

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ, КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПОКОЯ,

302-математика .Абдинабиева Фатима

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений, запишем ее уравнения в векторной форме

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

Или в координатной форме

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, \dots, x_n, t) \quad k=1, \dots, n$$

В качестве независимой переменной выбрано время t , поэтому система дифференциальных уравнений является моделью некоторого процесса – изменения переменной во времени или *Движения материальной точки*, Занимающей в фазовом пространстве текущее положение (x_1, \dots, x_n) и изменяющей это положение с изменением времени t . Таким образом, *Движение* – это частное решение системы дифференциальных уравнений.

$$t_0, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

Зададим некоторые начальные условия
Пусть выполняются условия теоремы Коши (непрерывны в рассматриваемой области). Тогда через любую точку расширенного фазового пространства из рассматриваемой области $(t_0, \vec{x}_{01}, \dots, \vec{x}_{0n})$ проходит единственная интегральная кривая – график частного решения. Назовем движение, «начинающееся» в точке $(t_0, \vec{x}_{01}, \dots, \vec{x}_{0n})$ **Невозмущенным движением**. Если «возмутить» – несколько изменить начальные условия в фазовом пространстве, выбрать их $(t_0, \vec{x}_{01}, \dots, \vec{x}_{0n})$, то изменится и движение. Назовем движение, «начинающееся» в точке $(t_0, \vec{x}_{01}, \dots, \vec{x}_{0n})$ **Возмущенным движением**. Если возмущение начальных условий невелико, то в некоторой окрестности начальной точки траектории – движения тоже близки.

Рассматривая близость возмущенного и невозмущенного движений «вообще», при любом времени $t > T$, мы приходим к определению **Устойчивости движения по Ляпунову**.

Движение называется *Устойчивым по Ляпунову*, Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, \exists T: |x_{0k} - \tilde{x}_{0k}| < \delta \Rightarrow |x_k(t, t_0, \tilde{x}_{01}, \dots, \tilde{x}_{0n}) - x_k(t, t_0, x_{01}, \dots, x_{0n})| < \varepsilon$$

при $(k = 1, \dots, n), \forall t > T$

определения в том, что для любого размера окрестности «допуска» (по фазовым координатам) невозмущенного движения существует размер окрестности, в которой можно «возмутить» начальные условия. Причем это возмущение приведет к тому, что возмущенное движение после некоторого момента времени T войдет в окрестность «допуска» и останется в этой окрестности при любом $t > T$.

Если движение устойчиво по Ляпунову и $\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0) - \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)| = 0$ то такое движение называется *Асимптотически устойчивым*.

Если движение асимптотически устойчиво, то возмущенное движение с ростом времени стремится к невозмущенному.

Движение называется *Неустойчивым по Ляпунову*, если

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta(\varepsilon) > 0, \exists T, \exists s \in [1, n]: |x_{0k} - \tilde{x}_{0k}| < \delta \Rightarrow \\ |x_s(t, t_0, \tilde{x}_{01}, \dots, \tilde{x}_{0n}) - x_s(t, t_0, x_{01}, \dots, x_{0n})| \geq \varepsilon \text{ при } (k = 1, \dots, n), \quad \forall t > T$$

Смысл этого определения в том, что как бы ни было мало возмущение начальных условий, все равно со временем хотя бы по одной координате возмущенное движение выйдет из некоторой окрестности «допуска» невозмущенного движения.

Теорема. *Задача об устойчивости движения может быть сведена к задаче об устойчивости тривиального (тождественно равного нулю) решения системы.*

Доказательство. Обозначим $\vec{z} = \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0) - \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)$ Тогда

$$\begin{aligned}\dot{\vec{z}} &= \dot{\vec{x}}(t, t_0, \vec{x}_0) - \dot{\vec{x}}(t, t_0, \vec{x}_0) = \vec{f}(t, \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)) - \vec{f}(t, \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0)) = \\ &= \vec{f}(t, (\vec{z} + \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0))) - \vec{f}(t, \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0))\end{aligned}$$

При $\vec{z}(t) \equiv 0$ Имеем $\dot{\vec{z}}(t) = 0$ поэтому задача об устойчивости движения для исходной системы уравнений может быть заменена эквивалентной ей задачей об устойчивости тривиального решения для системы

$$\dot{\vec{z}} = \vec{f}(t, (\vec{z} + \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0))) - \vec{f}(t, \vec{x}(t, t_0, \vec{x}_0))$$

Поэтому обычно заранее делают указанную замену и исследуют задачу об устойчивости тривиального решения.

