Пространство Минковского

Определение 1:

$\vec{R} = (ct, x, y, z)$ – четырехвектор события (мировой точки)

$R^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ – квадрат длины

Компоненты $\vec{R}$ преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца

Определение 2:

Четырехскаляром (инвариантом) называется величина, не зависящая от выбора ИСО $a' = a$

R^2 – четырехскаляр

Пространство Минковского

Определение 3:

$\overset{\square}{A} = (A_t, A_x, A_y, A_z)$ − четырехвектор

Компоненты $\overset{\square}{A}$ преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца

$$
\begin{aligned}
A'_x &= \Gamma(A_x - \mathrm{B}A_t) \qquad & A_x &= \Gamma(A'_x + \mathrm{B}A'_t) \\
A'_y &= A_y & A_y &= A'_y \\
A'_z &= A_z & A_z &= A'_z \\
A'_t &= \Gamma(A_t - \mathrm{B}A_x) & A_t &= \Gamma(A'_t + \mathrm{B}A'_x)
\end{aligned}
$$

$$\Gamma = 1\Big/\sqrt{1-\mathrm{B}^2}, \quad \mathrm{B} = V/c$$

Четырехмерный мир (пространство Минковского)

Пространство Минковского

Свойства четырехвекторов

$$A^2 = A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2$$ – квадрат длины четырехвектора

1. $A^2 = \mathrm{inv}$ – четырехскаляр

2. $\vec{A} = \vec{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{A}' = \vec{B}'$

Равенство четырехвекторов сохраняется во всех ИСО

Четырехвектора можно складывать и умножать на числа как и обычные векторы.

Типы четырехвекторов

1. $A^2 < 0$ – *пространственноподобный*
2. $A^2 > 0$ – *времениподобный*
3. $A^2 = 0$ – *светоподобный*

Пространство Минковского

Четырехскорость

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{d\tau}$$, τ – собственное время материальной точки

$$dt = \gamma d\tau \Rightarrow \left[\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c \right]$$

$$\vec{V} = \gamma \frac{d\vec{R}}{dt} = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$$ или

$$\boxed{\vec{V} = (\gamma c, \gamma \boldsymbol{v})}$$

$$V^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2$$

Пространство Минковского

Релятивистский закон сложения скоростей

Из преобразований Лоренца для четырехскорости

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \mathrm{B} v_x / c}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\Gamma(1 - \mathrm{B} v_x / c)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\Gamma(1 - \mathrm{B} v_x / c)}$$

При малых скоростях $V \ll c, \; v \ll c$

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z \qquad \text{или} \qquad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$$

Релятивистский закон сложения скоростей соответствуют второму постулату Эйнштейна о неизменности скорости света c во всех ИСО.

Нерелятивистский импульс

Если в результате столкновения шаров (тел) движение одного шара "уменьшилось", то движение другого шара "увеличилось".

Поэтому предполагается, что при соударении тел сумма мер движения шаров не меняется.

Закон сохранения импульса (для замкнутых систем)

$$\sum \boldsymbol{p}_i = \mathrm{const}, \qquad \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$$

Следствия:

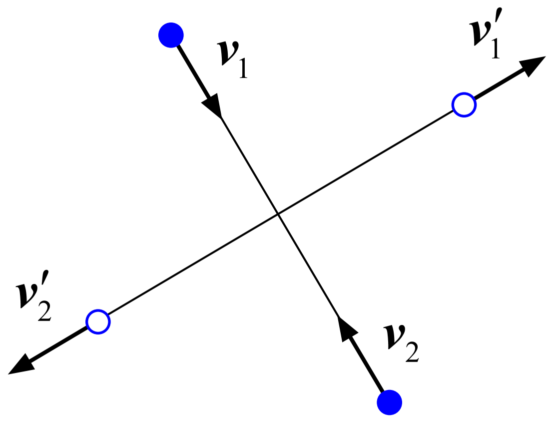
1. Закон сохранения массы.
2. Закон сохранение кинетической энергии при абсолютно упругих столкновениях

Релятивистский импульс

Пусть в релятивистском случае

1. $\sum \boldsymbol{p}_i = \text{const}$
2. $\boldsymbol{p} = m(v)\boldsymbol{v}$

