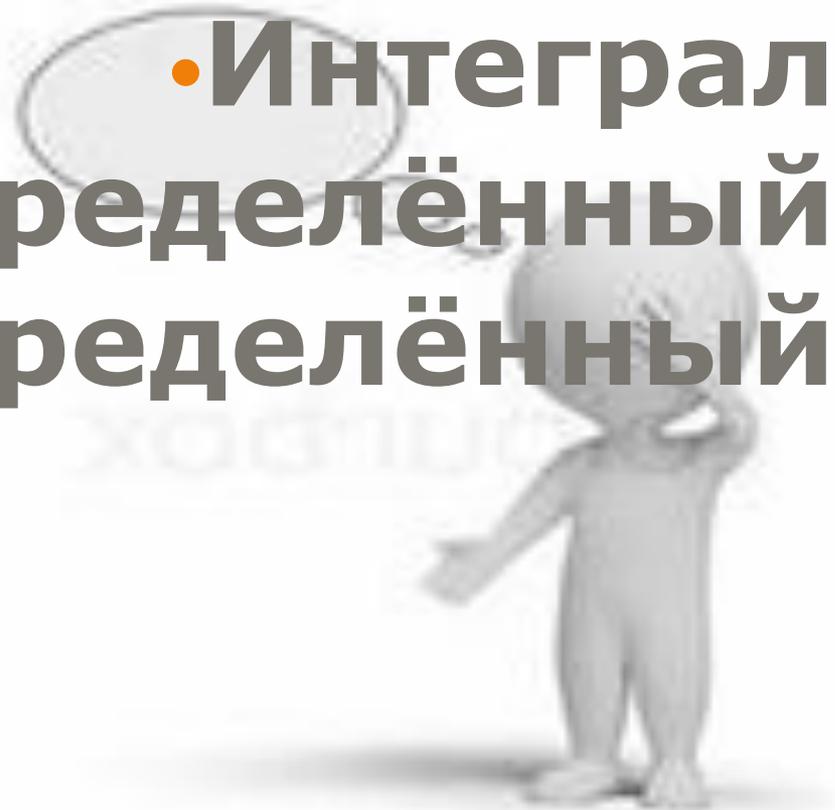


# Первообразная и интеграл



# Содержание

- Первообразная
- Интеграл
  - а) неопределённый
  - б) определённый



# Первообразная



# Определение

Функция  $F(x)$  называется первообразной функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , если

$$\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$$

На практике промежуток  $X$  обычно не указывают, но подразумевают (область определения функции).

Например: функция  $y = x^2$  является первообразной для функции  $y = 2x$ , т.к. для любого  $x$  справедливо  $(x^2)' = 2x$ .

## **Теорема 1**

**Если функция  $f(x)$**

**непрерывна при**

$x \in X$  , **то для**

**$f(x)$  существует**

**первообразная  $F(x)$**

**на  $X$ .**

## Теорема 2

**Если  $F(x)$  одна из первообразных функции  $f(x)$ , на промежутке  $X$ , то у функции  $y = f(x)$  бесконечно много первообразных, и все они имеют вид  $y = F(x) + C$ .**

# Таблица первообразных

**Зная формулы для нахождения производных, можно составить таблицу для нахождения первообразных**

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	x
x	$x^2/2$
$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
1/x	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x / \ln a$

# Правила нахождения первообразных

1. Первообразная суммы равна сумме первообразных
2. Если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то  $k \cdot F(x)$  – есть первообразная для  $k \cdot f(x)$ .
3. Если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то первообразной для функции  $y = f(kx + m)$  служит функция  $y = 1/k \cdot F(kx + m)$

# Найдём одну из первообразных

Если  $f(x)$  равно:

1)  $f(x) = 2x + x^3$

2)  $f(x) = 4x - 2$

3)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$$

4)  $f(x) = 4x^5 + 2x + e$

5)  $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

6)

$$f(x) = 5\cos x - 3\sin 2x$$

Значит  $F(x)$  равно:

⇒  $F(x) = x^2 + x^4/4$

⇒  $F(x) = 2x^2 - 2x$

⇒  $F(x) = x^4/4 - 2x^3 + x^2/2 - x$

⇒  $F(x) = 2x^6/3 + x^2 + ex$

⇒  $F(x) = x^5/5 + x^3 + 5x$

⇒  $F(x) = 5\sin x + 3/2\cos x$

Ответить на вопрос:

