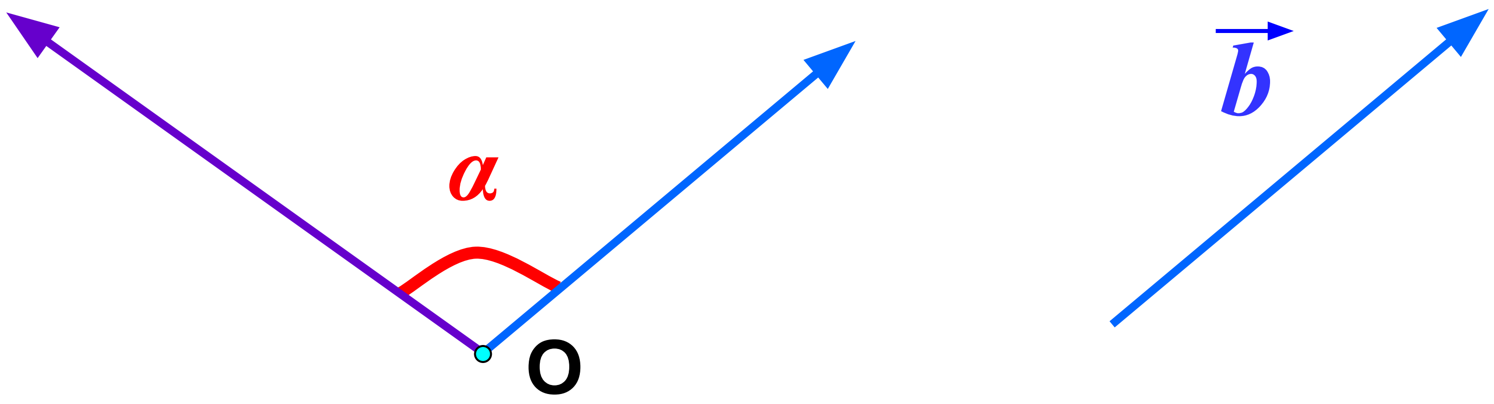
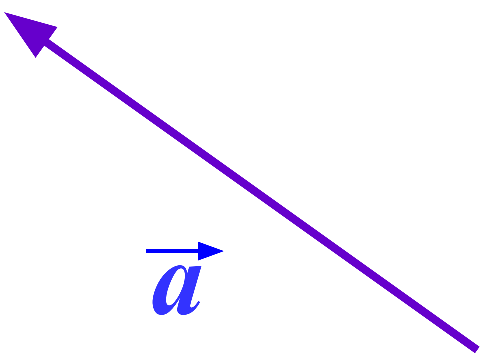
А зачем у меня саночки?

СКАЛЯРНОЕ ПРОЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Геометрия 9 класс

Введение понятия угла между векторами

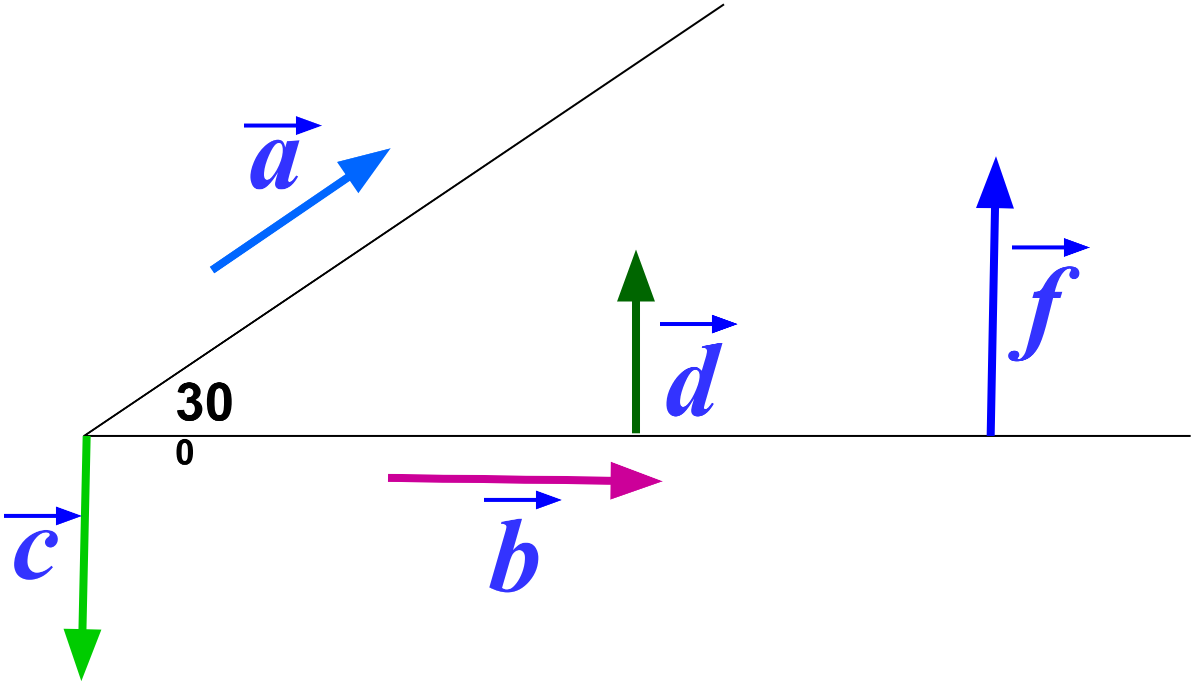




Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α .

