ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 5

Вероятности сложных событий

Теорема сложения

Вероятность появления суммы двух несовместных событий

$P(A + B) = P(A) + P(B)$

Вероятность появления суммы нескольких попарно несовместных событий

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Теорема о сумме любых событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

NEW:
Теорема о сумме любых событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство.

$$A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB)$$

По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB).$$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB).$$

$$P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB).$$

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB).$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$(P(A) > 0)$$

Пример

Студент выучил 20 из 25 экзаменационных вопросов. Найти вероятность того, что студент ответит на предложенные ему на экзамене три вопроса.

Решение

- Обозначим события

  A={студент ответит на первый вопрос}

  B={студент ответит на второй вопрос}

  C={студент ответит на третий вопрос}

- P(A)=20/25
- P(B)=19/24
- P(C)=18/23

- Тогда искомая вероятность

$$P(ABC)=20/25\cdot 19/24\cdot 18/23=0,496$$

Теорема умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Пример

Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна **0,4**. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее **0,9** он попал в цель хотя бы один раз?

$$P(A) \geq 0,9; p = 0,4; q = 0,6$$

$$1-0{,}6^n \geq 0{,}9; \;\; 0{,}6^n \leq 0{,}1$$

$$n \lg 0{,}6 \leq \lg 0{,}1$$

Учитывая lg0.6 < 0, имеем

$$n \geq \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}6} = \frac{-1}{-0{,}2218} = 4{,}5.$$

$$n \geq 5$$

Формула полной вероятности

Пусть событие ***A*** может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A),\ P_{B_2}(A), ..., P_{B_n}(A)$$

Теорема.

Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$,

образующих полную группу, равна

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots$$

$$+ P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример

Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна ***0,8,*** а второго – ***0,9***.

Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартна.

Решение

A= {«извлечённая деталь стандартна»}.

Деталь из первого набора (B_1) либо второго (B_2)

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \qquad P(B_2) = \frac{1}{2}$$

$$P_{B_1}(A) = 0{,}8. \qquad P_{B_2}(A) = 0{,}9.$$

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Пример .

В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке – 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую.

Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлечённую из первой коробки, будет стандартной.

Решение

A ={из первой коробки извлечена стандартная лампа}.

Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (событие B_1),

либо нестандартная (событие B_2).

$$P(B_1) = \frac{9}{10}. \qquad P(B_2) = \frac{1}{10}.$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}. \qquad P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}.$$

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9.$$

Вероятность гипотез
Формула Байеса

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий

$$B_1, B_2, \dots, B_n.$$

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots$$

$$+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие А.

Будем искать условные вероятности

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2),\dots,P_A(B_n)$$

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Заменив здесь P(A) , получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

Полученные формулы называют **формулами Байеса** (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764г.).

Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Пример. Детали, изготовленные цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролёров. Вероятность того, что деталь попадёт к первому контролёру, равна ***0,6***, а ко второму – ***0,4***..

Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролёром, равна 0***,94***, а вторым – ***0,98***. Годная деталь при проверке была признана стандартной

Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролёр.

Решение

A={ деталь признана стандартной}. Два предположения:

B1={деталь проверил первый контролёр};

B2={деталь проверил второй контролёр}

$$P(B_1) = 0{,}6 \qquad P_{B_1}(A) = 0{,}94$$

$$P(B_2) = 0{,}4 \qquad P_{B_2}(A) = 0{,}98$$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)}.$$

$$P_A(B_1) = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59.$$

Задача

Есть 50 белых и 50 черных шаров. Их разложили в два ящика: в первый положили 15 белых и 5 черных, во второй положили все остальные. Затем из каждого ящик наудачу вынули по одному шару, а из этих двух – наудачу один. Найти вероятность, что выбран белый шар.

$$A = \{\text{выбран белый шар}\}$$

$$B_0 = \{\text{нет белых шаров}\}$$

$$B_1 = \{\text{1 белый шара}\}$$

$$B_2 = \{\text{2 белых шара}\}$$

$$P(A) = P(B_0)P_{B_0}(A) + P(B_1)P_{B_1}(A) +$$

$$+ P(B_2)P_{B_2}(A)$$

$$P_{B_0}(A)=0,\ P_{B_1}(A)=\frac{1}{2},\ P_{B_2}(A)=1$$

$$P(B_1)=\frac{15}{20}\cdot\frac{45}{80}+\frac{5}{20}\cdot\frac{35}{80}=\frac{3\cdot 9+7}{64}=\frac{34}{64}$$

$$P(B_2)=\frac{15}{20}\cdot\frac{35}{80}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 16}=\frac{21}{64}$$

$$P(A)=0+\frac{1}{2}\cdot\frac{34}{64}+1\cdot\frac{21}{64}=\frac{38}{64}=\frac{19}{32}>\frac{1}{2}$$

Задачи

Задача 1

В первом ящике имеется 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30, из них 24 стандартных, в третьем – 10, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика стандартна.

