



Математический анализ
2 семестр
Занятие №8

Несобственные интегралы
первого рода

Занятие 8. Несобственные интегралы 1го рода

Пусть

1. функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; +\infty]$;

2. $\forall A > a$ существует $\int_a^A f(x) dx$;

Тогда $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$ называется

несобственным интегралом первого рода.

Если предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, в противном случае, что расходится или не существует.

Учебный пример:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln |\ln(x)| \Big|_2^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln |\ln(A)| - \ln |\ln(2)|) = \infty$$

Занятие 8. Несобственные интегралы 1го рода

Вычислить (или показать расходимость) следующих интегралов

1. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$

2. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

3. $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} dx$

4. $\int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

5. $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^4 + 1)^{5/3}} dx$

6. $\int_0^{\infty} \frac{x^6}{x^7 + 1} dx$

7. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$

8. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x + 1)}$

9. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1 + x)^3} dx$

10. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x + 1)}$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

Занятие 8. Несобственные интегралы 1го рода

Практический признак сходимости

Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x^\lambda f(x) = K, K \neq 0, +\infty$. Тогда $\int_a^\infty f(x) dx$ сходится

при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leq 1$.

Выяснить сходимость интегралов, не вычисляя их.

Учебный пример:

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x^6+x^2+1}} \cdot \frac{x-1}{x+1} dx \quad - \text{сходится}$$

$$\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x^6+x^2+1}} \cdot \frac{x-1}{x+1} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^6}} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x^{3/2}}{x^3} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \lambda = \frac{3}{2} > 1$$

Занятие 8. Несобственные интегралы 1го рода

Выяснить сходимость интегралов, не вычисляя их.

1. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$

2. $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx$

3. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx$

4. $\int_1^{\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$

5. $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(x^5 + x^3 + 1)^3} dx$

6. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}$

7. $\int_0^{\infty} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4 + x^5}} dx$

8. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$

9. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x \sqrt{1 + x}} dx$

10. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$

11. $\int_0^{\infty} \frac{(3 + x^2)^2 x^3}{(1 + x^2)^4} dx$

12. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$

Занятие 8. Несобственные интегралы 1го рода

Выяснить сходимость интегралов, не вычисляя их.

$$13. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$$

$$19. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$14. \int_2^{\infty} \frac{2x-3}{x^3-3x+8} dx$$

$$20. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} dx$$

$$15. \int_1^{\infty} \frac{(1+\sqrt{x})^3}{x^2\sqrt[3]{x+1}} dx$$

$$16. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{x^2\sqrt{x}} dx$$

$$17. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx$$

$$18. \int_2^{\infty} \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx$$



Спасибо за
внимание

Занятие окончено