

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 5

Вероятности сложных событий

Теорема сложения

Вероятность появления
суммы двух несовместных
событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Вероятность появления суммы
нескольких попарно несовместных
событий

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Сумма вероятностей
противоположных событий равна
единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема о сумме любых событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

NEW:

**Теорема о сумме любых
событий.**

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство.

$$A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$$

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$$

По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB).$$

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB).$$

$$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB).$$

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB).$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$(P(A) > 0)$$

Пример

Студент выучил 20 из 25 экзаменационных вопросов. Найти вероятность того, что студент ответит на предложенные ему на экзамене три вопроса.

Решение

- Обозначим события

$A = \{\text{студент ответит на первый вопрос}\}$

$B = \{\text{студент ответит на второй вопрос}\}$

$C = \{\text{студент ответит на третий вопрос}\}$

- $P(A) = 20/25$
- $P(B) = 19/24$
- $P(C) = 18/23$

- Тогда искомая вероятность

$$P(ABC) = 20/25 \cdot 19/24 \cdot 18/23 = 0,496$$

Теорема умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Пример

Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна **0,4**. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее **0,9** он попал в цель хотя бы один раз?

$$P(A) \geq 0,9; p = 0,4; q = 0,6$$

$$1 - 0,6^n \geq 0,9; \quad 0,6^n \leq 0,1$$

$$n \lg 0,6 \leq \lg 0,1$$

Учитывая $\lg 0,6 < 0$, имеем

$$n \geq \frac{\lg 0,1}{\lg 0,6} = \frac{-1}{-0,2218} = 4,5.$$

$$n \geq 5$$

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n , которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$$

Теорема.

Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, \dots, B_n ,

образующих полную группу, равна

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots \\ + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример

Имеется два набора деталей.

Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна $0,8$, а второго – $0,9$.

Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартна.

Решение

$A = \{ \text{«извлечённая деталь стандартна»} \}$.

Деталь из первого набора (B_1) либо второго (B_2).

$$P(B_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(B_2) = \frac{1}{2}$$

$$P_{B_1}(A) = 0,8.$$

$$P_{B_2}(A) = 0,9.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = \\ &= 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85. \end{aligned}$$

Пример .

В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке – 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую.

Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлечённую из первой коробки, будет стандартной.

Решение

$A = \{\text{из первой коробки извлечена стандартная лампа}\}.$

Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (событие B_1), либо нестандартная (событие B_2).

$$P(B_1) = \frac{9}{10}.$$

$$P(B_2) = \frac{1}{10}.$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}.$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9. \end{aligned}$$

Вероятность гипотез Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при
условии появления одного из
несовместных событий

$$B_1, B_2, \dots, B_n.$$

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots \\ + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим, что произведено
испытание, в результате которого
появилось событие А.

Будем искать условные вероятности

$$P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$$

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Заменив здесь $P(A)$, получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}.$$

Полученные формулы называют **формулами Байеса** (по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764г.).

Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Пример. Детали, изготовленные цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролёров. Вероятность того, что деталь попадёт к первому контролёру, равна **0,6**, а ко второму – **0,4**..

Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролёром, равна $0,94$, а вторым – $0,98$. Годная деталь при проверке была признана стандартной

Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролёр.

Решение

$A = \{ \text{деталь признана стандартной} \}$. Два предположения:

$B_1 = \{ \text{деталь проверил первый контролёр} \}$;

$B_2 = \{ \text{деталь проверил второй контролёр} \}$

$$P(B_1) = 0,6$$

$$P_{B_1}(A) = 0,94$$

$$P(B_2) = 0,4$$

$$P_{B_2}(A) = 0,98$$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)}.$$

$$P_A(B_1) = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59.$$

Задача

Есть 50 белых и 50 черных шаров. Их разложили в два ящика: в первый положили 15 белых и 5 черных, во второй положили все остальные. Затем из каждого ящик наудачу вынули по одному шару, а из этих двух – наудачу один. Найти вероятность, что выбран белый шар.

$A = \{ \text{выбран белый шар} \}$

$B_0 = \{ \text{нет белых шаров} \}$

$B_1 = \{ \text{один белый шар} \}$

$B_2 = \{ \text{два белых шара} \}$

$$P(A) = P(B_0)P_{B_0}(A) + P(B_1)P_{B_1}(A) + \\ + P(B_2)P_{B_2}(A)$$

$$P_{B_0}(A) = 0, P_{B_1}(A) = \frac{1}{2}, P_{B_2}(A) = 1$$

$$P(B_1) = \frac{15}{20} \cdot \frac{45}{80} + \frac{5}{20} \cdot \frac{35}{80} = \frac{3 \cdot 9 + 7}{64} = \frac{34}{64}$$

$$P(B_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{35}{80} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 16} = \frac{21}{64}$$

$$P(A) = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{64} + 1 \cdot \frac{21}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32} > \frac{1}{2}$$

Задачи

Задача 1

В первом ящике имеется 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30, из них 24 стандартных, в третьем – 10, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика стандартна.

