УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ, КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПОКОЯ,

302-математика .Абдинабиева Фатима

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений, запишем ее уравнения в векторной форме

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\bar{x}, t)$$

Или в координатной форме

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, \ldots x_n, t) \quad k = 1, \ldots n$$

В качестве независимой переменной выбрано время t, поэтому система дифференциальных уравнений является моделью некоторого процесса – изменения переменной во времени или *Движения материальной точки,* Занимающей в фазовом пространстве текущее положение $(x_1, \ldots x_n)$ и изменяющей это положение с изменением времени t. Таким образом, *Движение – это частное решение системы дифференциальных уравнений.*

Зададим некоторые начальные условия $t_0, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. Пусть выполняются условия теоремы Коши (непрерывны $f, \frac{\partial f_k}{\partial x_s}, k = 1, \dots, n, s = 1, \dots, n$ в рассматриваемой области). Тогда через любую точку расширенного фазового пространства $(t_0, x_{01} \dots x_{0n})$ из рассматриваемой области проходит единственная интегральная кривая – график частного решения $\vec{x}(t, t_0, x_{01}, \dots x_{0n})$. Назовем движение, $\vec{x}(t, t_0, x_{01}, \dots x_{0n})$ «начинающееся» в точке $(t_0, x_{01} \dots x_{0n})$ *Невозмущенным движением*. Если «возмутить» – несколько изменить начальные условия в фазовом пространстве, выбрать их $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_{01} \dots \tilde{x}_{0n})$, то изменится и движение. Назовем движение, $\tilde{x}(t, \tilde{t}_0, \tilde{x}_{01}, \dots \tilde{x}_{0n})$ «начинающееся» в точке $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_{01} \dots \tilde{x}_{0n})$, *Возмущенным движением* $\vec{x}(t, t_0, \tilde{x}_{01}, \dots \tilde{x}_{0n})$. Если возмущение начальных условий невелико, то в некоторой окрестности начальной точки траектории – движения тоже близки.

Рассматривая близость возмущенного и невозмущенного движений «вообще», при любом времени t > T, мы приходим к определению **Устойчивости движения по Ляпунову**.

Движение называется *Устойчивым по Ляпунову,* Если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \exists T : \left| x_{0k} - \hat{x}_{0k} \right| < \delta \ \Rightarrow \left| x_k(t, t_0, \hat{x}_{01}, \ldots \hat{x}_{0n}) - x_k(t, t_0, x_{01}, \ldots x_{0n}) \right| < \varepsilon$$

$$npu\ (k = 1, \ldots n), \quad \forall t > T$$

определения в том, что для любого размера окрестности «допуска» (по фазовым координатам) невозмущенного движения существует размер окрестности, в которой можно «возмутить» начальные условия. Причем это возмущение приведет к тому, что возмущенное движение после некоторого момента времени T войдет в окрестность «допуска» и останется в этой окрестности при любом t > T.

Если движение устойчиво по Ляпунову и $\lim_{t\to\infty}\left|\vec{x}(t, t_0, \hat{\vec{x}}_0) - \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)\right| = 0$ то такое движение называется *Асимптотически устойчивым.*

Если движение асимптотически устойчиво, то возмущенное движение с ростом времени стремится к невозмущенному.

Движение называется *Неустойчивым по Ляпунову*, если

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \ \exists T, \exists s \in [1, n]: \left|x_{0k} - \hat{x}_{0k}\right| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\left|x_s(t, t_0, \hat{x}_{01}, \dots \hat{x}_{0n}) - x_s(t, t_0, x_{01}, \dots x_{0n})\right| \geq \varepsilon \text{ при } (k = 1, \dots n), \quad \forall t > T$$

Смысл этого определения в том, что как бы ни было мало возмущение начальных условий, все равно со временем хотя бы по одной координате возмущенное движение выйдет из некоторой окрестности «допуска» невозмущенного движения.

