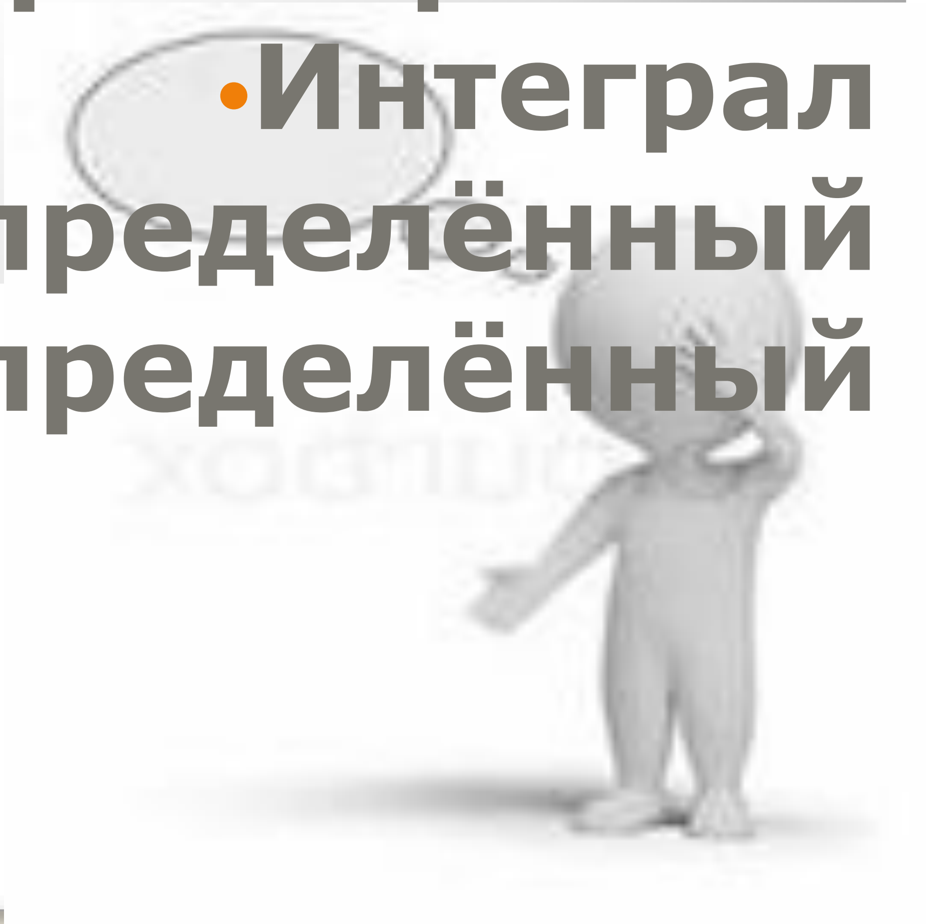
Первообразная и интеграл

Содержание

- Первообразная
- Интеграл

а) неопределённый

б) определённый



Первообразная

Определение

Функция F(x) называется первообразной функции f(x) на промежутке X, если

$$\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$$

На практике промежуток X обычно не указывают, но подразумевают (область определения функции).

Например: функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y=2x$, т.к. для любого x справедливо

$$(x^2)' = 2x.$$

Теорема 1

Если функция f(x) непрерывна при $x \in X$, ***то для f(x) существует первообразная F(x) на X.***

Теорема 2

Если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$, на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x)+C$.

Таблица первообразных

Зная формулы для нахождения производных, можно составить таблицу для нахождения первообразных

f(x)	F(x)
0	C
1	x
x	$x^2/2$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
1/x	ln|x|
sinx	-cosx
cosx	sinx
e^x	e^x
a^x	$a^x/\ln a$

Правила нахождения первообразных

1. **Первообразная суммы равна сумме первообразных**
2. **Если F(x) – первообразная для f(x), то к·F(x) – есть первообразная для к· f(x).**
3. **Если F(x) – первообразная для f(x), то первообразной для функции y= f(кx+m) служит функция y = 1/к· F(кx+ m)**

Найдём одну из первообразных

Если f(x) равно:

1) $f(x)=2x+x^3$
2) $f(x)=4x-2$
3) $f(x)=x^3-3x^2+x-1$
4) $f(x)=4x^5+2x+e$
5) $f(x)=x^4+3x^2+5$
6) $f(x)=5cosx-3sin2x$