какая функция является  
перообразной для  
функции

$$f(x) = 2\sin x - \cos x?$$

- A)  $\cos x - 2\sin x$
- Б)  $2\cos x - \sin x$
- В)  $-2\cos x - \sin x$
- Г)  $-\cos x + 2\sin x$

**Ответ: В**

**Выберите ответ, при котором предложение будет верно.**

**Функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ ,**

**если:**

**A)  $F'(x) = f(x)$**

**Б)  $F'(x) = -f(x)$**

**В)  $f'(x) = F(x)$**

**Г)  $f(x) = F(x)$**

**Ответ: А**

## Ответить на вопрос:

для какой функции  
первообразной является  
функция

$$F(x) = 2x^3 + 6x^2 + x - 9?$$

А)  $f(x) = 1/4 \cdot x^4 + 2x^3 + x^2 - 9x$

Б)  $f(x) = 2x^4 + 6x^3 + x^2 - 9x$

В)  $f(x) = 6x^2 + 12x + 1$

Г)  $f(x) =$

$$x^4/2 + 2x^3 + 1/2 \cdot x^2 - 9x$$

Ответ: Г

Ответить на вопрос:

производная какой из функций равна  $y = 4x - 3x^2$ ?

**А)  $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + C$**

**Б)  $F(x) = 2x^2 - 1/3 \cdot x + C$**

**В)  $F(x) = 2x^2 - x^3 + C$**

**Г)  $F(x) = 4x^2 - x^4 + C$**

**Ответ: В**

**Задание №1. Найдите**  
**первообразную функции  $f(x)$ , график**  
**которой проходит через точку А.**

а)  $f(x)=5x+x^2$ ,  $A(0;3)$       б)  $f(x)=3x - 5$ ,  
 $A(4;10)$

**Решение.** а) Найдём первообразные  
 $F(x) = 5x^2/2 + x^3/3 + C$ , где  $C$  – произв.  
число.

Найдём это  $C$ :

т.к. график проходит через точку  $A(0;3)$ ,  
то

$$F(0) = 5 \cdot 0^2/2 + 0^3/3 + C = C \text{ и равно } 3.$$

$$C=3$$

Значит производная, график которой  
проходит через т. А, имеет вид:

$$F(x) = 5x^2/2 + x^3/3 + 3.$$

**6)  $f(x) = 3x - 5$ ,  $A(4; 10)$**

**Решение.  $F(x) =$**

**$3x^2/2 - 5x + C$ , где  $C$  –  
произв. число.**

**$F(4) =$**

**$3 \cdot 4^2 / 2 - 5 \cdot 4 + C = 24 - 20 + C = 4 + C$  и**

**$4 + C = 10 \Rightarrow C = 6$ , тогда**

**$F(x) = 3x^2/2 - 5x + 6$**

**Ответ:  $F(x) =$   
 $3x^2/2 - 5x + 6$**

## Самостоятельно

Найдите первообразную функции  $f(x)$ , график которой проходит через точку  $A$ , если:

1)  $f(x) = x^2 - 5$ ,  $A(3; 4)$

2)  $f(x) = 2x^2 + 3$ ,  $A(-2; -5)$

3)  $f(x) = (x - 2)^2$ ,  $A(0; 2)$

4)  $f(x) = \cos 3x$ ,  $A(0; 1)$

## Проверим ответы

1)  $F(x) = x^3/3 - 5x + 10$

2)  $F(x) = 2x^3/3 + 3x + 6(1/3)$

3)  $F(x) = x^3/3 - 2x^2 + 4x + 2$

4)  $F(x) = 1/3 \cdot \sin 3x + 1$

**Задание №2.** Найдите первообразную функции  $f(x)$ , значение которой при  $x = x_0$  равно  $y_0$ .

а)  $f(x) = 10x^4 + x$ ;  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 6$

Решение.  $F(x) = 10x^5/5 + x^2/2 + C$   
 $= 2x^5 + x^2/2 + C$ , где  $C$  – произв. число.

Найдём  $C$ . Т.к. по условию

$$F(x_0) = y_0,$$

то  $F(0) = 2 \cdot 0^5 + 0^2/2 + C = C$  и равно  $y_0 = 6$ .

