

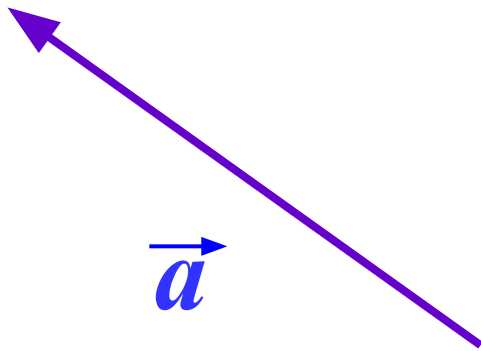
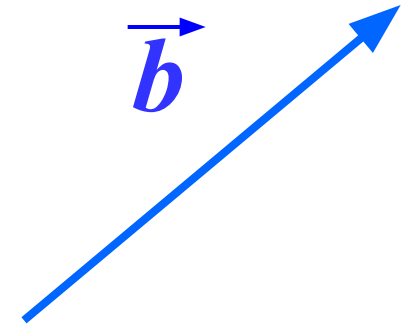
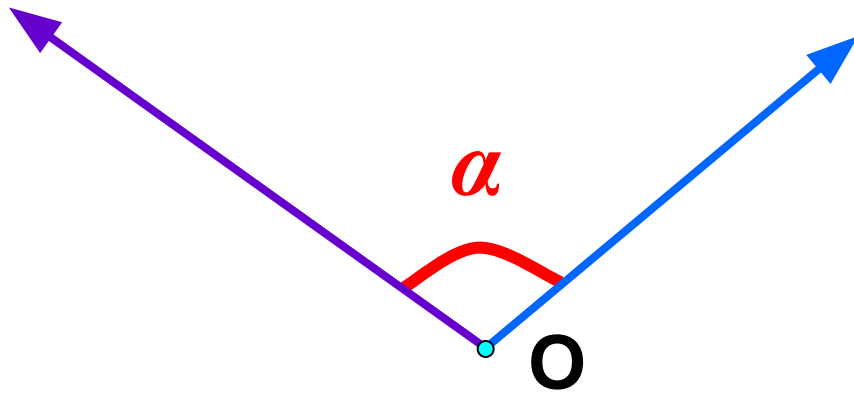
А зачем у  
меня  
саночки?

# СКАЛЯРНОЕ ПРОЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



Геометрия 9 класс

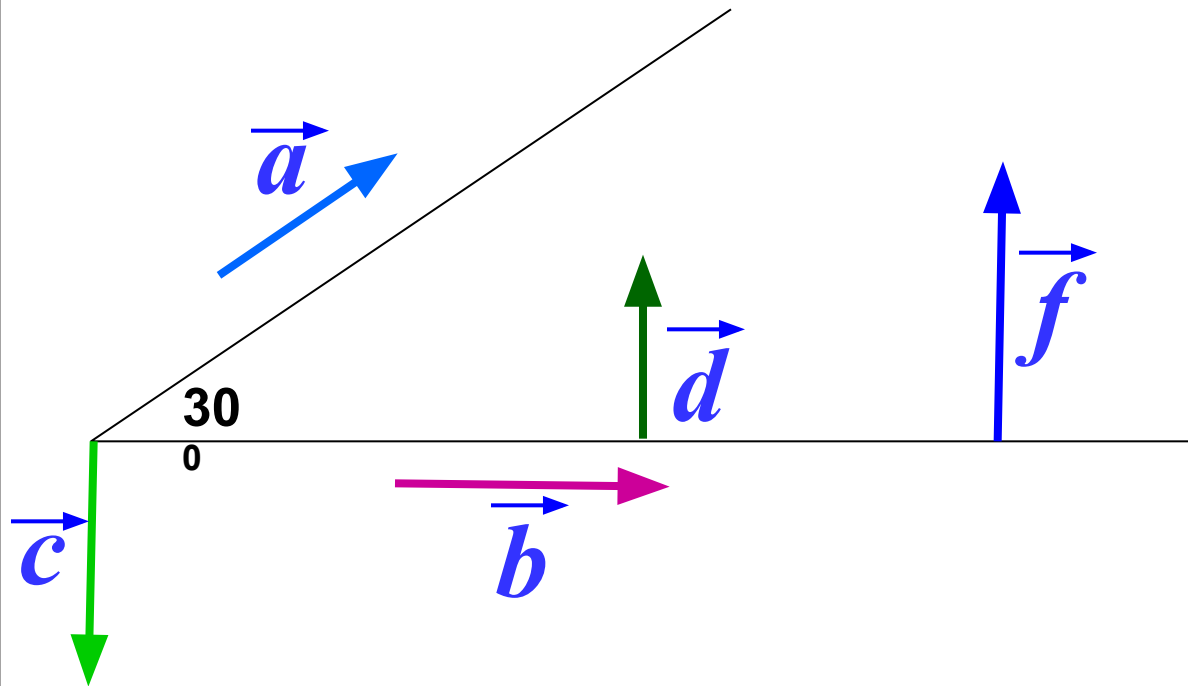
# Введение понятия угла между векторами



Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\alpha$ .

