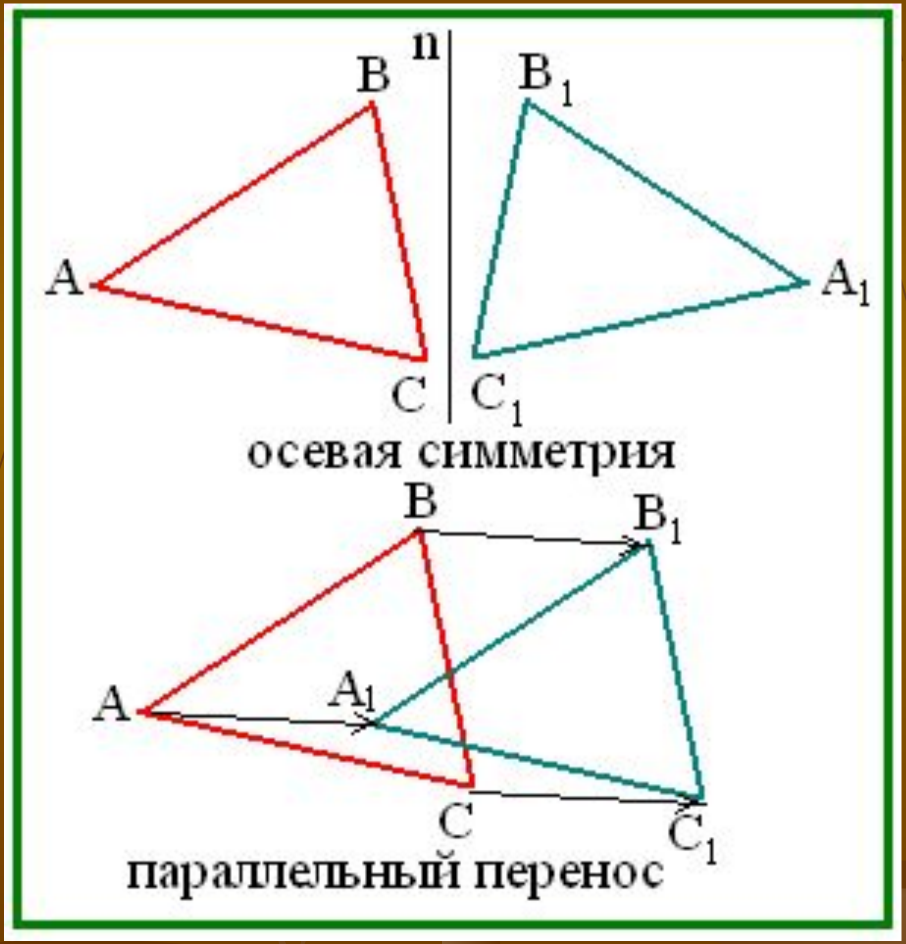
Отображение плоскости на себя – это движение плоскости.

- Представим себе, что каждой точке плоскости сопоставляется (ставится в соответствие) какая – то точка этой же плоскости, причём любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке. Говорят, что дано отображение плоскости на себя.
- Движение плоскости – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние.



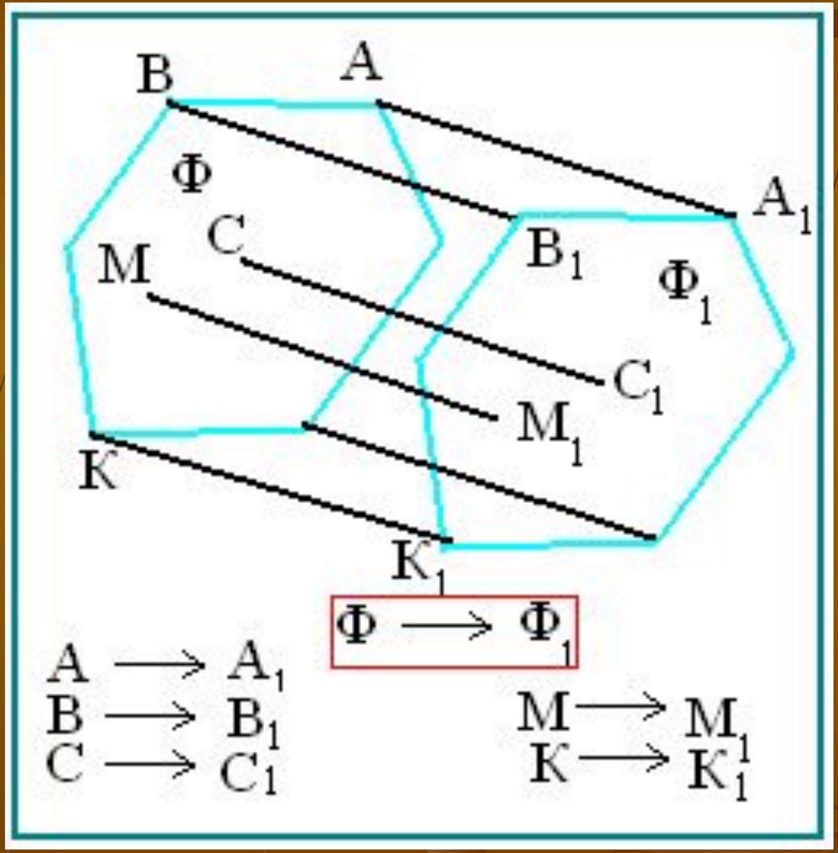
Понятие движения.