Значит F(x) равно:

- $F(x)= x^2+x^4/4$
- $F(x)=2x^2-2x$
- $F(x)=x^4/4-2x^3+x^2/2-x$
- $F(x)=2x^6/3+x^2+ex$
- $F(x)=x^5/5+x^3+5x$
- $F(x)=5sinx+3/2cosx$

Ответить на вопрос:

какая функция является перообразной для функции

$$f(x)= 2\sin x - \cos x?$$

А) $\cos x - 2\sin x$

Б) $2\cos x - \sin x$

В) $-2\cos x - \sin x$

Г) $-\cos x + 2\sin x$

Ответ: в

Выберите ответ, при котором предложение будет верно.

Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, если:

А) $F'(x) = f(x)$

Б) $F'(x) = -f(x)$

В) $f'(x) = F(x)$

Г) $f(x) = F(x)$

Ответ: А

Ответить на вопрос:

для какой функции первообразной является функция $F(x)=2x^3+6x^2+x-9$?

А) $f(x) = 1/4 \cdot x^4+2x^3+x^2-9x$

Б) $f(x) = 2x^4+6x^3+x^2-9x$

В) $f(x) = 6x^2+12x+1$

Г) $f(x) = x^4/2+2x^3+1/2 \cdot x^2-9x$

Ответ: Г

Ответить на вопрос:

производная какой из функций равна $y = 4x - 3x^2$?

А) $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + C$

Б) $F(x) = 2x^2 - 1/3 \cdot x + C$

В) $F(x) = 2x^2 - x^3 + C$

Г) $F(x) = 4x^2 - x^4 + C$

Ответ: В

Задание №1. **Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через точку А.**

а) $f(x)=5x+x^2$, $A(0;3)$ б) $f(x)=3x - 5$, $A(4;10)$

Решение. а) **Найдём первообразные $F(x)= 5x^2/2+x^3/3+ C$, где C – произв. число.**

Найдём это C:

т.к. график проходит через точку $A(0;3)$, то

$F(0)= 5\cdot 0^2/2+0^3/3+ C = C$ и равно 3.

$C=3$

Значит производная, график которой проходит через т. А, имеет вид:

$$F(x)= 5x^2/2+x^3/3+3.$$

б) $f(x)=3x - 5$, $A(4;10)$

Решение. $F(x)= 3x^2/2-5x+C$, *где* C *– произв. число.*

$F(4)= 3\cdot4^2/2-5\cdot4+C=24-20+C=4+C$ **и**

$4+C=10 \Rightarrow C=6$, **тогда**

$F(x)= 3x^2/2-5x+6$

Ответ: $F(x)= 3x^2/2-5x+6$

Самостоятельно

Найдите первообразную функции f(x), график которой проходит через точку A, если:

1) $f(x)=x^2-5$, $A(3;4)$
2) $f(x)=2x^2+3$, $A(-2;-5)$
3) $f(x)=(x-2)^2$, $A(0;2)$
4) $f(x)=\cos 3x$, $A(0;1)$

Проверим ответы

1) $F(x) = x^3/3 - 5x + 10$
2) $F(x) = 2x^3/3 + 3x + 6(1/3)$
3) $F(x) = x^3/3 - 2x^2 + 4x + 2$
4) $F(x) = 1/3 \cdot \sin 3x + 1$

Задание №2. Найдите первообразную функции f(x), значение которой при $x = x_0$ равно y_0.

а) $f(x)=10x^4+x$; $x_0=0$; $y_0=6$

Решение. $F(x)= 10x^5/5 + x^2/2 + C$
$= 2x^5+ x^2/2 +C$, где C – произв. число.

Найдём С. Т.к. по условию
$F(x_0)=y_0$,
то $F(0)=2\cdot0^5+0^2/2+C=C$ и равно
$y_0= 6$.

Значит ответ: $F(x)=2x^5+x^2/2+6$

б) $f(x)=2\sin 3x+4\cos(x/2)$; $x_0=\pi/3$; $y_0=0$

Решение.

$F(x)=-2\cdot 1/3\cdot\cos 3x+4\cdot 2\sin(x/2)+C=$

$=-2/3\cdot\cos 3x+8\cdot\sin(x/2)+C$, где C- пр. ч.