Значит ответ:  $F(x) = 2x^5 + x^2/2 + 6$

**6)  $f(x) = 2\sin 3x + 4\cos(x/2)$ ;  $x_0 = \pi/3$ ;  
 $y_0 = 0$**

Решение.

$$F(x) = -2 \cdot 1/3 \cdot \cos 3x + 4 \cdot 2 \sin(x/2) + C =$$
$$= -2/3 \cdot \cos 3x + 8 \cdot \sin(x/2) + C, \text{ где } C - \text{ пр. ч.}$$

Найдём  $C$ . Т.к. по условию  $F(x_0) = y_0$ ,

$$\text{то } F(\pi/3) = -2/3 \cdot \cos$$

$$\pi + 8\sin(\pi/6) + C =$$

$$= 2/3 + 8 \cdot 1/2 + C = 4(2/3) + C \text{ и равно } 0.$$

$$\text{Тогда } C = -4(2/3).$$

$$\text{Значит } F(x) = -2/3 \cdot \cos 3x + 8 \cdot$$
$$\sin(x/2) - 4(2/3)$$

**В)  $f(x)=4+6x^2$ ;  $x_0=2$ ;  $y_0<0$**

**Решение.  $F(x)=4x+6x^3/3+C$ ,**

**где  $C$ -п.ч.**

**Найдём  $C$ : т.к.  $F(x_0)=y_0$ ,  
то**

$$F(2)=4\cdot 2+6\cdot 2^3/3+C=8+16+C=24+C$$

$$\text{и } 24+C < 0 \Rightarrow C < -24.$$

**Пусть это будет  $(-25)$ .**

**Тогда ответ  $F(x)=$   
 $4x+6x^3/3-25$**

**Г)  $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3; \quad x_0 = 1; \quad y_0 > 0$**

**Решение.  $F(x) = 2x^4/4 + x^3/3 + 3x + C,$**

где  $C$  - пр.ч.

**Найдём  $C$ .**

$$F(1) = 2 \cdot 1^4/4 + 1^3/3 + 3 \cdot 1 + C = 3(5/6) + C,$$

$$\text{но } 3(5/6) + C > 0 \quad \Rightarrow \quad C > -3(5/6)$$

Пусть  $C = -1$ , тогда

$$F(x) = 2x^4/4 + x^3/3 + 3x - 1$$

**Задание №3. Найдите множество первообразных функции  $f(x)$ .**

**а)  $f(x) = \sin^2 x$     б)  $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 6x$**

**Решение.**

**а) т.к.  $f(x) = \sin^2 x$   
 $= (1 - \cos 2x)/2 = 1/2 - 1/2 \cdot \cos 2x$ ,  
то одна из первообразных равна:  
 $F(x) = 1/2 \cdot x - 1/4 \cdot \sin 2x$ .**

**Тогда множество всех первообразных равно**

**$F(x) = 1/2 \cdot x - 1/4 \cdot \sin 2x + C$ , где  $C$  – пр. число**

$$6) f(x) = \sin 5x \cdot \cos 6x$$

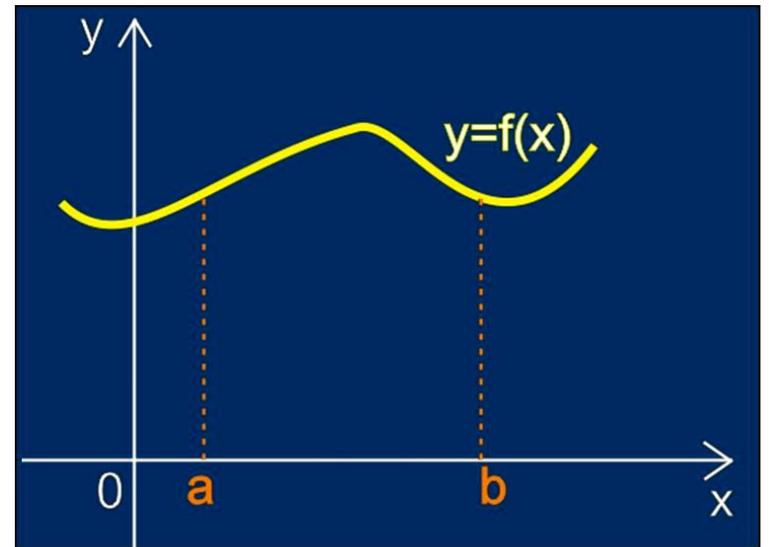
Решение. Т.к.  $f(x) = \sin 5x \cdot \cos 6x =$   
 $= 1/2 \cdot (\sin 11x - \sin x),$