- Движение плоскости – это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.
- Теорема. При движении отрезок отображается на отрезок.
- Следствие. При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.
- Примеры движения. Осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, параллельный перенос.



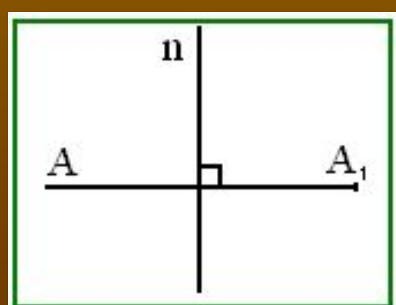
Наложения и движения.

- В курсе геометрии равенство фигур определяется с помощью наложений. Фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, если фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$.
- Понятие наложения в геометрии относится к основным понятиям, поэтому определение наложения не даётся.
- Наложение – это отображение плоскости на себя.

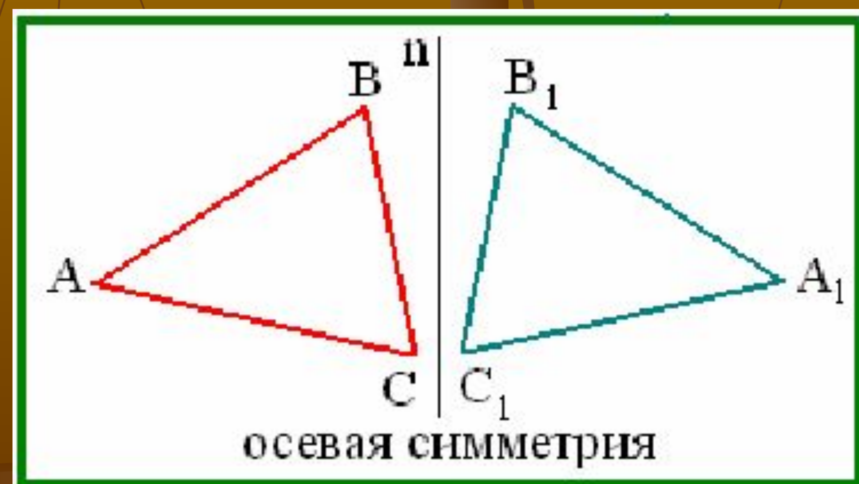


Осевая симметрия – это движение.

- Две точки А и $А_1$ называются симметричными относительно прямой n, если эта прямая проходит через середину отрезка А $А_1$ и перпендикулярна к нему. Прямая n называется осью симметрии.
- Каждая точка прямой n считается симметричной самой себе.