Найдём C. Т.к. по условию $F(x_0)=y_0$,

то $F(\pi/3)=-2/3\cdot\cos\pi+8\sin(\pi/6)+C=$

$=2/3+8\cdot 1/2+C=4(2/3)+C$ и равно 0.

Тогда $C = -4(2/3)$.

Значит $F(x)=-2/3\cdot\cos 3x+8\cdot\sin(x/2)-4(2/3)$

в) $f(x)=4+6x^2$; $x_0=2$; $y_0<0$

Решение. $F(x)= 4x+6x^3/3+C$, где C-п.ч.

Найдём C: т.к. $F(x_0)= y_0$, то

$F(2)= 4\cdot2+6\cdot2^3/3+C= 8+16+C=24+C$

и $24+C <0$ => $C <-24$.

Пусть это будет (-25).

Тогда ответ $F(x)= 4x+6x^3/3-25$

г) $f(x)=2x^3+x^2+3$; $x_0=1$; $y_0>0$

Решение. $F(x)= 2x^4/4+x^3/3+3x+C$,

где С- пр.ч.

Найдём С.

$F(1)= 2\cdot 1^4/4+1^3/3+3\cdot 1+C =$

$3(5/6)+C$,

но $3(5/6)+C>0$ $\Rightarrow$ $C > - 3(5/6)$

Пусть $C=-1$, тогда

$F(x)= 2x^4/4+x^3/3+3x-1$

Задание №3. Найдите множество первообразных функции f(x).

а) $f(x) = \sin^2 x$ б) $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 6x$

<u>Решение.</u>

а) т.к. $f(x) = \sin^2 x$

$= (1 - \cos 2x)/2 = ½ - 1/2 \cdot \cos 2x$,

то одна из первообразных равна:

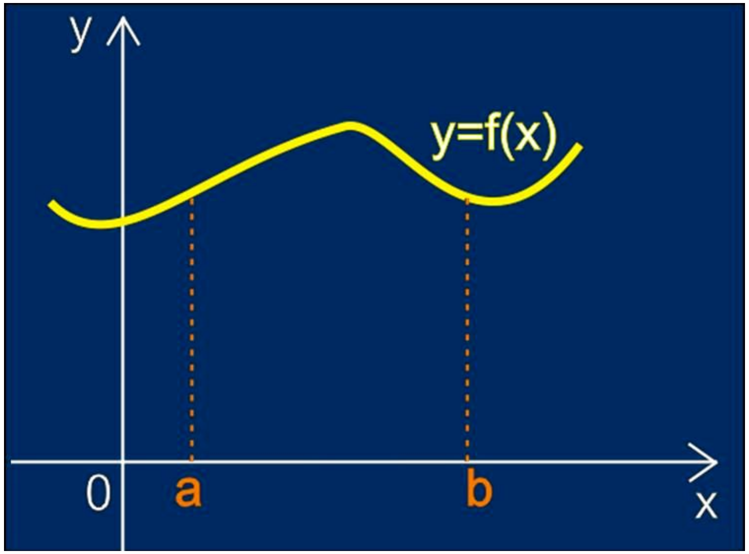
$F(x) = 1/2 \cdot x - 1/4 \cdot \sin 2x$.

Тогда множество всех перообразных равно

$F(x) = 1/2 \cdot x - 1/4 \cdot \sin 2x + C$, где C –пр. число б) $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 6x$

Решение. т.к. $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 6x =$
$= 1/2 \cdot (\sin 11x - \sin x)$,
то множество всех первообразных данной функции будет равно
$F(x) = 1/2 \cdot (-1/11 \cdot \cos 11x + \cos x) + C =$
$= 1/2 \cdot \cos x - 1/22 \cdot \cos 11x + C$

ИНТЕГРАЛЫ



ИНТЕГРАЛ

Неопределенный интеграл

Определённый интеграл

Обозначение:

$$\int f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx$$

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int f(x)dx$$

Определение:

Множество всех первообразных функции f(x) на некотором промежутке называется неопределенным интегралом от функции f(x) на этом промежутке и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$1. \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

$$2. \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

$$3. \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$4. \int \left(f_1(x) + f_2(x)\right) dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx.$$

$$5. \int f(kx+b)\, dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

$$6. \int f(x)\, d\left(g(x)\right) = f(x) g(x) - \int g(x)\, d\left(f(x)\right).$$