Решение

- Обозначим $A = \{\text{вынута стандартная деталь}\}$
- $V_1 = \{\text{стандартная деталь из ящика 1}\}$
 $V_2 = \{\text{стандартная деталь из ящика 2}\}$
 $V_3 = \{\text{стандартная деталь из ящика 3}\}$
- Вероятности $P(V_1) = P(V_2) = P(V_3) = 1/3$

- Условные вероятности

$$P_{B_1}(A) = \frac{15}{20}$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{24}{30}$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{6}{10}$$

- По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{24}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{60}$$

Задача 2

- Имеется 5 винтовок: 3 с оптическим прицелом, 2 без оптического прицела. Вероятность поразить мишень из винтовки с классическим прицелом равна 0,95; для винтовки без оптического прицела – 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если винтовка выбирается наудачу.

Решение

- $A = \{\text{цель поражена}\}$
- $B_1 = \{\text{взята винтовка с оптич. прицелом}\}$
 $B_2 = \{\text{взята винтовка без оптического прицела}\}$
- Найдем вероятности
- $P(B_1) = 3/5$
 $P(B_2) = 2/5$

- Условные вероятности

$$P_{B_1}(A) = 0,95$$

$$P_{B_2}(A) = 0,7$$

Тогда искомая вероятность

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot 0,95 + \frac{2}{5} \cdot 0,7 = 0,85$$

Задача 3

- В продажу поступили телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров с дефектов, второго – 5% и третьего – 3%. Какова вероятность купить неисправный телевизор, если в магазин поступило 25% телевизоров с первого завода, 55% со второго, 20% с третьего?

Решение

- $A = \{\text{приобретенный телевизор с дефектом}\}$
- $V1 = \{\text{телевизор выпущен первым заводом}\}$
 $V2 = \{\text{телевизор выпущен вторым заводом}\}$
 $V3 = \{\text{телевизор выпущен третьим заводом}\}$

- Вероятности $P(B1)=0,25$; $P(B2)=0,55$;
 $P(B3)=0,20$
- Условные вероятности
 $P(A|B1)=0,1$
 $P(A|B2)=0,05$
 $P(A|B3)=0,03$
- По формуле полной вероятности
 $P(A)=0,25 \cdot 0,1 + 0,55 \cdot 0,05 + 0,20 \cdot 0,03 =$
 $= 0,0585$

Задача 4

В группе студентов 12 юношей и 8 девушек. Зачет по ТВ и МС сдает, как правило 70% юношей и 80% девушек. Найти вероятность того, что первый вышедший из аудитории сдал зачет по ТВ и МС.

Решение

- $A = \{\text{сдал зачет по ТВ и МС}\}$
- $B_1 = \{\text{первый вышел юноша}\}$
 $B_2 = \{\text{первой вышла девушка}\}$
- Вероятности $P(B_1) = 12/20$; $P(B_2) = 8/20$
(всего человек 20, юношей 12, девушек 8)

- Условные вероятности

$P(A|B_1)=0,70$ – вероятность сдать зачет, при условии, что вышел юноша

$P(A|B_2)=0,80$ – вероятность сдать зачет, при условии, что вышла девушка

- По формуле полной вероятности

$$P(A)=12/20 \cdot 0,7 + 8/20 \cdot 0,8 = 0,74$$

Задача 5

В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квал. норму для лыжника 0,9; для велосипедиста 0,8; для бегуна 0,75. Найти вероятность, что спортсмен, выбранный наудачу выполнит норму.

Решение

- $A = \{\text{спортсмен выполнит норму}\}$

- $B_1 = \{\text{выбран лыжник}\}$

- $B_2 = \{\text{выбран велосипедист}\}$

- $B_3 = \{\text{выбран бегун}\}$

- Вероятности

- $P(B_1) = 20/30; P(B_2) = 6/30; P(B_3) = 4/30$

- Условные вероятности

$$P(A|B_1)=0,9; P(A|B_2)=0,8; P(A|B_3)=0,75$$

- По формуле полной вероятности

$$P(A)=20/30 \cdot 0,9 + 6/30 \cdot 0,8 + 4/30 \cdot 0,75$$

Задача 6

В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Телевизоры от первого поставщика не потребуют ремонта в гарантийный срок с вероятностью 98%; от второго – 88%; от третьего – 92%. Найти вероятность того, что наудачу купленный телевизор не потребует ремонта в гарантийный срок.