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$$ **(альфа)**

Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30^0$$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120^0$$

$$\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 90^0$$

$$\widehat{\vec{d}\,\vec{c}} = 180^0$$

$$\widehat{\vec{d}\,\vec{f}} = 0^0$$

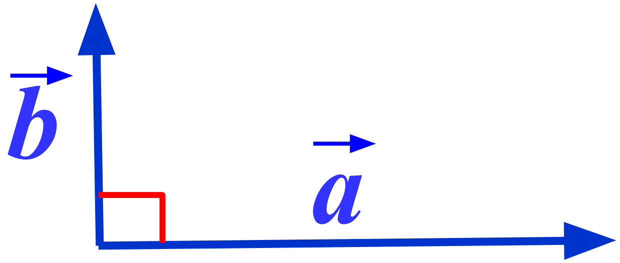
Определение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Пример №1



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$$

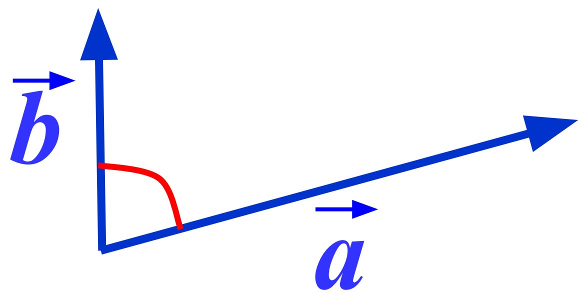
$$= 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

Пример №2



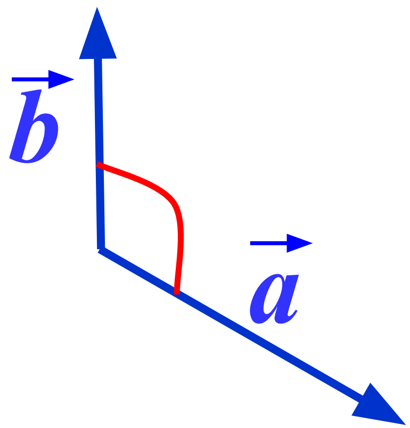
$$\widehat{\vec a\,\vec b} < 90^0$$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cos\alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый.**

$$\vec a \cdot \vec b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec a\,\vec b} < 90^0$$

Пример №3



$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} > 90^0$$

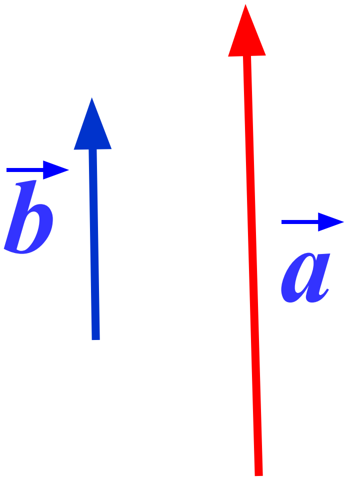
< 0

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} > 90^0$$

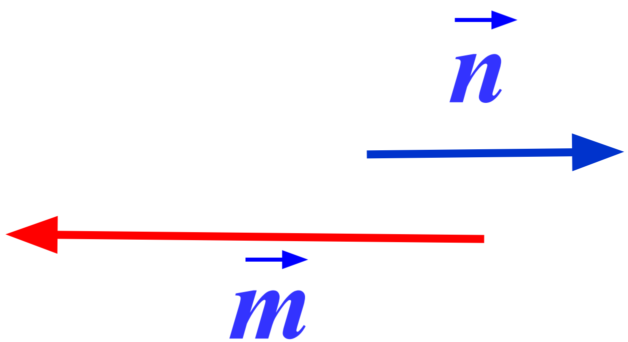
Пример №4



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



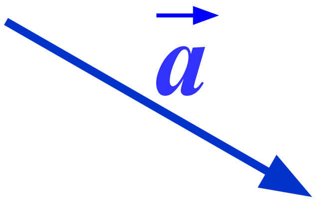
$$\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = 180^0$$

-1

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = |\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos 180^0 = -|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$$

Пример №5

$$\widehat{\vec{a}\;\vec{a}} = 0^0$$



1

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

ИТОГО:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right).$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0 \le \left(\vec{a},\vec{b}\right) < 90^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \left(\vec{a},\vec{b}\right) \le 180^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Leftrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$ – скалярный квадрат вектора

- Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = 135°$.

Найти: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Решение.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 135° = 6 \cdot \cos(180° - 45°) =$

$6 \cdot (-\cos 45°) = -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$

Ответ: $-3\sqrt{2}$

Найдите скалярное произведение векторов

$$|\vec{a}| = 5, \quad |\vec{b}| = 4, \quad \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 60^0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

<u>Скалярное произведение</u> *двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.*

$$\textit{Если}\quad \vec{a}\{x_1; y_1\};\ \vec{b}\{x_2; y_2\},\ \textit{то}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2.$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$\cos\varphi > 0, \Rightarrow \varphi - \textit{острый}.$

$\cos\varphi = 0, \Rightarrow \varphi - \textit{прямой}.$

$\cos\varphi < 0, \Rightarrow \varphi - \textit{тупой}.$

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

а) $\vec{m}\{1;\ 2\}$, $\vec{n}\{-2;\ 4\}$; б) $\vec{m}\{0;\ 0{,}5\}$, $\vec{n}\{3;\ -2\}$.

Решение.

а) $\vec{m}\cdot\vec{n} = 1\cdot(-2) + 2\cdot 4 = -2 + 6 = 4$

б) решите самостоятельно

Вычислите косинус угла между векторами $\vec{p}\{3; 4\}$ и $\vec{q}\{15; 8\}$.

Даны векторы $\vec{a}\{2; -3\}$ и $\vec{b}\{x; -4\}$.
При каком значении x эти векторы перпендикулярны?