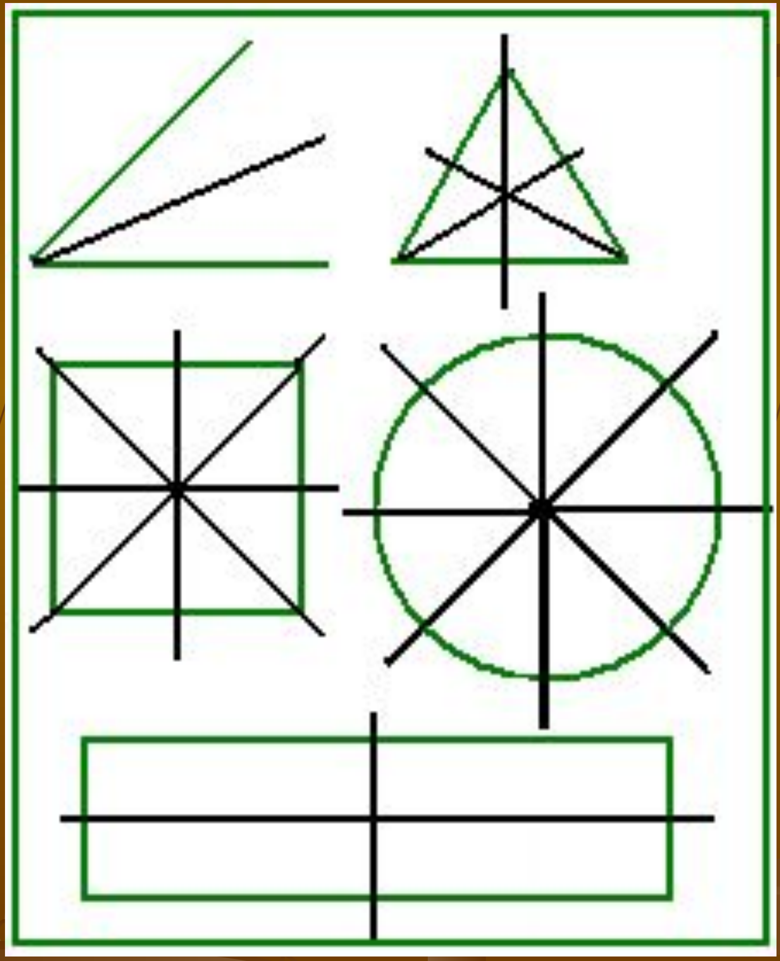


- Фигуры называются симметричными относительно прямой, если для каждой точки фигуры Ф соответствует симметричная точка фигуры $Ф_1$ относительно оси симметрии.



Фигуры, обладающие осевой симметрией.

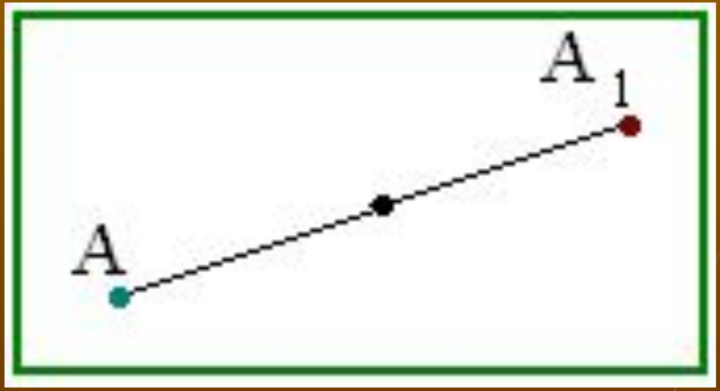
- Фигура называется симметричной относительно прямой, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой также принадлежит этой фигуре.
- Имеются фигуры, у которых нет ни одной оси симметрии.



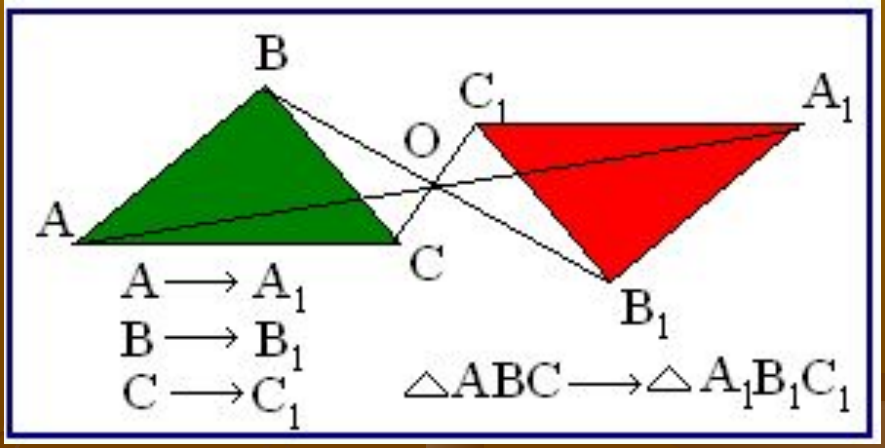
Центральная симметрия – это движение.

- Точки А и $А_1$ называются симметричными относительно точки О, если О – середина отрезка $АА_1$

  Точка О считается симметричной самой себе. Точка О называется центром симметрии.