Таблица основных неопределённых интегралов

$$\int k dx = k \cdot x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ где } n \in N$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

Таблица интегралов

1. $\int k\,dx = k\cdot x + C$

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int e^{kx} dx = \dfrac{1}{k}\cdot e^{kx} + C$

7. $\int \sin kx\,dx = -\dfrac{1}{k}\cdot \cos kx + C$

8. $\int \cos kx\,dx = \dfrac{1}{k}\cdot \sin kx + C$

9. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$

10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \operatorname{tg} kx\,dx = -\dfrac{1}{k}\cdot \ln|\cos kx| + C$

12. $\int \operatorname{ctg} kx\,dx = \dfrac{1}{k}\cdot \ln|\sin kx| + C$

Определение

- Процесс нахождения интеграла называется **интегрированием**
- Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)dx$$

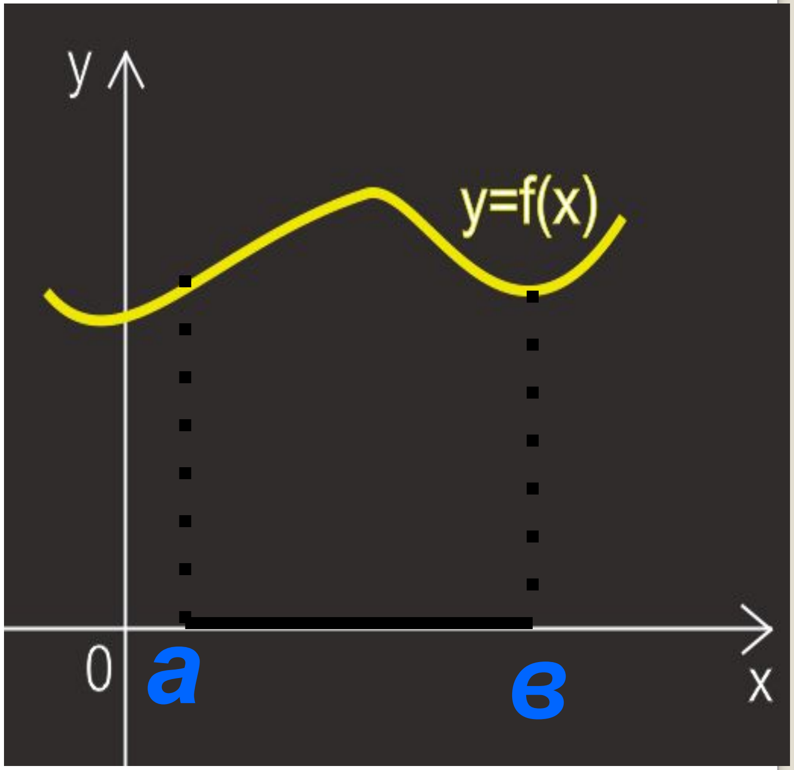
Определение

Пусть функция *y=f(x)* определена и интегрируема на отрезке [*a,b*] и пусть *F(x)* – некоторая ее первообразная. Тогда число *F(b)–F(a)* называется интегралом от *a* до *b* функции *f(x)* и обозначается

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Определение

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная
графиком функции f(x), графиками x=а и x=в, и осью ОХ



Формула Ньютона-Лейбница

Теорема: если функция у = f(x) непрерывна на отрезке [а;в], то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Опираясь на эту формулу получаются следующие свойства определенного интеграла

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int\limits_a^b dx = b - a$;

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4. $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

