

Логарифмические уравнения

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Теорема 4. Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$a > 0, a \neq 1$$

Теорема 4. Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0, a \neq 1, t > 0, s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0, a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример:

Решить уравнение $\log_3(x^2 + 6) = \log_3 5x$.

Решение:

потенцированы

$$\log_3(x^2 + 6) = \log_3 5x \Leftrightarrow (x^2 + 6) \in 5x$$

$$x^2 + 6 > 0; \quad 5x > 0$$

$$(x^2 + 6) = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 3$$

$$x_1^2 + 6 = 2^2 + 6 = 4 + 6 = 10 > 0 \quad 5x_1 = 5 \cdot 2 = 10 > 0$$

$$x_2^2 + 6 = 3^2 + 6 = 9 + 6 = 15 > 0 \quad 5x_2 = 5 \cdot 3 = 15 > 0$$

Ответ: 2; 3.

Пример:

Решить уравнение $\log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0$.

Решение:

$$0 = \log_{0,1} 1 \Leftrightarrow \log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = \log_{0,1} 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 20 = 1$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -7,5; \quad x_2 = 2,5$$

$$x^2 + 4x - 20 > 0$$

$$x_1^2 + 4x_1 - 20 = (-7,5)^2 + 4 \cdot (-7,5) - 20 = 6,25 > 0$$

$$x_2^2 + 4x_2 - 20 = 2,5^2 + 4 \cdot 2,5 - 20 = -3,75 < 0$$

Ответ: $-7,5$.

Пример:

Решить уравнение $\log_3(x^2 - 11x + 27) = 2$.

Решение:

$$2 = 2 \cdot 1 = 2 \log_3 3 = \log_3 3^2 = \log_3 9 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 11x + 27) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 11x + 27) = \log_3 9 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 27 = 9$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2; x_2 = 9$$

$$x^2 - 11x + 27 > 0$$

$$x_1^2 - 11x_1 + 27 = 2^2 - 11 \cdot 2 + 27 = 9 > 0$$

$$x_2^2 - 11x_2 + 27 = 9^2 - 11 \cdot 9 + 27 = 9 > 0$$

Ответ: 2; 9.

Пример:

Решить уравнение $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$.

Решение:

$$\log_5 x = a$$

$$2a^2 + 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -2, a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_5 x = -2$$

$$x = 5^{-2} = \frac{1}{25} > 0$$

$$\log_5 x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$$

Ответ: $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пример:

Решить уравнение $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5$.

Решение:

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 3 \cdot 5 = \log_2 15$$

$$\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 15$$

$$x = 15 > 0$$

Ответ: 15.

Пример:

● Решить уравнение $x^{\log_3 x} = 81$.

Решение:

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$$

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 x \cdot \log_3 x \Leftrightarrow \log_3^2 x$$

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$$

$$x^{\log_3 x} = 81 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 4$$

$$\log_3 x = -2$$

$$x = 3^{-2} = \frac{1}{9} > 0$$

$$\log_3 x = 2$$

$$x = 3^2 = 9 > 0$$

Ответ: $\frac{1}{9}$; 9.

Пример:

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1, \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Решение:

$$\log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 + 3x - 2}{y} = \log_2 2$$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{y} = 2$$

$$3x - y = 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2$$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - 2}{3x - 2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 2 = 2(3x - 2) \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 = 3 > 0; \quad 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 2 = 8 > 0$$

Ответ: (1; 1); (2; 4).

Алгоритм решения логарифмических уравнений:



Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический.

$$\log_3(x^2 + 6) = \log_3 5x$$

2. Метод потенцирования.

$$\log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0$$

3. Метод введения новой переменной.

$$\log_3(x^2 - 11x + 17) = 2$$

4. Метод логарифмирования.

$$2\log_2^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$$

$$x^{\log_3 x} = 81$$