то множество всех первообразных данной функции будет равно

$$F(x) = 1/2 \cdot (-1/11 \cdot \cos 11x + \cos x) + C =$$

$$= 1/2 \cdot \cos x - 1/22 \cdot \cos 11x + C$$

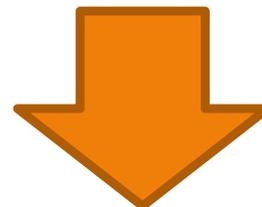
# ИНТЕГРАЛЫ



# ИНТЕГРАЛ



Неопределённый  
интеграл



Определённый  
интеграл

Обозначение:

$$\int f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

# НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int f(x) dx$$

## Определение:

Множество всех первообразных функции  $f(x)$  на некотором промежутке называется **неопределенным интегралом** от функции  $f(x)$  на этом промежутке и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

# Основные свойства неопределенного интеграла.

$$1. \left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$2. \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

$$3. \int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

**т.е. постоянный множитель  
можно выносить за знак  
интеграла**

# Основные свойства

## неопределенного интеграла.

$$4. \int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

$$5. \int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

$$6. \int f(x) d(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x) d(f(x)).$$

# Таблица основных неопределённых интегралов

$$\int k dx = k \cdot x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ где } n \in \mathbb{N}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C$$

# Таблица интегралов

$$1. \int k dx = k \cdot x + C$$

$$2. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$$

$$7. \int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cdot \cos kx + C$$

$$8. \int \cos kx dx = \frac{1}{k} \cdot \sin kx + C$$

$$9. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$10. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$11. \int \operatorname{tg} kx dx = -\frac{1}{k} \cdot \ln|\cos kx| + C$$

$$12. \int \operatorname{ctg} kx dx = \frac{1}{k} \cdot \ln|\sin kx| + C$$

## Определение

- Процесс нахождения интеграла называется **интегрированием**
- Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию

# ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x) dx$$

## Определение

Пусть функция  $y=f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[a,b]$  и пусть  $F(x)$  – некоторая ее первообразная. Тогда число  $F(b)-F(a)$  называется интегралом от  $a$  до  $b$  функции  $f(x)$  и обозначается

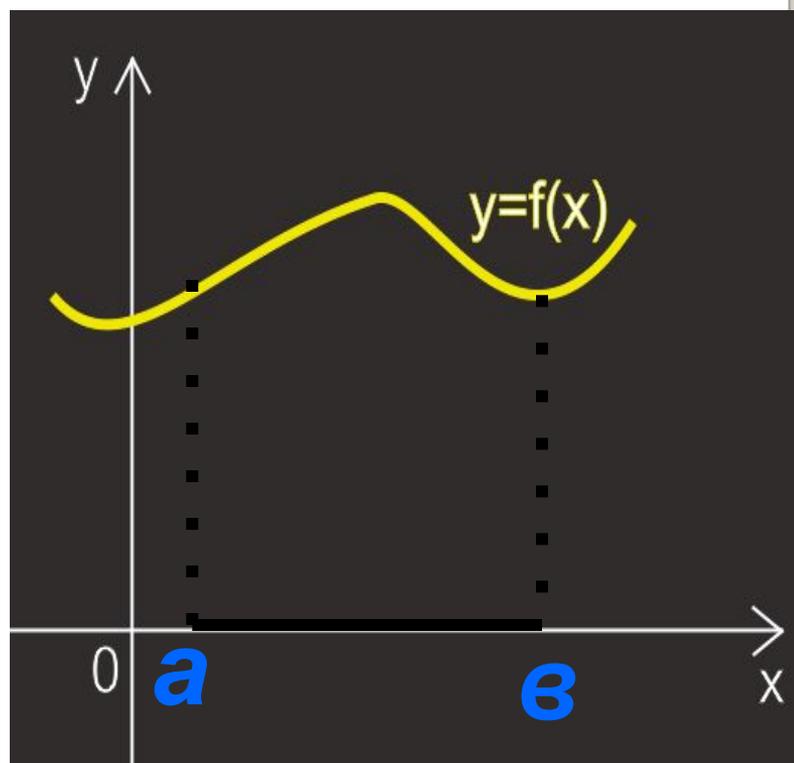
$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$$

# Определение

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная

графиком функции  $f(x)$ ,

графиками  $x=a$  и  $x=b$ , и осью  $Ox$



## Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема:** если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Опираясь на эту формулу  
получаются следующие свойства  
определенного интеграла

# Свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$2. \int_a^b dx = b - a;$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx;$$

$$4. \int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx;$$

# Свойства определенного интеграла

$$5. \int_a^b Kf(x)dx = K \int_a^b f(x)dx ;$$

$$6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ;$$

$$7. \int_a^b f(x)dx \geq 0 , \text{ если } f(x) \geq 0 .$$

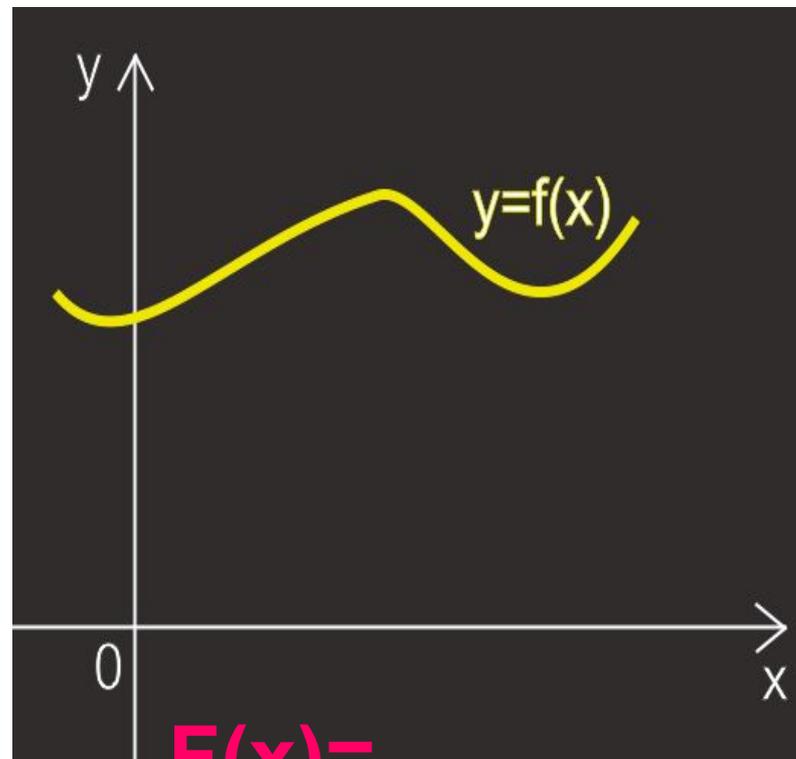
# Алгоритм вычисления площади криволинейной трапеции

1. Схематично изобразить график функции  $f(x)$ .

2. Провести прямые  $x=a$  и  $x=b$ .

3. Записать одну из первообразных  $F(x)$  функции  $f(x)$ .

4. Составить и вычислить разность  $F(b) - F(a)$ .