Свойства определенного интеграла

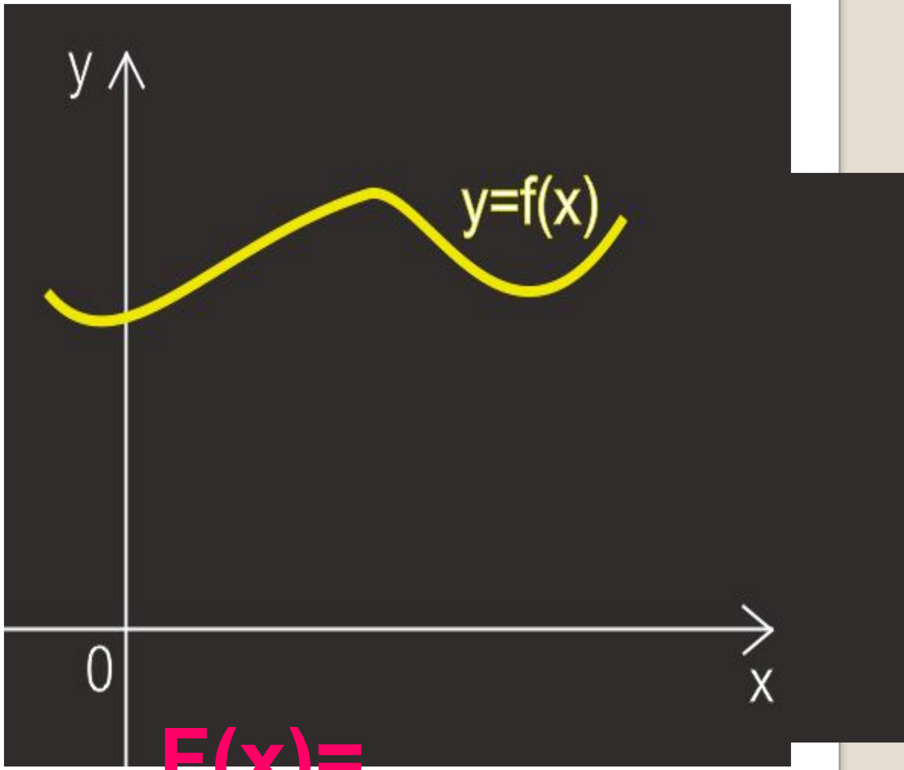
5. $\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$;

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

Алгоритм вычисления площади криволинейной трапеции

1. Схематично изобразить график функции *f(x)*.
2. Провести прямые *x=a* и *x=b*.
3. Записать одну из первообразных *F(x)* функции *f(x)*.
4. Составить и вычислить разность
5. *F(b) – F(a)*.



F(x)=… …

S = F(b) – F(a)=…- …

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, используя формулу Ньютона-Лейбница