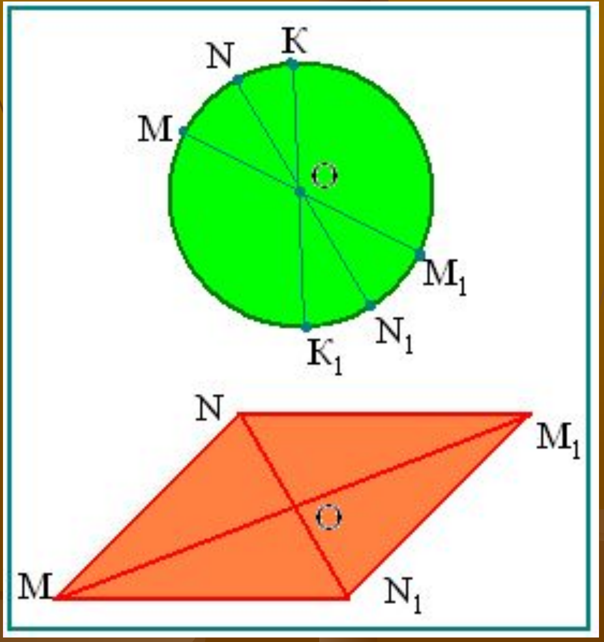
- Фигуры Ф и $Ф_1$ называются симметричными относительно точки О, если каждой точке фигуры Ф соответствует точка фигуры $Ф_1$ симметричная относительно центра О.



Фигуры, обладающие центральной симметрией.

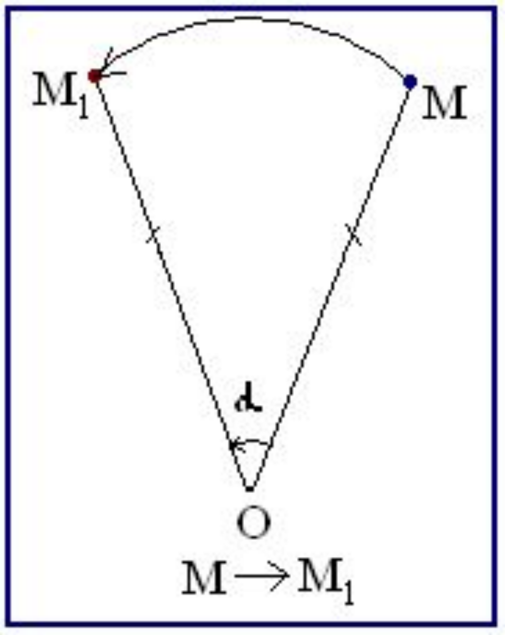
- Фигура называется симметричной относительно точки О, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки О также принадлежит этой фигуре.
- Точка О называется центром симметрии фигуры, т. е. фигура обладает центральной симметрией.
- Центральная симметрия- это поворот плоскости на 180°.

- Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, является окружность и параллелограмм.



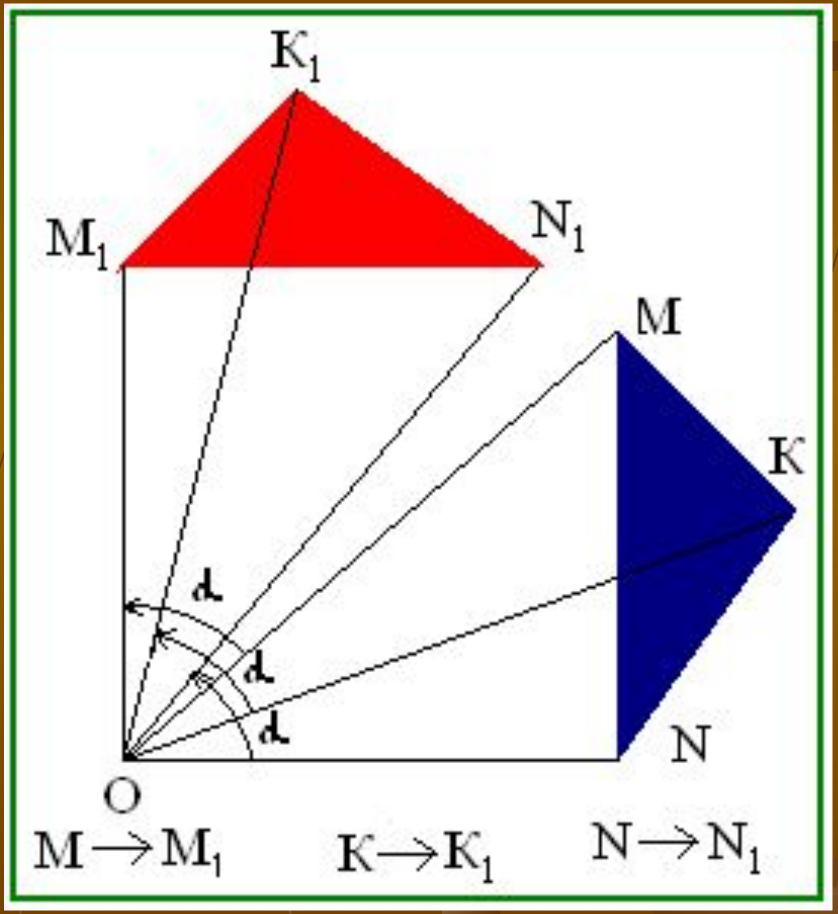
Поворот – это движение.