$$F(x) = \dots \dots$$

$$S = F(b) - F(a) = \dots - \dots$$

**Вычислить площадь фигуры,  
ограниченной линиями,  
используя формулу Ньютона-  
Лейбница**

### **Вариант 1**

$$f(x) = 2x - 3$$

$$y = 0,$$

$$x = 3,$$

$$x = 5$$

### **Вариант 2**

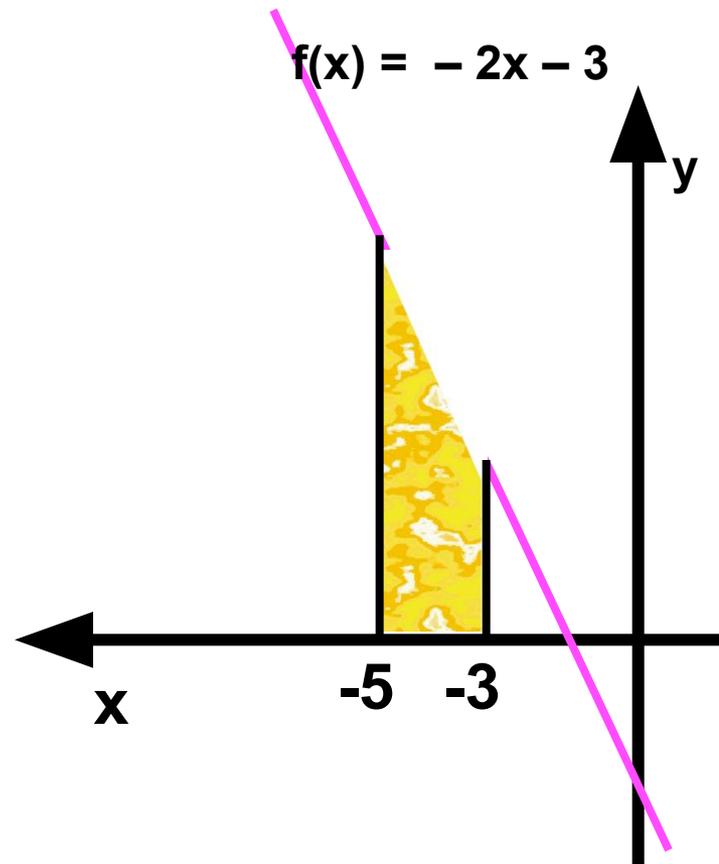
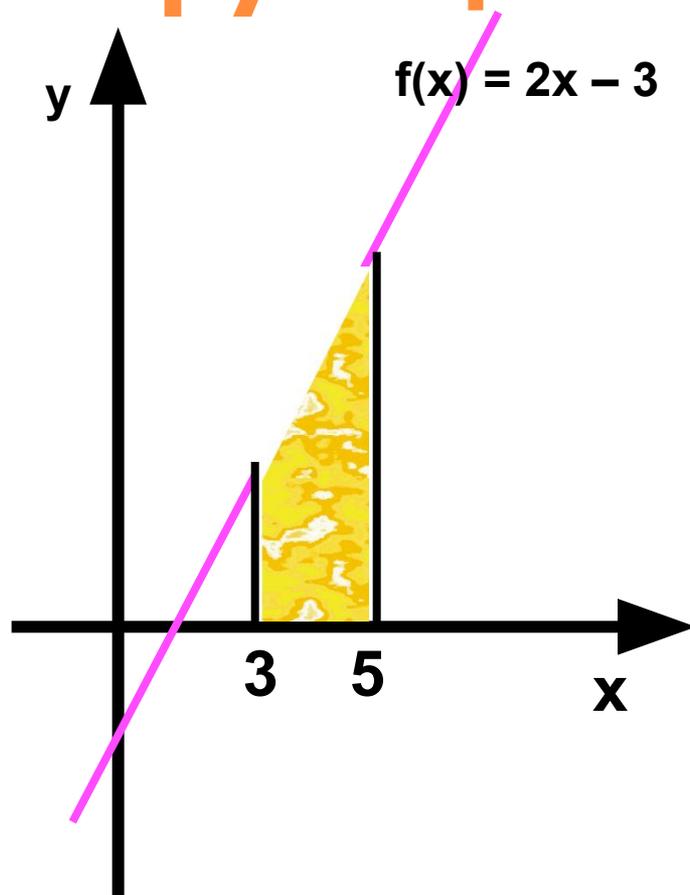
$$f(x) = -2x - 3$$

$$y = 0,$$

$$x = -5,$$

$$x = -3$$

# Рассмотрим графики функций



## Проверим решение

**Вариант 1.** Если  $f(x) = 2x - 3$

$$F(x) = x^2 - 3x$$

$$\begin{aligned} S &= F(5) - F(3) = \\ &= 5^2 - 3 \cdot 5 - (3^2 - 3 \cdot 3) = \\ &= 10 - 0 = 10 \end{aligned}$$

## Проверим решение

**Вариант 2.** Если  $f(x) = -2x - 3$

$$F(x) = -x^2 - 3x$$

$$\begin{aligned} S &= F(-3) - F(-5) = \\ &= -(-3)^2 - 3 \cdot (-3) - \\ &\quad - \left( -(-5)^2 - 3 \cdot (-5) \right) = \\ &= 0 + 10 = 10 \end{aligned}$$

## Вычисление площади плоских фигур с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры ( $S$ ),  
ограниченной прямыми  $x = a$   
и  $x = b$  и графиками  
функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ ,  
непрерывных на отрезке  $[a; b]$   
и таких, что для любого  $x \in [a; b]$   
выполняется  
неравенство  $g(x) \leq f(x)$ ,  
вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