Вариант 1

$f(x) = 2x - 3$

$y = 0,$

$x = 3,$

$x = 5$

Вариант 2

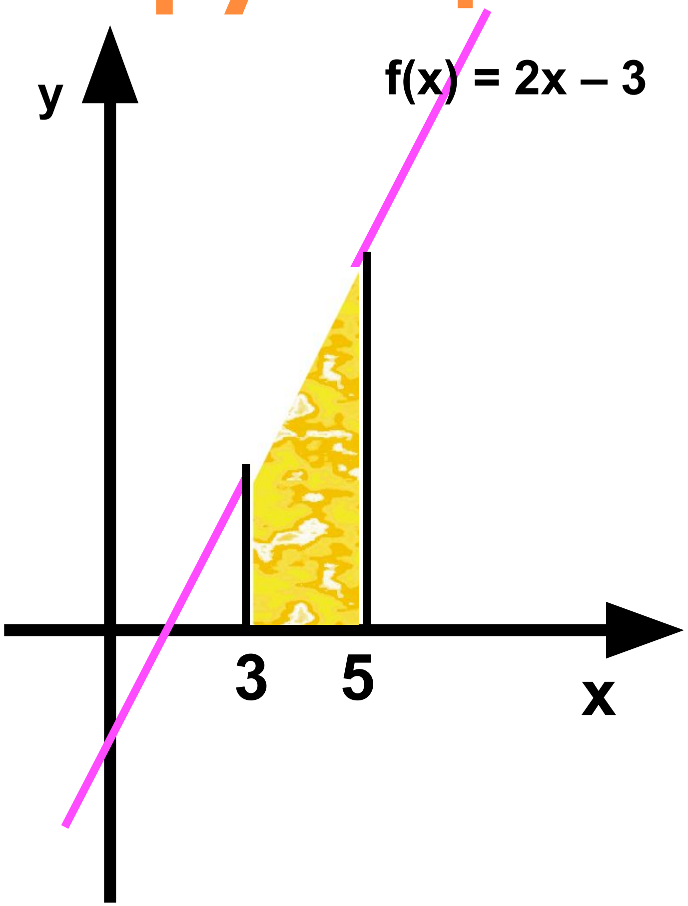
$f(x) = -2x - 3$

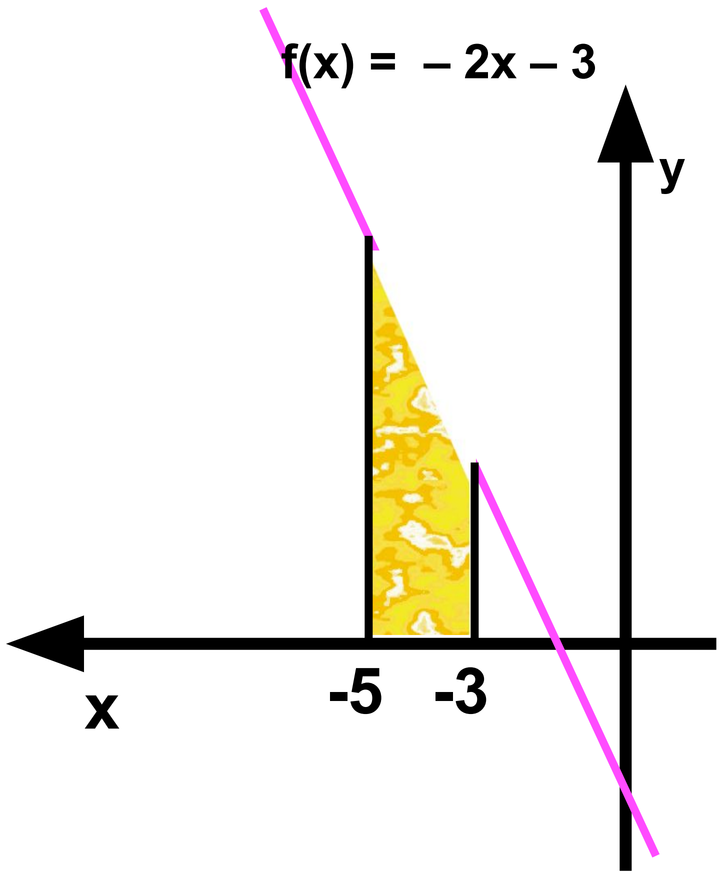
$y = 0,$

$x = -5,$

$x = -3$

Рассмотрим графики функций





Проверим решение

Вариант 1. **Если f(x) = 2x – 3**

$$F(x)=x^2-3x$$

$$S=F(5)-F(3)=$$

$$=5^2-3\cdot5-\left(3^2-3\cdot3\right)=$$

$$=10-0=10$$

Проверим решение

Вариант 2. **Если f(x) = – 2x – 3**

$$F(x) = -x^2 - 3x$$

$$S = F(-3) - F(-5) =$$

$$= -(-3)^2 - 3\cdot(-3) -$$

$$-\left(-(-5)^2 - 3\cdot(-5)\right) =$$

$$= 0 + 10 = 10$$

Вычисление площади плоских фигур с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры (S), ограниченной прямыми x = a и x = в и графиками функций y = f(x) и y = g(x), непрерывных на отрезке [a; в] и таких, что для любого хє [a;в] выполняется неравенство g(x)≤ f(x), вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