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha \text{ (альфа)}$$

# Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

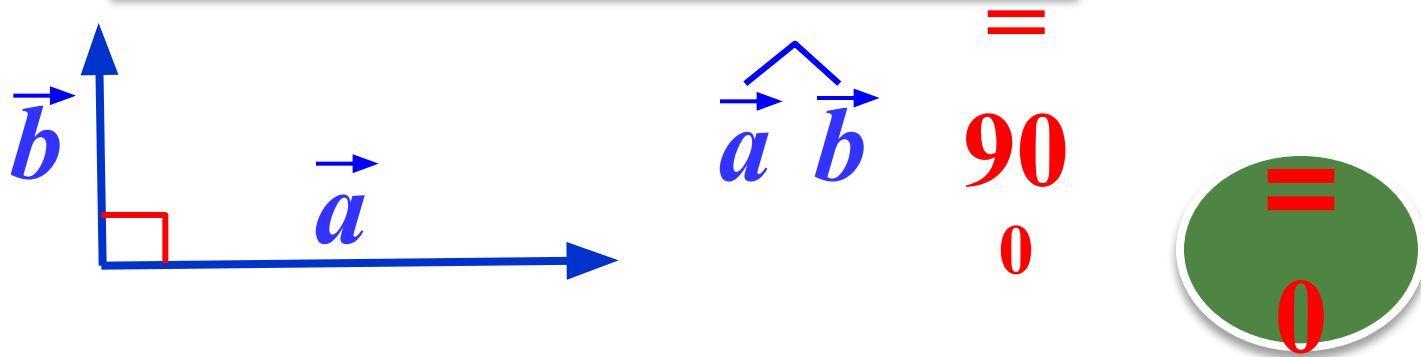
## Определение

**Скалярным произведением** двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

## Пример №1

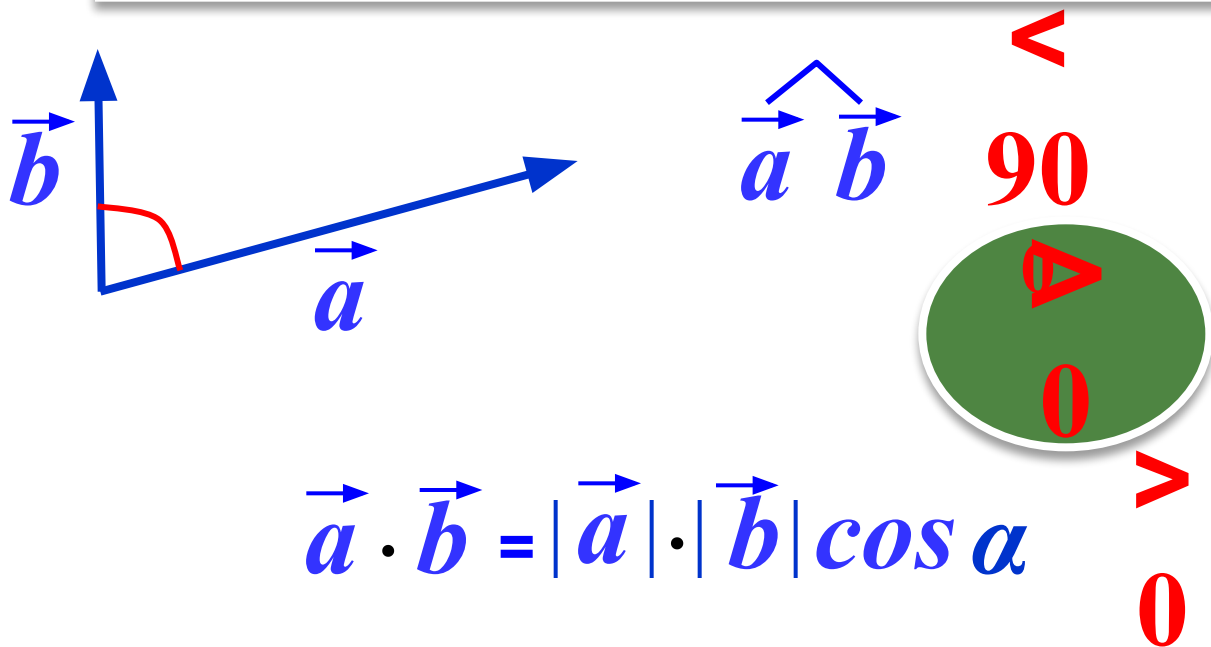


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

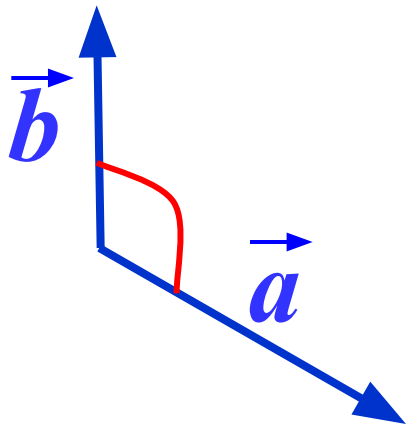
## Пример №2



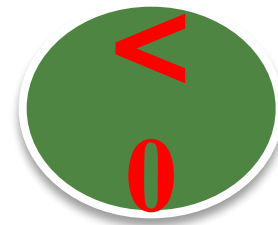
Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \angle(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$$

## Пример №3



$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$< 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

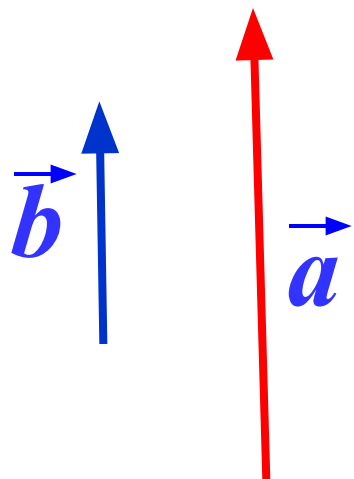


$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

$$> 0$$

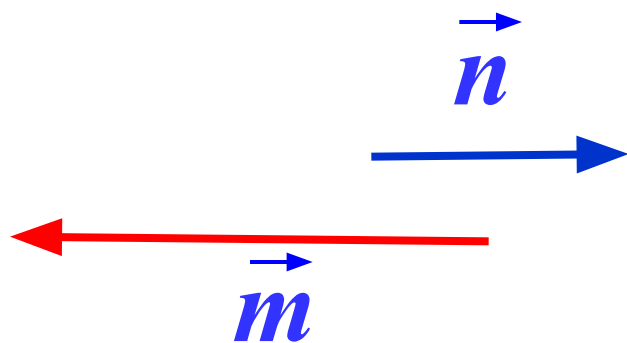
$$0$$

## Пример №4



$$\widehat{a \ b} = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$



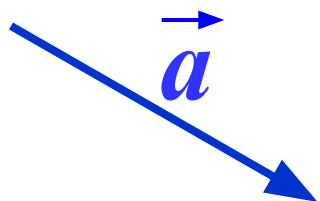
$$\widehat{m \ n} = 180^\circ$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos 180^\circ = -|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|$$



## Пример №5

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \vec{a} \quad \vec{a} \\ \hline = \\ 0^0 \end{array}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  называется  
**скалярным квадратом** вектора  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{a}^2$

Таким образом,  
**скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

# ИТОГО:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{ab}).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

– скалярный квадрат вектора

• Дано:  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 135^\circ$ .

Найти:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 135^\circ = 6 \cdot \cos(180^\circ - 45^\circ) =$$

$$6 \cdot (-\cos 45^\circ) = -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

Ответ:  $-3\sqrt{2}$

Найдите скалярное произведение векторов

$$|\vec{a}| = 5, \quad |\vec{b}| = 4, \quad \widehat{\vec{a} \vec{b}} = 60^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

*Если  $\vec{a}\{x_1; y_1\}; \vec{b}\{x_2; y_2\}$ , то*  
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$\nearrow \cos \varphi > 0, \Rightarrow \varphi$  – острый.

$\rightarrow \cos \varphi = 0, \Rightarrow \varphi$  – прямой.

$\searrow \cos \varphi < 0, \Rightarrow \varphi$  – тупой.

Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если:

а)  $\vec{m} \{1; 2\}$ ,  $\vec{n} \{-2; 4\}$ ; б)  $\vec{m} \{0; 0,5\}$ ,  $\vec{n} \{3; -2\}$ .

Р е ш е н и е.

$$\text{а) } \vec{m} \cdot \vec{n} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = -2 + 8 = 6$$

б) решите самостоятельно

Вычислите косинус угла между векторами  $\vec{p} \{3; 4\}$  и  $\vec{q} \{15; 8\}$ .

Даны векторы  $\vec{a} \{2; -3\}$  и  $\vec{b} \{x; -4\}$ .

При каком значении  $x$  эти векторы перпендикулярны?