Решение

- Обозначим A={вынута стандартная деталь}
- B1={стандартная деталь из ящика 1}

  B2={стандартная деталь из ящика 2}

  B3={стандартная деталь из ящика 3}
- Вероятности P(B1)=P(B2)=P(B3)=1/3

- Условные вероятности

$$P_{B_1}(A) = \frac{15}{20}$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{24}{30}$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{6}{10}$$

- По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{20}+\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{30}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}=\frac{42}{60}$$

Задача 2

- Имеется 5 винтовок: 3 с оптическим прицелом, 2 без оптического прицела. Вероятность поразить мишень из винтовки с классическим прицелом равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если винтовка выбирается наудачу.

Решение

- A={цель поражена}
- B1={взята винтовка с оптич. прицелом}

  B2={взята винтовка без оптического прицела}
- Найдем вероятности
- P(B1)=3/5

  P(B2)=2/5

- Условные вероятности

$$P_{B_1}(A) = 0,95$$

$$P_{B_2}(A) = 0,7$$

Тогда искомая вероятность

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot 0,95 + \frac{2}{5} \cdot 0,7 = 0,85$$

Задача 3

- В продажу поступили телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров с дефектов, второго – 5% и третьего – 3%. Какова вероятность купить неисправный телевизор, если в магазин поступило 25% телевизоров с первого завода, 55% со второго, 20% с третьего?

Решение

- A={приобретенный телевизор с дефектом}
- B1={телевизор выпущен первым заводом}

  B2={телевизор выпущен вторым заводом}

  B3={телевизор выпущен третьим заводом}

- Вероятности $P(B1)=0,25$; $P(B2)=0,55$; $P(B3)=0,20$
- Условные вероятности

$P(A|B1)=0,1$

$P(A|B2)=0,05$

$P(A|B3)=0,03$

- По формуле полной вероятности

$P(A)=0,25\cdot 0,1+0,55\cdot 0,05+0,20\cdot 0,03=$

$=0,0585$

Задача 4

В группе студентов 12 юношей и 8 девушек. Зачет по ТВ и МС сдает, как правило 70% юношей и 80% девушек. Найти вероятность того, что первый вышедший из аудитории сдал зачет по ТВ и МС.

Решение

- A={сдал зачет по ТВ И МС}
- B1={первый вышел юноша}

  B2={первой вышла девушка}
- Вероятности P(B1)=12/20; P(B2)=8/20

  (всего человек 20, юношей 12, девушек 8)

- Условные вероятности

  $P(A|B1)=0,70$ – вероятность сдать зачет, при условии, что вышел юноша

  $P(A|B2)=0,80$ – вероятность сдать зачет, при условии, что вышла девушка
- По формуле полной вероятности

  $$P(A)=12/20 \cdot 0,7+8/20 \cdot 0,8=0,74$$

Задача 5

В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квал. норму для лыжника 0,9; для велосипедиста 0,8; для бегуна 0,75. Найти вероятность, что спортсмен, выбранный наудачу выполнит норму.

Решение

- A={спортсмен выполнит норму}
- B1={выбран лыжник}

  B2={выбран велосипедист}

  B3={выбран бегун}
- Вероятности

  $P(B1)=20/30$; $P(B2)=6/30$; $P(B3)=4/30$

- Условные вероятности

  $P(A|B1)=0,9$; $P(A|B2)=0,8$; $P(A|B3)=0,75$

- По формуле полной вероятности

  $P(A)=20/30\cdot 0,9+6/30\cdot 0,8+4/30\cdot 0,75$

Задача 6

В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Телевизоры от первого поставщика не потребуют ремонта в гарантийный срок с вероятностью 98%; от второго – 88%; от третьего – 92%. Найти вероятность того, что наудачу купленный телевизор не потребует ремонта в гарантийный срок.