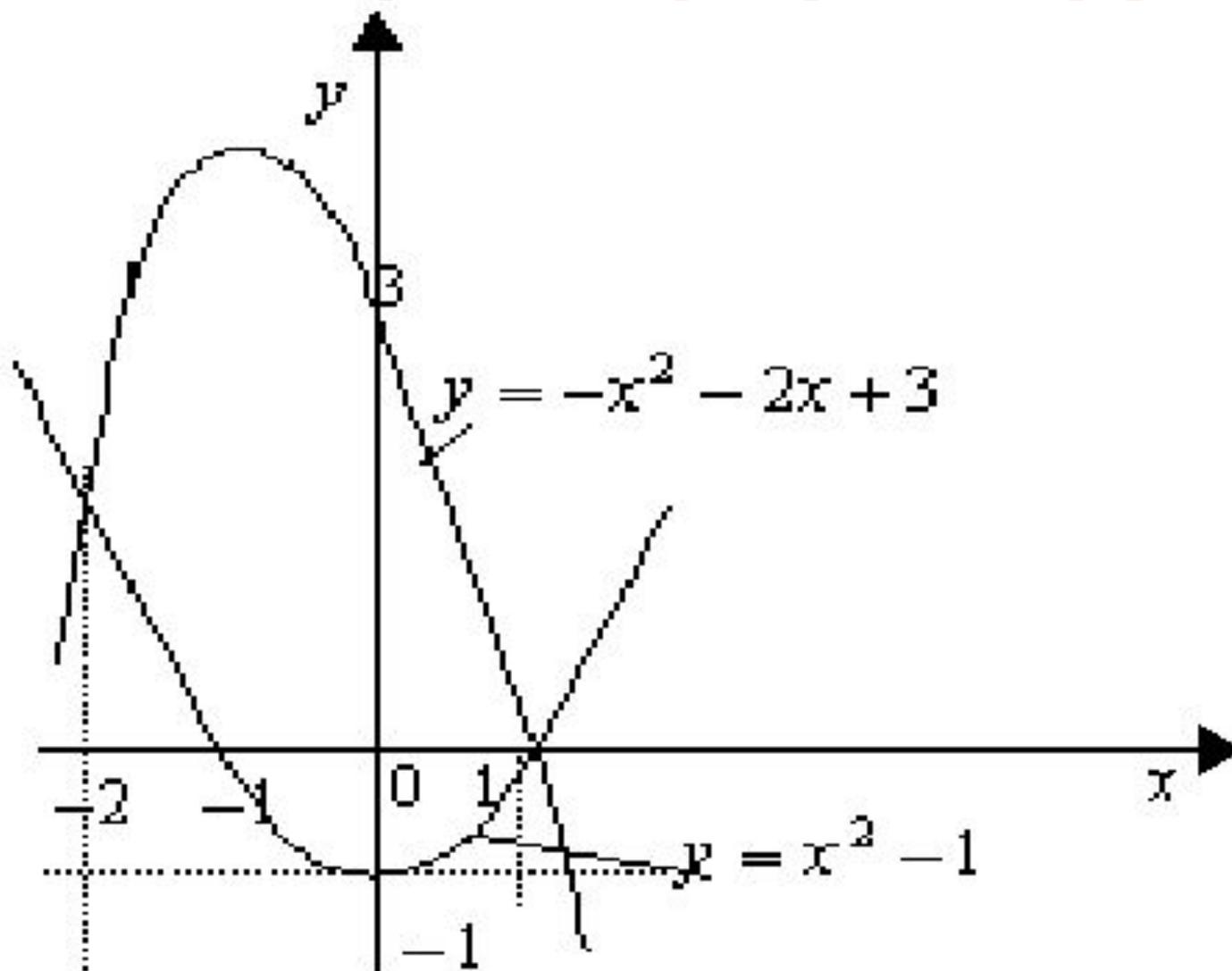
**Например:**

Вычислить площадь фигуры,  
ограниченной графиками функций

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

$$y = x^2 - 1$$

# Построим графики функций



## Значит

Пределы интегрирования:

от **-2** до **1**

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

**- 1**

**Тогда**

$$S = \int_{-2}^1 [(-x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1)] dx =$$

$$= \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx =$$

$$\begin{aligned} &= -2 \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = \\ &= -2 \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= -2 \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left( -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) \right] = -2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6 \right) = \\ &= -2 \left( 3 - 8 + \frac{1}{2} \right) = -2 \left( -\frac{9}{2} \right) = 9 \end{aligned}$$

## Запомним

- **Геометрический смысл** определенного интеграла – это ***площадь криволинейной трапеции***
- **Физический смысл** определенного интеграла – это...  
(учебник: стр. 291)

# Вычисление объема тела вращения

**Объем тела**, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$  отрезком оси абсцисс  $a \leq x \leq b$  и прямыми  $x=a$ ;  $x=b$ , вычисляется по формуле