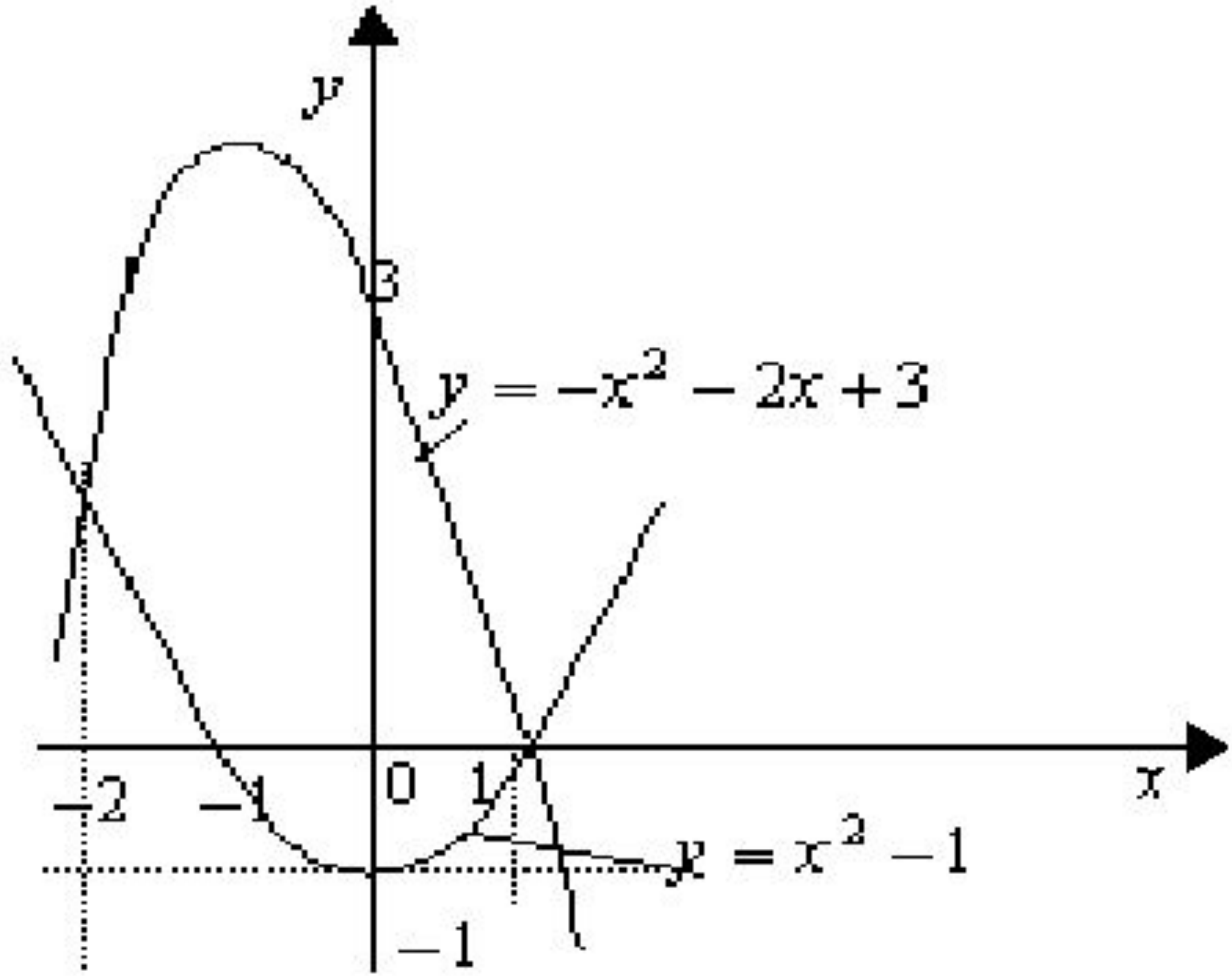
Например:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=-x^2-2x+3$$

$$y=x^2-1$$

Построим графики функций



Значит

Пределы интегрирования:

от **-2** до **1**

f(x)= - x^2-2x+3 **g(x)=x^2 - 1**

$$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

Тогда $$S=\int_{-2}^{1}\left[\left(-x^2-2x+3\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx=$$

$$= -2\int_{-2}^{1}\left(x^2 + x - 2\right)dx =$$

$$= -2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= -2\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right)\right] = -2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6\right) =$$

$$= -2\left(3 - 8 + \frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{9}{2}\right) = 9$$

Запомним

- **Геометрический смысл** определенного интеграла – это ***площадь криволинейной трапеции***
- **Физический смысл** определенного интеграла – это…

(учебник: стр. 291)

Вычисление объема тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* **криволинейной трапеции**, ограниченной кривой **y =f(x)** отрезком оси абсцисс **a ≤ x ≤ b** и прямыми **x=a; x=b**, вычисляется по формуле

