Логарифмические уравнения

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Теорема 4. Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$a > 0, a \neq 1$$

Теорема 4. Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример:

- Решить уравнение $\log_3(x^2+6) = \log_3 5x$.

Решение:

потенцирование

$\log_3(x^2+6) = \log_3 5x \Leftrightarrow (x^2+6) = 5x$

$x^2+6>0; \quad 5x>0$

$(x^2+6) = 5x \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

$x_1 = 2; \;\; x_2 = 3$

$x_1^2+6 = 2^2+6 = 4+6 = 10 > 0 \;\; 5x_1 = 5\cdot 2 = 10 > 0$

$x_2^2+6 = 3^2+6 = 9+6 = 15 > 0 \;\; 5x_2 = 5\cdot 3 = 15 > 0$

Ответ: 2; 3.

Пример:

- Решить уравнение $\log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0$.

Решение:

$0 = \log_{0,1} 1 \Leftrightarrow \log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = \log_{0,1} 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 20 = 1$

$x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -7,5; \;\; x_2 = 2,5$

$x^2 + 4x - 20 > 0$

$x_1^2 + 4x_1 - 20 = (-7,5)^2 + 4 \cdot (-7,5) - 20 = 6,25 > 0$

$x_2^2 + 4x_2 - 20 = 2,5^2 + 4 \cdot 2,5 - 20 = -3,75 < 0$

Ответ: $-7,5$.

Пример:

- Решить уравнение $\log_3(x^2 - 11x + 27) = 2$.

Решение:

$2 = 2 \cdot 1 = 2\log_3 3 = \log_3 3^2 = \log_3 9 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 11x + 27) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 11x + 27) = \log_3 9 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 27 = 9$

$x^2 - 11x + 18 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2; \;\; x_2 = 9$

$x^2 - 11x + 27 > 0$

$x_1^2 - 11x_1 + 27 = 2^2 - 11 \cdot 2 + 27 = 9 > 0$

$x_2^2 - 11x_2 + 27 = 9^2 - 11 \cdot 9 + 27 = 9 > 0$

Ответ: 2; 9.

Пример:

- Решить уравнение $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$.

Решение:

$\log_5 x = a$

$2a^2 + 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -2, a_2 = -\frac{1}{2}$

$\log_5 x = -2$

$x = 5^{-2} = \frac{1}{25} > 0$

$\log_5 x = -\frac{1}{2}$

$x = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$

Ответ: $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пример:

- Решить уравнение $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5$.

Решение:

$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 3 \cdot 5 = \log_2 15$

$\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 15$

$x = 15 > 0$

Ответ: 15.

Пример:

- Решить уравнение $x^{\log_3 x} = 81.$

Решение:

$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$

$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow \log_3^2 x$

$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$

$x^{\log_3 x} = 81 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 4$

$\log_3 x = -2$ $\qquad$ $\log_3 x = 2$

$x = 3^{-2} = \frac{1}{9} > 0$ $\qquad$ $x = 3^2 = 9 > 0$

Ответ: $\frac{1}{9}$; 9.

Пример:

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x^2+3x-2)-\log_2 y = 1, \\ 3x-y=2 \end{cases}.$$

Решение:

$$\log_2(x^2+3x-2)-\log_2 y = 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{x^2+3x-2}{y} = \log_2 2$$

$$\frac{x^2+3x-2}{y} = 2$$

$$3x-y=2 \Leftrightarrow y = 3x-2$$

$$\frac{x^2+3x-2}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-2}{3x-2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-2 = 2(3x-2) \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

$$1\cdot 1+3\cdot 1-2 = 3 > 0; \quad 2\cdot 2+3\cdot 2-2 = 8 > 0$$

Ответ: $(1;1);(2;4)$.

Алгоритм решения логарифмических уравнений:

Привести обе части уравнения у логарифмам с одинаковым основанием.

Потенцировать уравнение и решать уравнение .

Полученные корни проверить по условиям: .

Те корни, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями исходного уравнения

Те корни, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, не являются корнями исходного уравнения.

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.
4. Метод логарифмирования.

$$\log_3(x^2+6)=\log_3 5x$$

$$\log_{0,1}(x^2+4x-20)=0$$

$$\log_3(x^2-11x+27)=2$$

$$2\log_5^2 x+5\log_5 x+2=0$$

$$x^{\log_3 x}=81$$