- Поворотом плоскости вокруг точки О на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка М отображается в такую точку M_1 что $OM = OM_1$ и угол MOM_1 равен α.
- При этом точка О остаётся на месте, те отображаются сама на себя, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки О в одном и том же направлении – по часовой стрелке или против.
- Поворот является движением (отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния).



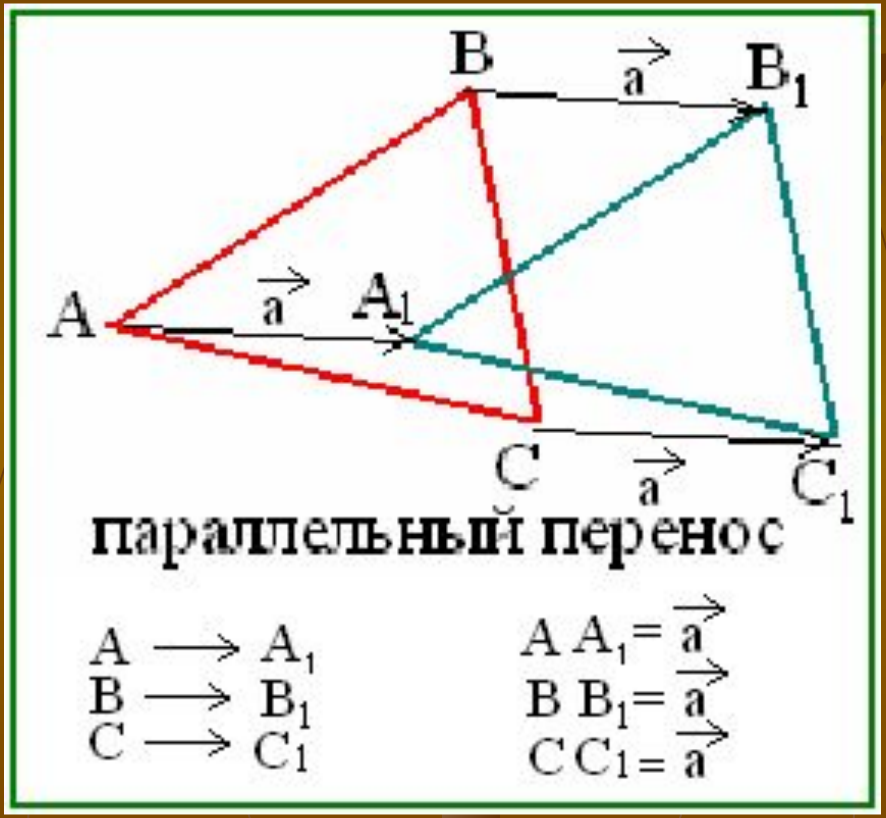
Поворот фигуры.

- Пусть O – центр поворота, α – угол поворота против часовой стрелки (так задаётся поворот).
- Поворот сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение.
- Это движение можно представить себе как поворот всей плоскости вокруг данной точки на данный угол.