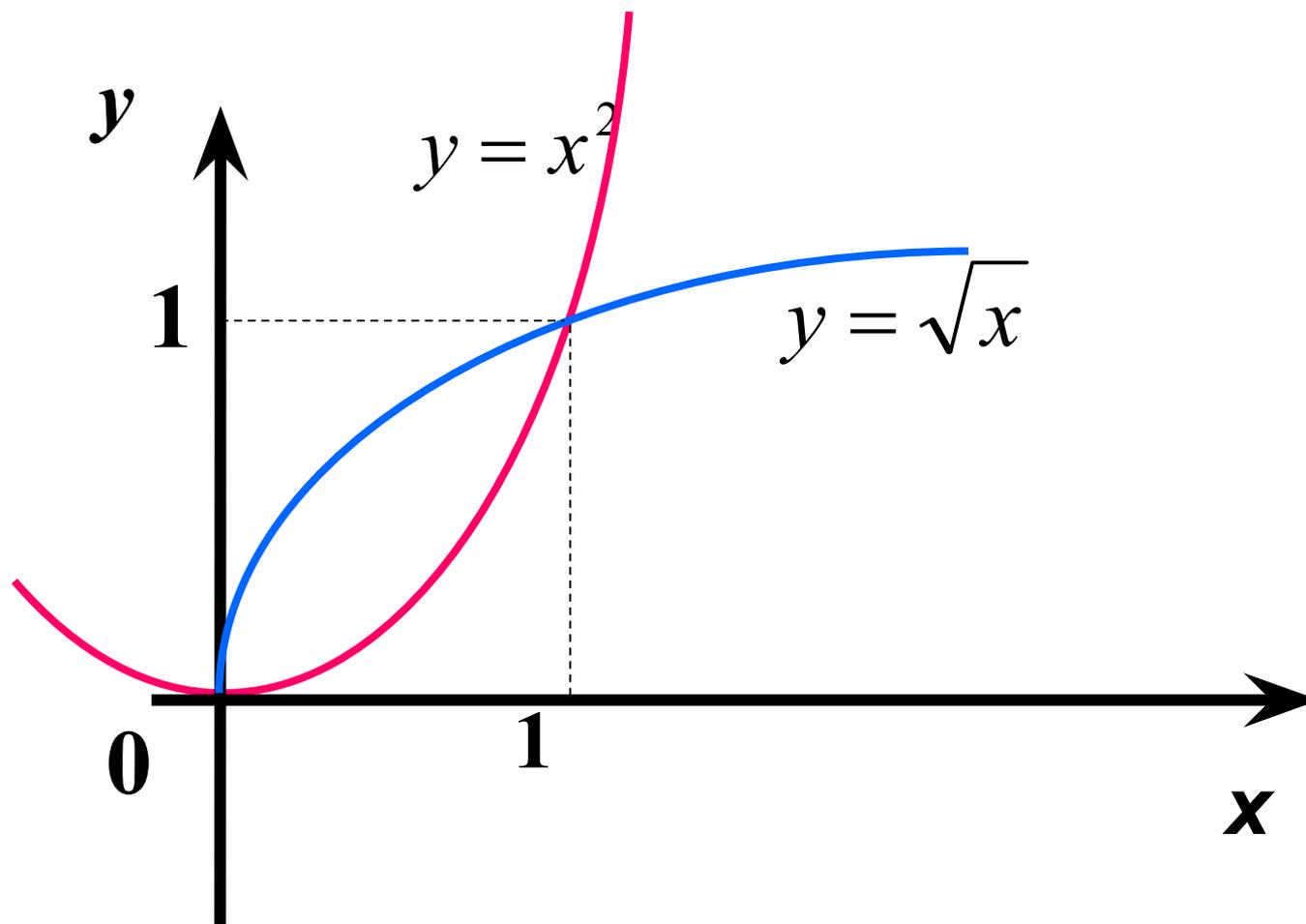
$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

**Например**

**Найти объем тела,  
полученного вращением  
вокруг оси  $Ox$   
криволинейных трапеций,  
ограниченных линиями**

$$y = x^2 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{x}$$

# Построим графики функций



## Решение

Искомый объем можно  
найти как

разность объемов,  
полученных

вращением вокруг оси  $Ox$   
криволинейных трапеций,

ограниченных линиями

$$y = \sqrt{x} \quad \text{и} \quad V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx =$$

$y = x^2$ . Т.е.:

$$\begin{aligned} &= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \\ &= \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10} \end{aligned}$$

## ***Применение интеграла***

- **Площадь фигуры**
- **Объем тела вращения**
- **Работа электрического заряда**
- **Работа переменной силы**
- **Масса**
- **Перемещение**
- **Дифференциальное уравнение**
- **Давление**
- **Количество теплоты**

**Найти площадь фигуры,  
ограниченной линиями**

**1)  $y = -3x^2 - 2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  
 $y = -1$**

**2)  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 0$**

**3)  $y = x^2 - 2x + 3$ ,  $x + y = 5$**

**4)  $y = x^2$ ,  $y = |x|$**