Устойчивость по первому приближению.

Будем рассматривать автономную систему $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$

И ее «систему первого приближения» $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=0}$

Заметим, что систему первого приближения можно строить, линеаризуя в окрестности нуля элементы матрицы, заменяя бесконечно малые элементы матрицы эквивалентными.

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ПОКОЯ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ. СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Запишем уравнение автономной системы второго порядка $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad \text{Точка покоя} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. *Корни характеристического уравнения λ_1, λ_2 действительны.*

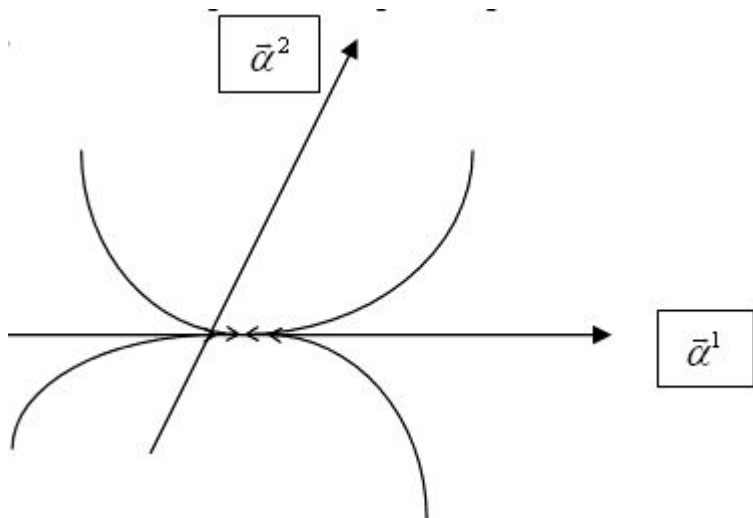
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{a}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{a}^2$$

А) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

При $t \rightarrow \infty$ $x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow 0$ Поэтому точка покоя (или тривиальное решение) асимптотически устойчива.

Заметим, что первое слагаемое – это проекция траектории на ось $\bar{\alpha}^1$, второе слагаемое – проекция на ось $\bar{\alpha}^2$

Такая точка покоя называется **Устойчивый узел**.



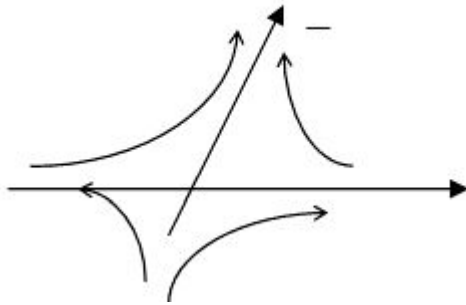
Б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Этот случай можно рассматривать как предыдущий, если формально положить $t < 0$. Получим те же траектории, что и в п. а), но стрелки на них будут направлены в другую сторону. Направление движение другое ($t < 0$). Такая точка называется **Неустойчивый узел**.

В) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$

По вектору \vec{a}^1 мы, находясь на траектории, стремимся к нулю, по вектору \vec{a}^2 , наоборот, удаляемся от нуля.

Такая точка покоя - **Седло**.



Г) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Это – тоже седло, но стрелки

Направлены в другую сторону.

Траектория прижимается к той оси, для которой модуль характеристического числа меньше.

Седла – неустойчивые точки покоя.

Заметим, в ситуациях узлов и седла траектория, начавшись в определенном квадранте, в нем и остается.

Д) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

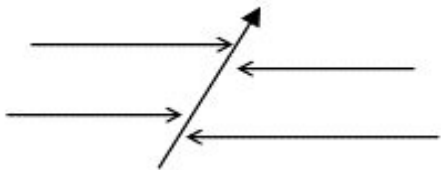
Точка покоя – **Дикритический узел**,

Устойчивый при $\lambda < 0$ неустойчивый при $\lambda > 0$



Е) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$

Точка покоя - **Вырожденный узел**, При $\lambda_1 < 0$ устойчивая, но не асимптотически устойчивая. Если $\lambda_1 > 0$ то точка покоя - неустойчивая (стрелки направлены в обратную сторону)



Ж) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ **Точка безразличного равновесия.** При изменении времени любая точка $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \vec{a}^1 + C_2 \vec{a}^2$ остается на месте. Этими точками заполнена вся плоскость.

2. Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные.

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$$

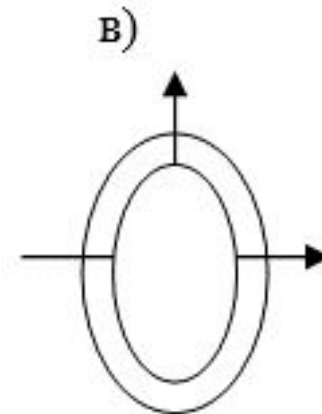
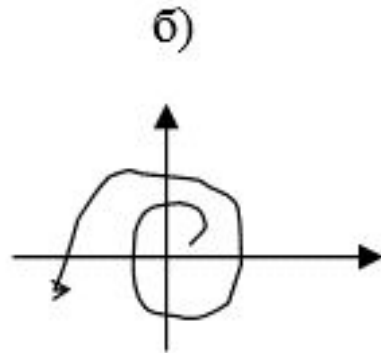
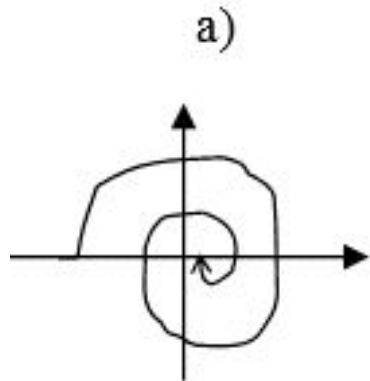
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\gamma t} [C_1 (\vec{u} \cos \beta t - \vec{v} \sin \beta t) + C_2 (\vec{u} \sin \beta t + \vec{v} \cos \beta t)]$$

Параметр t имеет смысл угла поворота вокруг начала координат (в периодической составляющей).

А) Если $\gamma < 0$ то траектория приближается к началу координат с ростом t (спираль), так как $e^{-\gamma t}$ - убывающая функция. Точка покоя **Устойчивый фокус** Асимптотически устойчива

Б) если $\gamma > 0$ то траектория удаляется от начала координат с ростом t (спираль), так как $e^{\gamma t}$ - возрастающая функция. Точка покоя **Неустойчивый фокус** неустойчива

В) если $\gamma = 0$ то траектории представляют собой эллипсы, охватывающие начало координат. Точка покоя **Центр** Устойчива, но не асимптотически устойчива.



Система третьего порядка.

Запишем уравнение автономной системы третьего порядка $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) Все корни характеристического уравнения действительны и различны.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{\alpha}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{\alpha}^2 + C_3 e^{\lambda_3 t} \vec{\alpha}^3$$

Картину поведения фазовых траекторий довольно легко представить, рассматривая поведение фазовых траекторий в плоскостях, натянутых на пары собственных векторов. Этот случай уже изучен выше.

А) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$

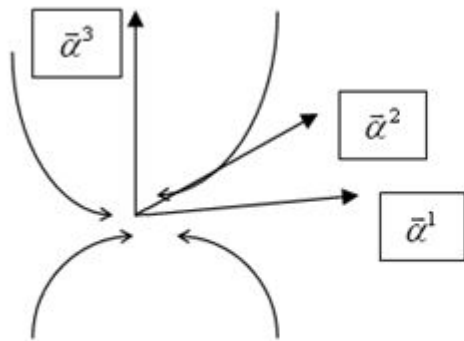
В плоскостях $(\bar{x}^1, \bar{x}^2), (\bar{x}^1, \bar{x}^3), (\bar{x}^2, \bar{x}^3)$ имеем устойчивые узлы.

Такая точка покоя так и называется – **Устойчивый узел**.