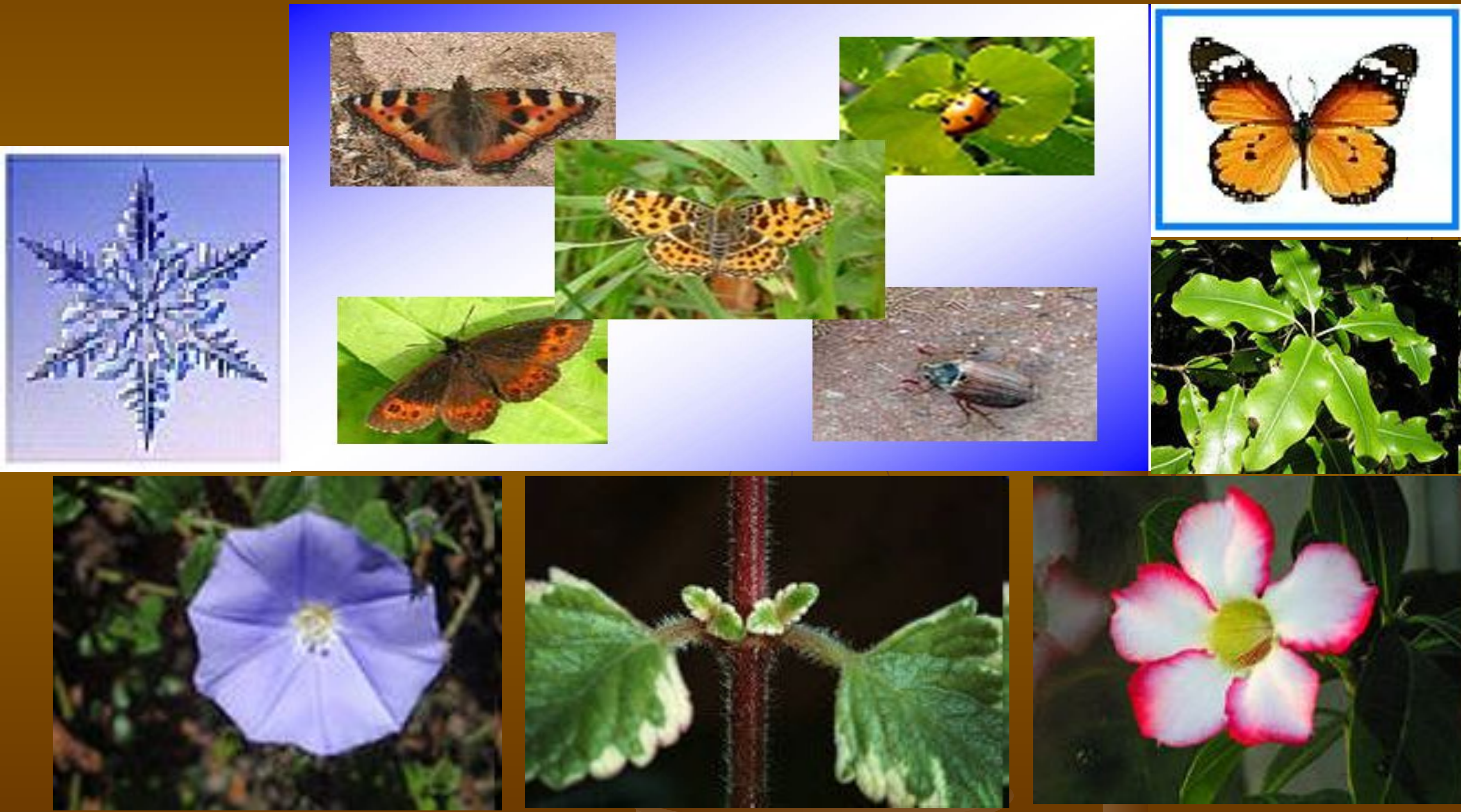


Параллельный перенос – это движение, которое сохраняет расстояние между точками.

- Пусть ā – данный вектор. Параллельным переносом на вектор ā называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка А отображается в соответственную точку A_1
- Параллельный перенос является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния.
- Это движение можно представить как сдвиг всей плоскости на вектор ā.



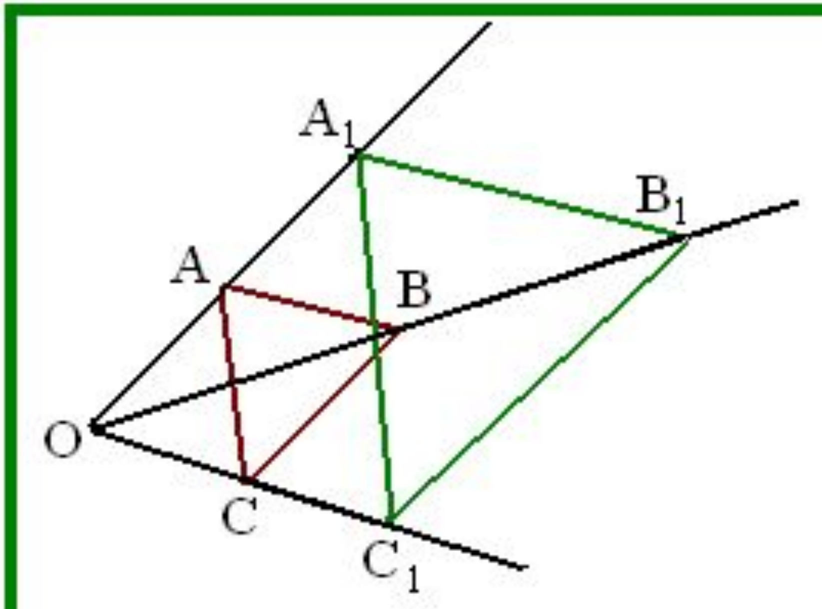
Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии или центр симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно стебля.