Теорема. *Задача об устойчивости движения может быть сведена к задаче об устойчивости тривиального (тождественно равного нулю) решения системы.*

Доказательство. Обозначим $\vec{z} = \vec{x}\left(t, t_0, \widehat{\vec{x}}_0\right) - \vec{x}\left(t, t_0, \vec{x}_0\right)$. Тогда

$$\dot{\vec{z}} = \dot{\vec{x}}\left(t, t_0, \widehat{\vec{x}}_0\right) - \dot{\vec{x}}\left(t, t_0, \vec{x}_0\right) = \vec{f}\left(t, \vec{x}\left(t, t_0, \widehat{\vec{x}}_0\right)\right) - \vec{f}\left(t, \vec{x}\left(t, t_0, \bar{x}_0\right)\right) =$$
$$\vec{f}\left(t, \left(\vec{z} + \vec{x}\left(t, t_0, \vec{x}_0\right)\right)\right) - \vec{f}\left(t, \vec{x}\left(t, t_0, \vec{x}_0\right)\right)$$

При $\vec{z}(t) \equiv 0$ Имеем $\dot{\vec{z}}(t) = 0$, поэтому задача об устойчивости движения для исходной системы уравнений может быть заменена эквивалентной ей задачей об устойчивости тривиального решения для системы

$$\dot{\vec{z}} = \vec{f}\left(t, \left(\vec{z} + \vec{x}\left(t, t_0, \vec{x}_0\right)\right)\right) - \vec{f}\left(t, \vec{x}\left(t, t_0, \vec{x}_0\right)\right)$$

Поэтому обычно заранее делают указанную замену и исследуют задачу об устойчивости тривиального решения.

Устойчивость по первому приближению.

Будем рассматривать автономную систему $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$

И ее «систему первого приближения» $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}|_{\vec{x}=0}$

Заметим, что систему первого приближения можно строить, линеаризуя в окрестности нуля элементы матрицы, заменяя бесконечно малые элементы матрицы эквивалентными.

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПОКОЯ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ. СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Запишем уравнение автономной системы второго порядка $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Точка покоя $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. *Корни характеристического уравнения* λ_1, λ_2 *действительны*..

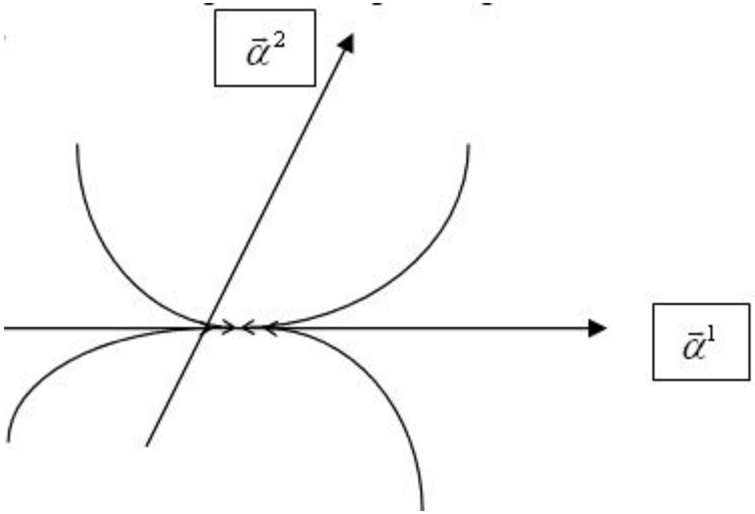
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{a}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{a}^2$$

А) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

При $t \to \infty$: $x(t) \to 0, y(t) \to 0$ Поэтому точка покоя (или тривиальное решение) асимптотически устойчива.

Заметим, что первое слагаемое – это проекция траектории на ось $\vec{\alpha}^1$, второе слагаемое – проекция на ось $\vec{\alpha}^2$.