Упругое столкновение двух одинаковых частиц



В системе центра масс $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1$

Импульс частиц равен 0 ⇒ $\boldsymbol{v}_2' = -\boldsymbol{v}_1'$

Столкновение упругое ⇒

$$v_1' = v_1, \quad v_2' = v_2$$

Релятивистский импульс

4-импульс

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{V} = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v})}$$

m − обычная масса $\Rightarrow$ при $v \to 0$ $\gamma m\mathbf{v} \to m\mathbf{v}$

В системе центра масс

$$\underbrace{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}_{\text{4-вектор}} = \underbrace{\vec{P}_1' + \vec{P}_2'}_{\text{4-вектор}} \qquad \left[\ (2\gamma mc, 0, 0, 0) = (2\gamma mc, 0, 0, 0) \ \right]$$

$\Rightarrow$ данное равенство сохраняется во всех ИСО

Релятивистский импульс

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \qquad \text{или}$$

$$(\gamma_1 mc + \gamma_2 mc,\ \gamma_1 m\boldsymbol{v}_1 + \gamma_2 m\boldsymbol{v}_2) = (\gamma_1' mc + \gamma_2' mc,\ \gamma_1' m\boldsymbol{v}_1' + \gamma_2' m\boldsymbol{v}_2') \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \mathrm{const}$$

$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$ – релятивистский импульс

Данное выражение импульса единственное совместимое с принципом сохранения импульса при столкновении двух частиц $\Rightarrow$

$\sum \boldsymbol{p}_i = \mathrm{const}, \quad \boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$ – закон сохранения импульса

Релятивистский энергия

Определение:

$$\boxed{E = \gamma mc^2 \quad - \text{релятивистский энергия}}$$

4-импульс системы $\left(\sum \frac{E_i}{c}, \sum \gamma_i m_i \boldsymbol{v}_i \right)$

Так как в замкнутой системе во всех ИСО сохраняются пространственные компоненты 4-импульса системы ⇒

Сохраняется также временная компонента 4-импульса системы, или

$$\boxed{\sum E_i = \text{const}, \quad E = \gamma mc^2}$$ – закон сохранения энергии

Релятивистский энергия

При малых скоростях $E = \gamma mc^2 \approx mc^2 + \dfrac{mv^2}{2}$

$E_0 = mc^2$ – *энергия покоя*

$K = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$ – кинетическая энергия

При упругих столкновениях

$$\sum K_i = \text{const}$$

Таким образом, закон сохранения импульса приводит к

закону сохранения энергии и к

закону сохранения кинетической энергии (для упругих столкновений)

Релятивистский энергия

4-вектор энергии-импульса (4-импульса)

$$\boxed{\vec{P} = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right)}$$

$$\vec{P}^2 = E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$$

Энергия и импульс света

При $v = c$ $\Rightarrow$ $\left(E = \dfrac{pc^2}{v} \right)$

$$\boxed{E = pc}$$

$$E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$$

Данные соотношения подтверждаются экспериментально, например, при изучении эффекта Комптона.

Релятивистская сила

$$\frac{d}{dt}\begin{cases} E^2/c^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2 \\ \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \boldsymbol{v}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} \\ \dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}\times\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} \end{cases}$$

Исходя их этого, сила (как мера воздействия) определяется как

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}}$$

4-вектор силы

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} \qquad \left(dt = \gamma d\tau \qquad \frac{dE}{dt} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{F} \right) \Rightarrow$$

Релятивистская динамика

Релятивистская сила

$$F = \left(\frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}),\ \gamma \boldsymbol{F} \right)$$

В соответствии с преобразованиями Лоренца

$$F'_x = \frac{F_x - \dfrac{B}{c}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v})}{1 - \mathrm{B} v_x / c}, \qquad F'_y = \frac{F_y}{\Gamma(1 - \mathrm{B} v_x / c)}, \qquad F'_z = \frac{F_z}{\Gamma(1 - \mathrm{B} v_x / c)}$$

$$\boldsymbol{F}'\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{F}\boldsymbol{v} - V F_x}{1 - \mathrm{B} v_x / c},$$