Осевая и центральная симметрия в растительном мире

Гомотетией с центром О и коэффициентом к ≠ 1 называется геометрическое преобразование, которое произвольно взятую точку А переводит в такую точку A_1, что $OA_1 = к \cdot OA$

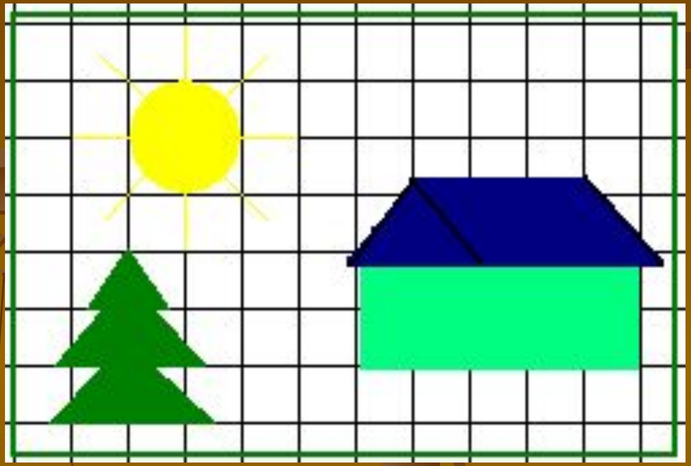
- Гомотетия переводит каждую прямую в параллельную ей прямую, каждую окружность переводит в окружность.
- Гомотетия сохраняет углы, а все длины увеличивает в |к| раз. Из этого следует, что гомотетия сохраняет форму фигур (но не размеры).
- Если к › 1, то происходит увеличение формы фигуры. Если 0‹ к ‹ 1, то происходит уменьшение формы фигуры.
- Гомотетия является преобразованием подобия.

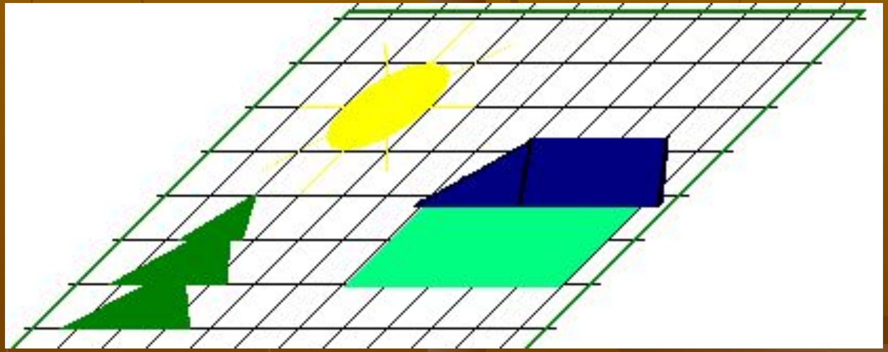


$OA_1 = 2\,OA$; $OB_1 = 2\,OB$; $OC_1 = 2OC$

Преобразование плоскости называется аффинным, если оно каждую прямую переводит в прямую, а параллельные между собой прямые переводит в параллельные прямые.

- При аффинных преобразованиях длины отрезков и углы могут изменяться.
- При аффинных преобразованиях не сохраняется отношение длин отрезков, однако отношение длин двух параллельных отрезков сохраняется.
- Середина отрезка переходит в середину отрезка, медиана треугольника - в медиану, круг- в эллипс, параллелограмм в параллелограмм.

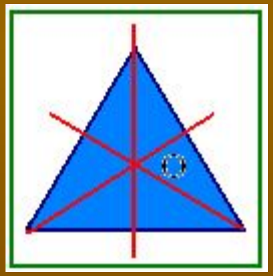




Композиция отображений на плоскости – это последовательно выполненные движения плоскости.