Такая точка покоя называется **Устойчивый узел***.*



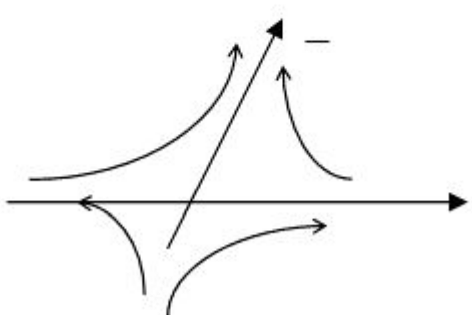
Б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

Этот случай можно рассматривать как предыдущий, если формально положить t < 0. Получим те же траектории, что и в п. а), но стрелки на них будут направлены в другую сторону. Направление движение другое (t<0). Такая точка называется **Неустойчивый узел***.*

В) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$.

По вектору $\overline{a}^1$ мы, находясь на траектории, стремимся к нулю, по вектору $\vec{a}^2$, наоборот, удаляемся от нуля.

Такая точка покоя - **Седло.**



Г) . $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Это – тоже седло, но стрелки

Направлены в другую сторону.

Траектория прижимается к той оси, для которой модуль характеристического числа меньше.

Седла – неустойчивые точки покоя.

Заметим, в ситуациях узлов и седла траектория, начавшись в определенном квадранте, в нем и остается.

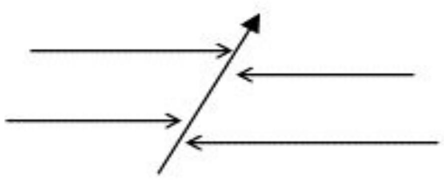
Д) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Точка покоя – **Дикритический узел**,

Устойчивый при $\lambda < 0$ неустойчивый при $\lambda > 0$

Е) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 = 0$

Точка покоя - **Вырожденный узел,** При $\lambda_1 < 0$ устойчивая, но не асимптотически устойчивая. Если $\lambda_1 > 0$, то точка покоя - неустойчивая (стрелки направлены в обратную сторону)



Ж) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$ **Точка безразличного равновесия**. При изменении времени любая точка $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\vec{a}^1 + C_2\vec{a}^2$ остается на месте. Этими точками заполнена вся плоскость.

2. *Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные*.

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$$

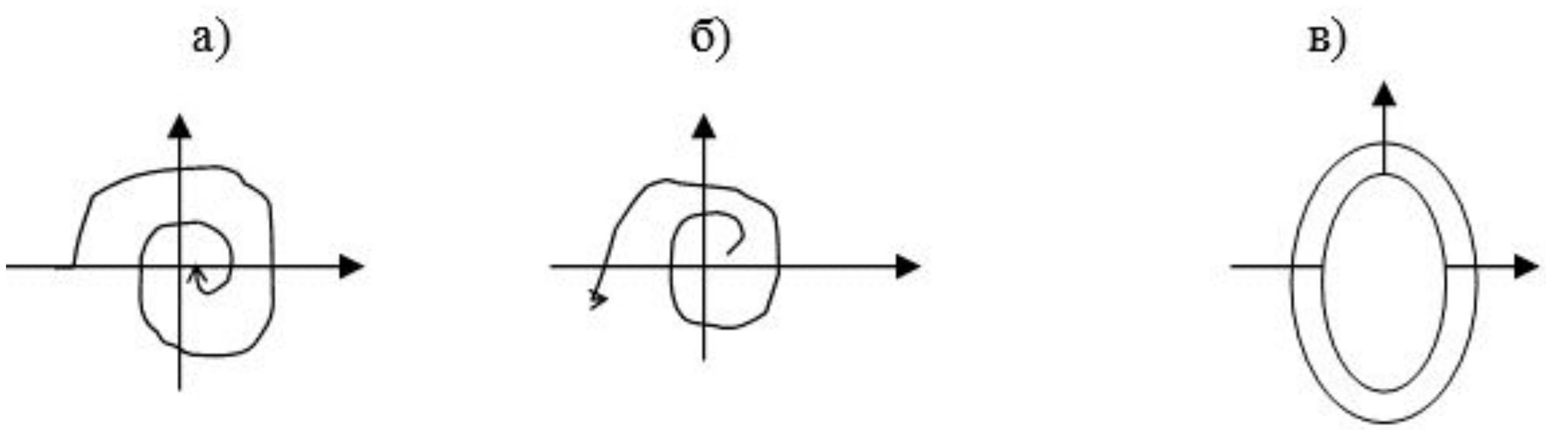
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\gamma t}\left[C_1(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\sin\beta t) + C_2(\vec{u}\sin\beta t + \vec{v}\cos\beta t)\right]$$