Решение

- A={телевизор не потребует ремонта в гарантийный срок}
- B1={телевизор от поставщика 1}

  B2={телевизор от поставщика 2}

  B3={телевизор от поставщика 3}
- P(B1)=0,1; P(B2)=0,4; P(B3)=0,5

- Условные вероятности

$P(A|B1)=0,98$; $P(A|B2)=0,88$; $P(A|B3)=0,92$

- По формуле полной вероятности

$$P(A)=0,1\cdot 0,98+0,4\cdot 0,88+0,5\cdot 0,92$$

Задача 7

Вероятности сбоя для различных элементов в компьютере относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в этих устройствах равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

Решение

- A={сбой будет обнаружен}
- B1={сбой в устройстве 1}

  B2={сбой в устройстве 2}

  B3={сбой в устройстве 3}
- Вероятности

  P(B1)=0,3; P(B2)=0,2; P(B3)=0,5

- Условные вероятности

  $P(A|B1)=0,8$; $P(A|B2)=0,9$; $P(A|B3)=0,9$

- По формуле полной вероятности

$P(A)=0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,9+0,5\cdot 0,9=0,87$

Задача 8

У рыбака есть три любимых места рыбалка. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что при однократном забросе удочки поймается рыбка в первом месте равна 1/3; во втором – ½; в третьем – ¼. Он забросил удочку и вытащил рыбку. Какова вероятность, что он рыбачил в первом месте?

Решение

- A={рыбак вытащил рыбку}
- B1={рыбачил в первом месте}

  B2={рыбачил во втором месте}

  B3={рыбачил в третьем месте}
- Вероятности

  P(B1)=P(B2)=P(B3)=1/3

- Условные вероятности
  P(A|B1)=1/3; P(A|B2)=1/2; P(A|B3)=1/4

- По формуле Байеса

$$P(A)=\frac{1/3\cdot 1/3}{1/3\cdot 1/3+1/3\cdot 1/2+1/3\cdot 1/4}=4/13$$

Задача 9

Путешественник может купить билет в одной из трех касс ж/д вокзала. Вероятность, что он направится в первую кассу равна ½; во вторую – 1/3; в третью – 1/6.

Вероятности того, что билетов уже нет в кассах: в первой – 4/5; во второй – 5/6; в третьей – 7/8. Путешественник обратился в одну из касс и купил билет. Какова вероятность, что он купил билет в первой кассе

Решение

- A={купил билет}
- B1={обратился в кассу 1}

  B2={обратился в кассу 2}

  B3={обратился в кассу 3}
- Вероятности

  P(B1)=1/2; P(B2)=1/3; P(B3)=1/6

- Так как в условии задачи даны вероятности, что билетов в кассах уже нет, а путешественник купил билет, значит в кассе билеты были.

- Условные вероятности

  P(A|B1)=1-4/5=1/5

  P(A|B2)=1-5/6=1/6

  P(A|B3)=1-7/8=1/8.

- Искомая вероятность

$$P(A)=\frac{1/2\cdot 1/5}{1/2\cdot 1/5+1/3\cdot 1/6+1/6\cdot 1/8}=0,48$$

Задача 10

Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по 1-й дороге, вероятность выхода из леса в течение часа составляет 0,6; по 2-й – 0,3; по 3-й – 0,2; по 4-й – 0,1; по 5-й – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

Решение

- A={турист вышел из леса}
- B1={выбрал дорогу 1}

  B2={выбрал дорогу 2}

  B3={выбрал дорогу 3}

  B4={выбрал дорогу 4}

  B5={выбрал дорогу 5}

- Дорог всего 5. Вероятности пойти по любой из пяти дорог одинаковы, то есть $P(B1)=P(B2)=P(B3)=P(B4)=P(B5)=1/5$
- Условные вероятности даны $P(A|B1)=0,6$; $P(A|B2)=0,3$; $P(A|B3)=0,2$ $P(A|B4)=0,1$; $P(A|B5)=0,1$

Имеем

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A\mid B_1) + P(B_2)\cdot P(A\mid B_2) +$$
$$+P(B_3)\cdot P(A\mid B_3) + P(B_4)\cdot P(A\mid B_4) + P(B_5)\cdot P(A\mid B_5)$$

$$P(A) = \frac{1}{5}\cdot 0,6 + \frac{1}{5}\cdot 0,3 + \frac{1}{5}\cdot 0,2 + \frac{1}{5}\cdot 0,1 + \frac{1}{5}\cdot 0,1 = 0,26$$

$$P(B_1\mid A) = P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P(A\mid B_1)}{P(A)}$$

$$P(B_1\mid A) = \frac{1/5\cdot 0,6}{0,26} = \frac{6}{13}$$

Вопросы к лекции 5

- Теорема сложения для любых событий
- Условная вероятность
- Формула полной вероятности
- Формула Байеса

Конец лекции 5