Решение

- $A = \{\text{телевизор не потребует ремонта в гарантийный срок}\}$
- $V1 = \{\text{телевизор от поставщика 1}\}$
 $V2 = \{\text{телевизор от поставщика 2}\}$
 $V3 = \{\text{телевизор от поставщика 3}\}$
- $P(V1) = 0,1; P(V2) = 0,4; P(V3) = 0,5$

- Условные вероятности

$$P(A|B1)=0,98; \quad P(A|B2)=0,88;$$

$$P(A|B3)=0,92$$

- По формуле полной вероятности

$$P(A)=0,1 \cdot 0,98 + 0,4 \cdot 0,88 + 0,5 \cdot 0,92$$

Задача 7

Вероятности сбоя для различных элементов в компьютере относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в этих устройствах равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

Решение

- $A = \{\text{сбой будет обнаружен}\}$
- $V1 = \{\text{сбой в устройстве 1}\}$
 $V2 = \{\text{сбой в устройстве 2}\}$
 $V3 = \{\text{сбой в устройстве 3}\}$
- Вероятности
 $P(V1) = 0,3; P(V2) = 0,2; P(V3) = 0,5$

- Условные вероятности

$$P(A|B1)=0,8; P(A|B2)=0,9; P(A|B3)=0,9$$

- По формуле полной вероятности

$$P(A)=0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,87$$

Задача 8

У рыбака есть три любимых места рыбалка. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что при однократном забросе удочки поймается рыбка в первом месте равна $1/3$; во втором – $1/2$; в третьем – $1/4$. Он забросил удочку и вытащил рыбку. Какова вероятность, что он рыбачил в первом месте?

Решение

- $A = \{\text{рыбак вытащил рыбку}\}$
- $V1 = \{\text{рыбачил в первом месте}\}$
 $V2 = \{\text{рыбачил во втором месте}\}$
 $V3 = \{\text{рыбачил в третьем месте}\}$
- Вероятности
 $P(V1) = P(V2) = P(V3) = 1/3$

- Условные вероятности

$$P(A|B_1)=1/3; P(A|B_2)=1/2; P(A|B_3)=1/4$$

- По формуле Байеса

$$P(A) = \frac{1/3 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/4} = 4/13$$

Задача 9

Путешественник может купить билет в одной из трех касс ж/д вокзала. Вероятность, что он направится в первую кассу равна $\frac{1}{2}$; во вторую – $\frac{1}{3}$; в третью – $\frac{1}{6}$.

Вероятности того, что билетов уже нет в кассах: в первой – $\frac{4}{5}$; во второй – $\frac{5}{6}$; в третьей – $\frac{7}{8}$. Путешественник обратился в одну из касс и купил билет. Какова вероятность, что он купил билет в первой кассе

Решение

- $A = \{\text{купил билет}\}$
- $B_1 = \{\text{обратился в кассу 1}\}$
 $B_2 = \{\text{обратился в кассу 2}\}$
 $B_3 = \{\text{обратился в кассу 3}\}$
- Вероятности
 $P(B_1) = 1/2; P(B_2) = 1/3; P(B_3) = 1/6$

- Так как в условии задачи даны вероятности, что билетов в кассах уже нет, а путешественник купил билет, значит в кассе билеты были.
- Условные вероятности
$$P(A|B_1)=1-4/5=1/5$$
$$P(A|B_2)=1-5/6=1/6$$
$$P(A|B_3)=1-7/8=1/8.$$

- Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{1/2 \cdot 1/5}{1/2 \cdot 1/5 + 1/3 \cdot 1/6 + 1/6 \cdot 1/8} = 0,48$$

Задача 10

Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по 1-й дороге, вероятность выхода из леса в течение часа составляет 0,6; по 2-й – 0,3; по 3-й – 0,2; по 4-й – 0,1; по 5-й – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

Решение

- $A = \{\text{турист вышел из леса}\}$
- $V1 = \{\text{выбрал дорогу 1}\}$
- $V2 = \{\text{выбрал дорогу 2}\}$
- $V3 = \{\text{выбрал дорогу 3}\}$
- $V4 = \{\text{выбрал дорогу 4}\}$
- $V5 = \{\text{выбрал дорогу 5}\}$

- Дорог всего 5. Вероятности пойти по любой из пяти дорог одинаковы, то есть $P(B1)=P(B2)=P(B3)=P(B4)=P(B5)=1/5$
- Условные вероятности даны
 $P(A|B1)=0,6$; $P(A|B2)=0,3$; $P(A|B3)=0,2$
 $P(A|B4)=0,1$; $P(A|B5)=0,1$

Имеем

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \\ + P(B_3) \cdot P(A|B_3) + P(B_4) \cdot P(A|B_4) + P(B_5) \cdot P(A|B_5)$$

$$P(A) = \frac{1}{5} \cdot 0,6 + \frac{1}{5} \cdot 0,3 + \frac{1}{5} \cdot 0,2 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 + \frac{1}{5} \cdot 0,1 = 0,26$$

$$P(B_1|A) = P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(A)}$$

$$P(B_1|A) = \frac{1/5 \cdot 0,6}{0,26} = \frac{6}{13}$$

Вопросы к лекции 5

- Теорема сложения для любых событий
- Условная вероятность
- Формула полной вероятности
- Формула Байеса

Конец лекции 5