Параметр t имеет смысл угла поворота вокруг начала координат (в периодической составляющей).

А) Если $\gamma < 0$, то траектория приближается к началу координат с ростом t (спираль), так как $e^{\gamma t}$ - убывающая функция. Точка покоя **Устойчивый фокус** Асимптотически устойчива

Б) если $\gamma > 0$, то траектория удаляется от начала координат с ростом t (спираль), так как $e^{\gamma t}$ - возрастающая функция. Точка покоя **Неустойчивый фокус** неустойчива

В) если $\gamma = 0$, то траектории представляют собой эллипсы, охватывающие начало координат. Точка покоя **Центр** Устойчива, но не асимптотически устойчива.



Система третьего порядка.

Запишем уравнение автономной системы третьего порядка $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) Все корни характеристического уравнения действительны и различны.

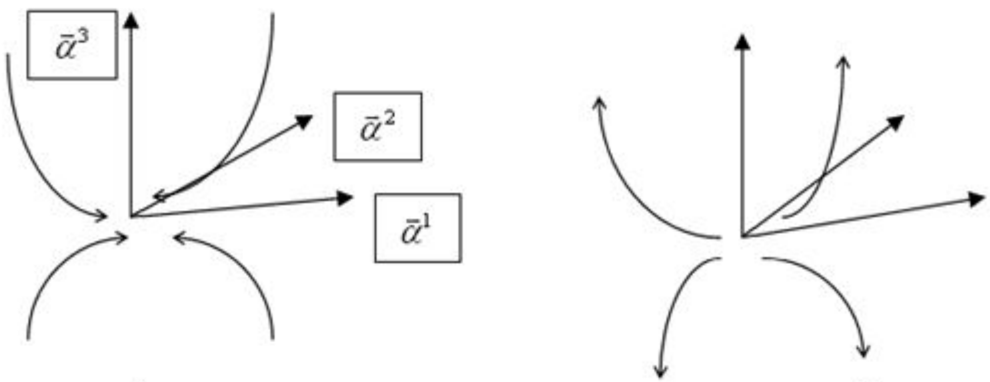
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{a}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{a}^2 + C_3 e^{\lambda_3 t} \vec{a}^3$$

Картину поведения фазовых траекторий довольно легко представить, рассматривая поведение фазовых траекторий в плоскостях, натянутых на пары собственных векторов. Этот случай уже изучен выше.

А) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$

В плоскостях $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2)$, $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^3)$ $(\vec{\alpha}^2, \vec{\alpha}^3)$ имеем устойчивые узлы. Такая точка покоя так и называется – **Устойчивый узел.**

Б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ В плоскостях $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2)$, $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^3)$, $(\vec{\alpha}^2, \vec{\alpha}^3)$, имеем неустойчивые узлы. Такая точка покоя называется – **Неустойчивый узел.**

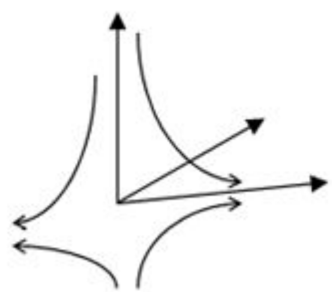


а) б)

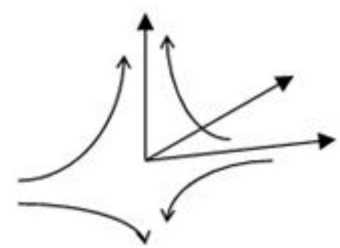
В) один корень имеет знак, противоположный остальным двум корням. Точка покоя в этом случае называется **Седло – узел** И является неустойчивой точкой покоя.

