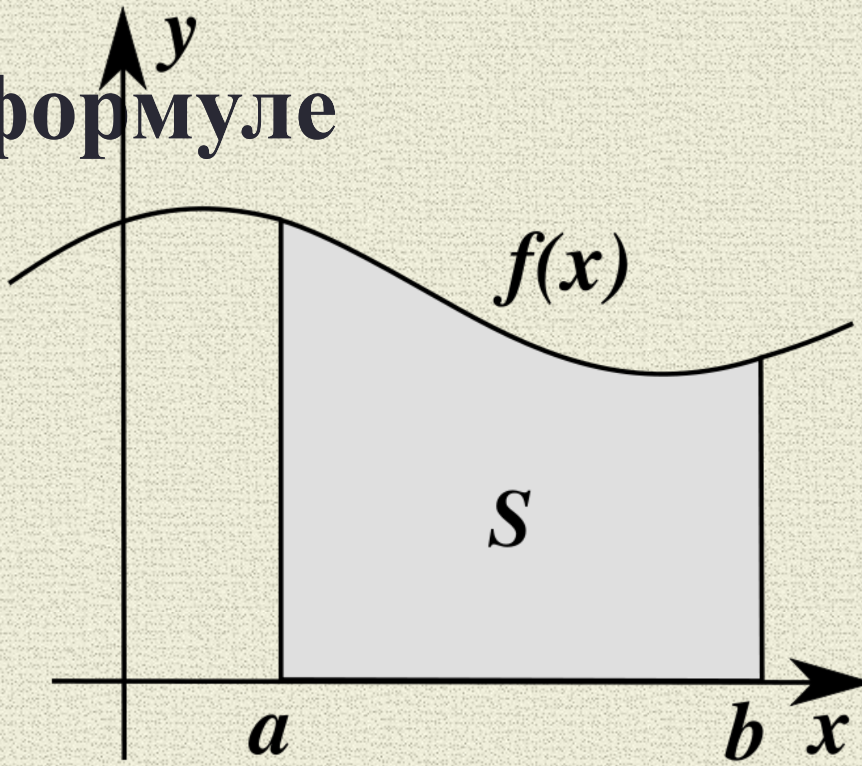
Понятие интеграла

Площадь криволинейной трапеции

можно вычислить по формуле



$$S = F(b) - F(a)$$

где ***F(x)*** – одна из первообразных для функции ***f(x)***

Разность ***F(b) – F(a)*** называют **интегралом** от функции ***f(x)*** на отрезке [*a;b*] и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(читается: «Интеграл от ***a*** до ***b*** эф от икс дэ икс»),

$$\int_a^b f(x)dx$$

$\int$ – знак интеграла

f(x) - подынтегральная функция

dx – элемент интегрирования

a – нижний предел интегрирования

b – верхний предел интегрирования

Т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Данную формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница** в честь создателей дифференциального и интегрального исчисления.

При вычислении интегралов удобно ввести обозначение:

$$F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Тогда формулу Ньютона-Лейбница можно записать в виде:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b}$$

Например
:

$$a)\int_{-2}^{1} x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-2}^{1} = \frac{1^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} =$$

$$\frac{1}{5} + \frac{32}{5} = \frac{33}{5} = 6{,}6$$

Например

:

$$б)\int_{-2}^{4}\left(8+2x-x^2\right)dx=\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$\left(32+16-\frac{64}{3}\right)-\left(-16+4+\frac{8}{3}\right)=$$

$$\left(48-\frac{64}{3}\right)-\left(-12+\frac{8}{3}\right)=60-\frac{72}{3}=$$

$$60-24=36$$

Например:

$$в)\int_1^3 \frac{dx}{x^3} = \int_1^3 x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^3 =$$

$$-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^3 = -\frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} =$$

$$-\frac{1}{18} + \frac{9}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Например

:

$$г)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx = -\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$-\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(0-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$-\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{1}{3}\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Например

:

$$\partial)\int_0^{\pi} 2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}dx = \int_0^{\pi}\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\sin x dx = -\cos x\,\Bigg|_0^{\pi} = -\left(\cos\pi - \cos 0\right) =$$

$$= -\left(-1-1\right) = 2$$

Вычислите интегралы:

$$1)\int_{2}^{5} 3dx$$

$$2)\int_{1}^{3} x^3 dx$$

$$3)\int_{-3}^{2} (2x-3)dx$$

$$4)\int_{-2}^{-1} (5-4x)dx$$

Вычислите интегралы:

$$5)\int_{0}^{2}\left(2x+3x^{2}\right)dx$$

$$6)\int_{-3}^{1}\left(2x^{2}+3x-1\right)dx$$

$$7)\int_{0}^{\pi}\left(x^{2}+2\sin x\right)dx$$

$$8)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^{3}-\sqrt{3}cosx\right)dx$$

Вычислите интегралы:

$$9)\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2}$$

$$11)\int_{2}^{7}\frac{4}{\sqrt{x+2}}dx$$

$$10)\int_{1}^{2}\frac{dx}{(2x+1)^2}$$

$$12)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$$

Вычислите интегралы:

$$13)\int_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$$

$$15)\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$$

$$14)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$16)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$$