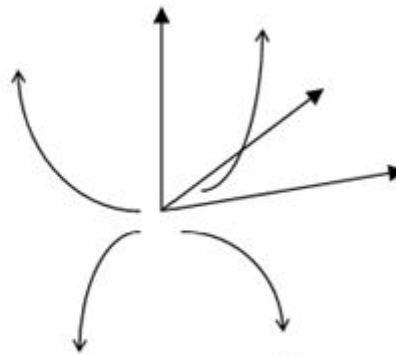
Б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ В плоскостях $(\bar{x}^1, \bar{x}^2), (\bar{x}^1, \bar{x}^3), (\bar{x}^2, \bar{x}^3)$, имеем

неустойчивые узлы. Такая точка покоя называется

– **Неустойчивый узел**.



а)



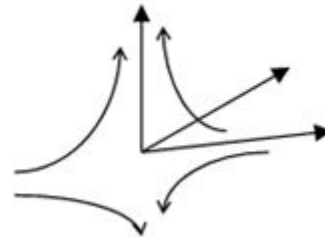
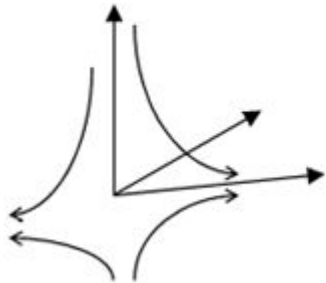
б)

В) один корень имеет знак, противоположный остальным двум корням. Точка покоя в этом случае называется **Седло - узел** и является неустойчивой точкой покоя.

Пусть, например, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. Тогда в плоскости (\vec{a}^1, \vec{a}^2) имеем неустойчивый узел, а в плоскостях (\vec{a}^1, \vec{a}^3) , (\vec{a}^2, \vec{a}^3) - седла. Если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ то в плоскости (\vec{a}^1, \vec{a}^2) имеем устойчивый узел, а в плоскостях (\vec{a}^1, \vec{a}^3) , (\vec{a}^2, \vec{a}^3) - седла.

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0.$$

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$$



Заметим, что в ситуациях узлов и седла - узел траектория, начавшись в определенном октанте, не переходит в другой октант.

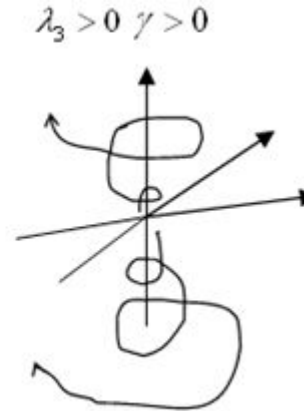
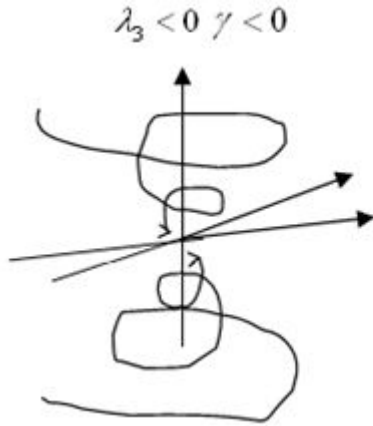
2) -действительный корень характеристического уравнения, λ_1 - комплексно сопряженная пара корней.

Заметим, что при изменении номера корней ситуация будет аналогичной.

В плоскости (\vec{e}^1, \vec{e}^2) имеем фокус, устойчивый при $\gamma < 0$, неустойчивый при $\gamma > 0$

А) $\lambda_3 < 0 \quad \gamma < 0$ Такая точка покоя называется **Устойчивый фокус**.

Б) $\lambda_3 > 0 \quad \gamma > 0$ Такая точка покоя называется **Неустойчивый фокус**.



В) $\lambda_3 < 0 \quad \gamma > 0$ или $\lambda_3 > 0 \quad \gamma < 0$. Такая особая точка называется **Седло – фокус** и является неустойчивой.

В первом случае по оси \vec{e}^3 Точка по траектории приближается к плоскости (\vec{e}^1, \vec{e}^2) и уходит от начала координат, так как на самой плоскости имеем неустойчивый фокус.

Во втором случае на плоскости (\vec{e}^1, \vec{e}^2) имеем устойчивый фокус, поэтому траектория стремится к оси \vec{e}^3 , но удаляется от начала координат по этой оси, так как $\lambda_3 > 0$