Пусть, например, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. Тогда в плоскости $(\vec{a}^1, \vec{a}^2)$ имеем неустойчивый узел, а в плоскостях $(\vec{a}^1, \vec{a}^3)$, $(\vec{a}^2, \vec{a}^3)$ - седла. Если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$, то в плоскости $(\vec{a}^1, \vec{a}^2)$ имеем устойчивый узел, а в плоскостях $(\vec{a}^1, \vec{a}^3)$, $(\vec{a}^2, \vec{a}^3)$ - седла.

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$.



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$



Заметим, что в ситуациях узлов и седла – узел траектория, начавшись в определенном октанте, не переходит в другой октант.

2) λ - действительный корень характеристического уравнения, $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta$ - комплексно сопряженная пара корней.

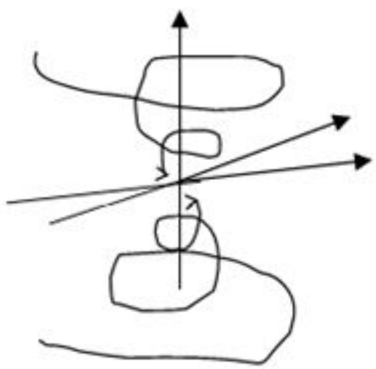
Заметим, что при изменении номера корней ситуация будет аналогичной.

В плоскости $(\vec{a}^1, \vec{a}^2)$ имеем фокус, устойчивый при $\gamma < 0$, неустойчивый при $\gamma > 0$

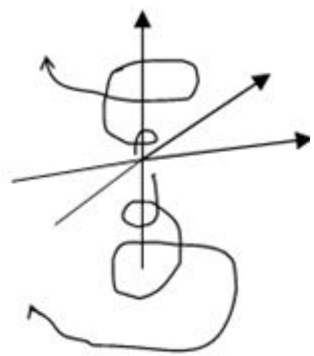
А) $\lambda_3 < 0$ $\gamma < 0$ Такая точка покоя называется **Устойчивый фокус**.

Б) $\lambda_3 > 0$ $\gamma > 0$. Такая точка покоя называется **Неустойчивый фокус**.

$\lambda_3 < 0$ $\gamma < 0$



$\lambda_3 > 0$ $\gamma > 0$

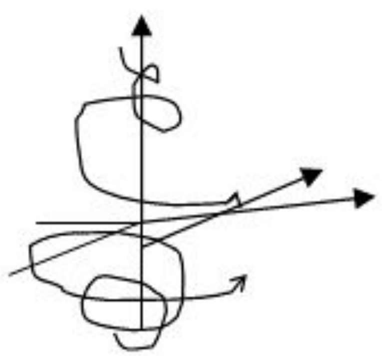


В) $\lambda_3 < 0 \quad \gamma > 0$ или $\lambda_3 > 0 \quad \gamma < 0$. Такая особая точка называется **Седло – фокус** и является неустойчивой**.**

В первом случае по оси $\vec{a}^3$ Точка по траектории приближается к плоскости $(\vec{a}^1, \vec{a}^2)$ и уходит от начала координат, так как на самой плоскости имеем неустойчивый фокус.

Во втором случае на плоскости $(\vec{a}^1, \vec{a}^2)$ имеем устойчивый фокус, поэтому траектория стремится к оси $\vec{a}^3$, но удаляется от начала координат по этой оси, так как $\lambda_3 > 0$.

$\lambda_3 < 0 \ \gamma > 0$



$\lambda_3 > 0 \ \gamma < 0$