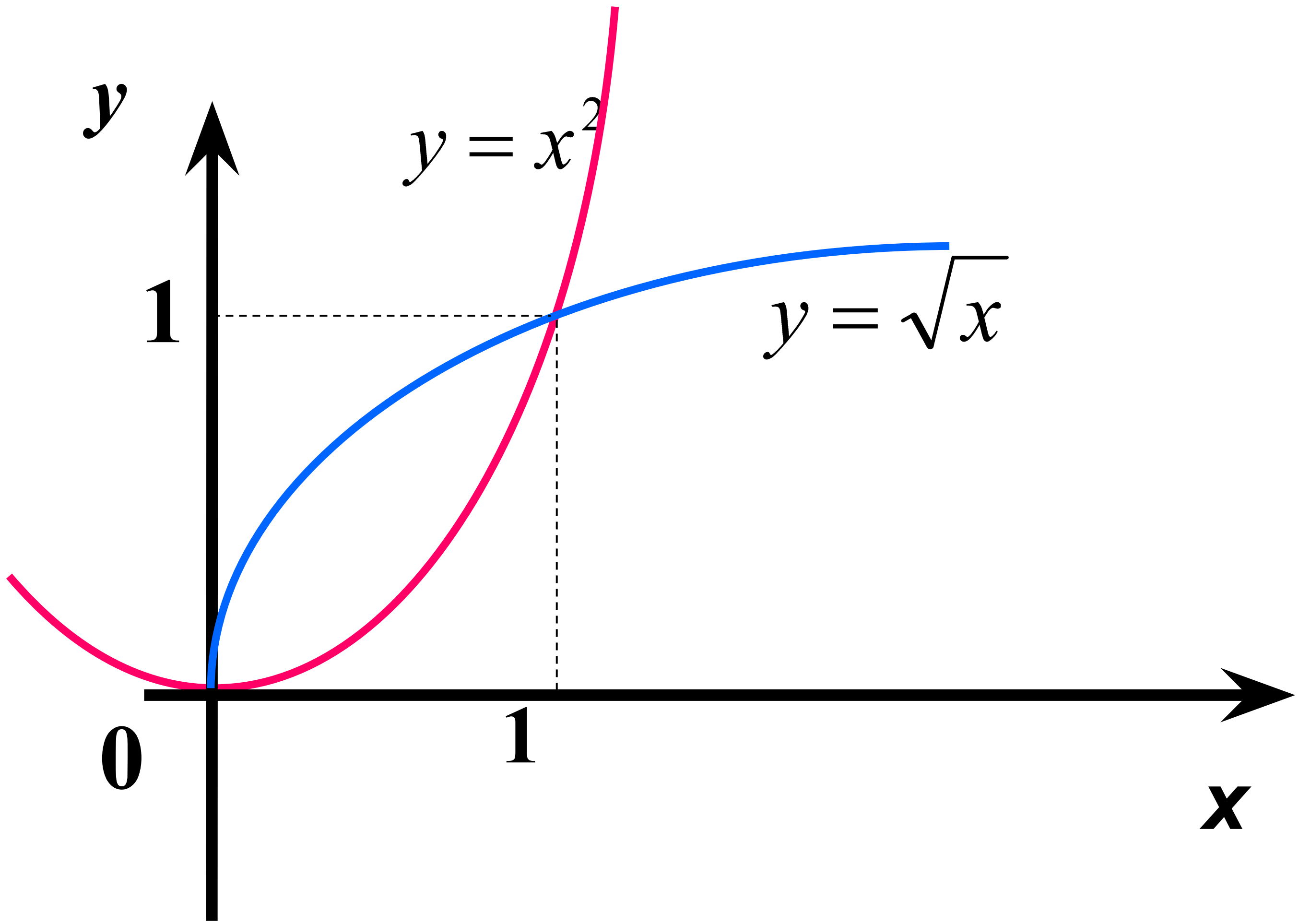
$$V_x = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Например

Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, ограниченных линиями

$y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Построим графики функций



Решение

Искомый объем можно найти как разность объемов, полученных вращением вокруг оси *Ox* криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y=\sqrt{x}$ и $y = x^2$. Т.е.:

$$V_x = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 x\,dx - \pi \int_0^1 x^4\,dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$

Применение интеграла

- **Площадь фигуры**
- **Объем тела вращения**
- **Работа электрического заряда**
- **Работа переменной силы**
- **Масса**
- **Перемещение**
- **Дифференциальное уравнение**
- **Давление**
- **Количество теплоты**

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $y=-3x^2-2, \quad x=1, \quad x=2,$
$y=-1$

2) $y=4x-x^2, \quad y=0$

3) $y=x^2-2x+3, \quad x+y=5$

4) $y=x^2, \quad y=|x|$