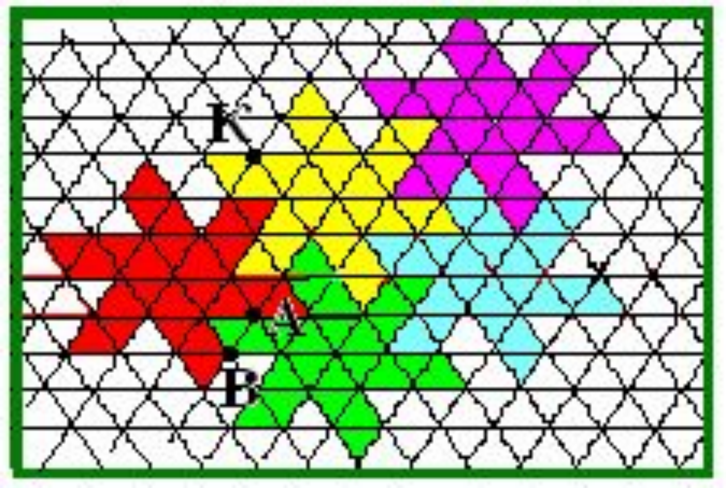
- В геометрии рассматриваются последовательности преобразований, которые переводят некоторую фигуру саму в себя.

Например.



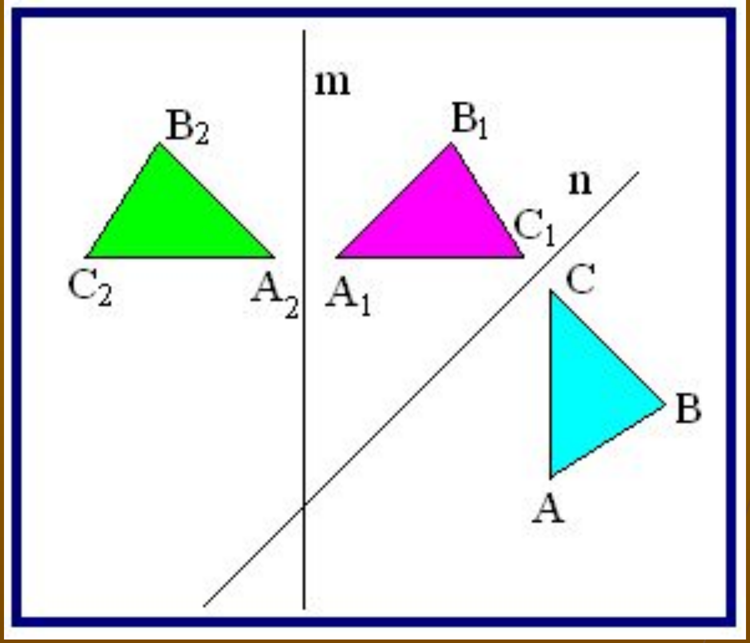
Для равностороннего треугольника движения плоскости переводят треугольник в себя.

- Например. Паркет, изображённый на рисунке, содержит такие композиции как симметрия относительно точки A и поворот относительно точки B, параллельный перенос на вектор AK.

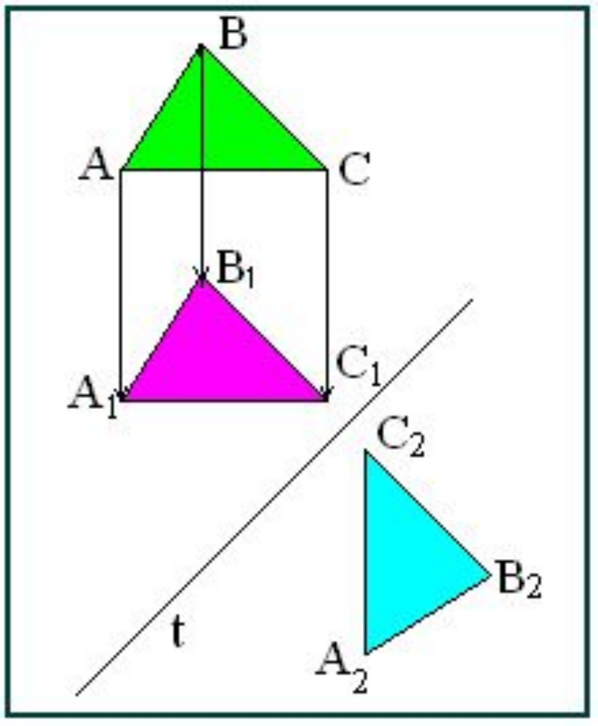


Примеры композиций.

- Последовательность осевых симметрий.



- Последовательность параллельного переноса и осевой симметрии.



Выводы.

Геометрическое преобразование плоскости – взаимно-однозначное отображение этой плоскости на себя. Наиболее важными геометрическими преобразованиями являются движения: осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, параллельный перенос. При этих преобразованиях сохраняется расстояния между двумя точками.

Существуют другие преобразования плоскости – преобразование подобия (гомотетия). Эти преобразования сохраняют пропорциональность. Аффинные преобразования сохраняют параллельность.

Композиция геометрических преобразований представляет собой последовательное выполнение различных геометрических преобразований плоскости.