

# Лекция 11

## «Исследование функций с помощью производных»

1. Правила Лопиталя.
2. Возрастание и убывание функций.
3. Максимум и минимум функций.

# 1. Правила Лопиталя.

## Теорема 1:

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ :

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  - непрерывные и дифференцируемые в окрестности точки  $x_0$  и обращаются в нуль в этой точке,  $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ . Пусть  $\varphi'(x) \neq 0$  в окрестности точки  $x_0$ . Если

существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$

Пример: Вычислить, используя правило Лопиталя, предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x) - 2 \sin x + x^2}{x^3}$$

# 1. Правила Лопиталя.

## Теорема 2:

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ :

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  - непрерывные и дифференцируемые в окрестности точки  $x_0$  (кроме, может быть, самой точки  $x_0$ ). Пусть в этой окрестности  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ ,  $\varphi'(x) \neq 0$ . Если существует

предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ .

Пример: Вычислить, используя правило Лопиталя:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$ .

# 1. Правила Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей различных видов.

1. Пусть  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[ \frac{0}{0} \right].$$

Пример:

Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \cdot (2 - x)$

# 1. Правила Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей различных видов.

2. Пусть  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x)) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}} \right) = \left[ \frac{0}{0} \right]$$

Пример:

Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

# 1. Правила Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей различных видов.

3. Пусть или  $f(x) \rightarrow 1$  и  $\varphi(x) \rightarrow \infty$ ,  
или  $f(x) \rightarrow \infty$  и  $\varphi(x) \rightarrow 0$ ,  
или  $f(x) \rightarrow 0$  и  $\varphi(x) \rightarrow 0$ , при  $x \rightarrow x_0$ .

Тогда для нахождения  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$  логарифмируют выражение

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}.$$

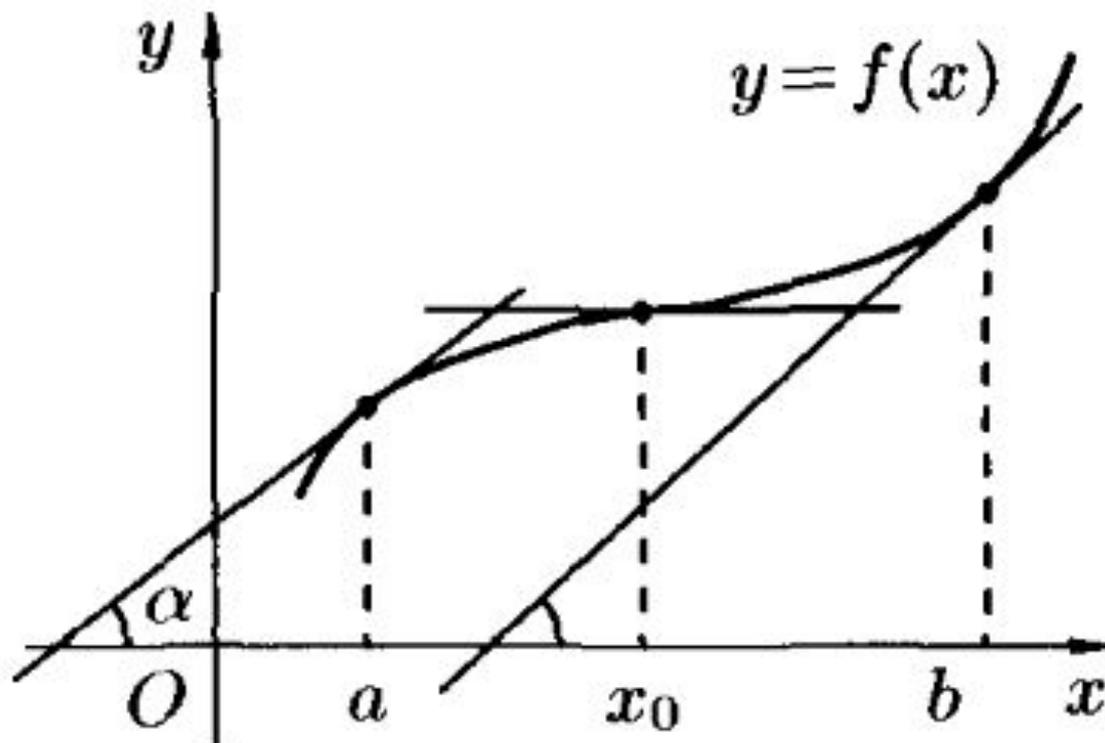
Пример:

Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

## 2. Возрастание и убывание функций.

Теорема 3 (необходимое условие):

Если дифференцируемая функция  $y = f(x)$  на  $(a, b)$  возрастает (убывает), что  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ).



## 2. Возрастание и убывание функций.

Теорема 4 (достаточное условие):

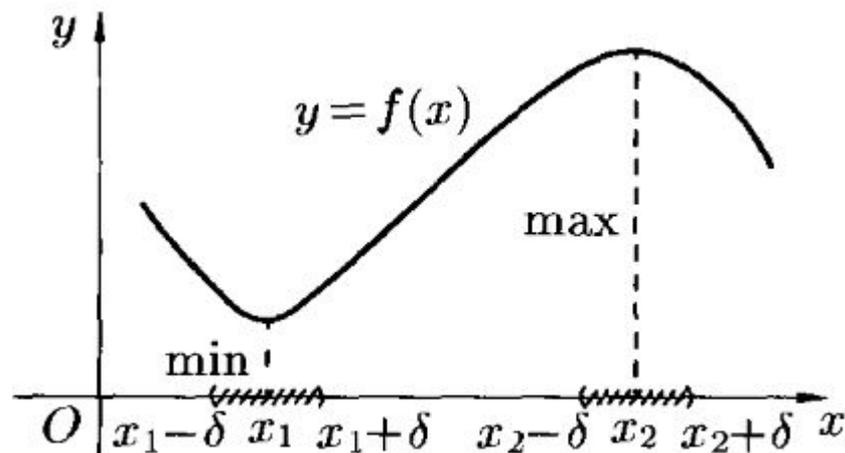
Если  $y = f(x)$  - дифференцируемая функция на  $(a, b)$  и  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ )  $\forall x \in (a, b)$ , то функция возрастает (убывает) на  $(a, b)$ .

Пример: Исследовать функцию  $y = x^3 - 3x - 4$ .

# 3. Максимум и минимум функций.

Опр.1: Точка  $x_0$  называется точкой максимума функции  $y = f(x)$ , если существует такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что  $\forall x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ .

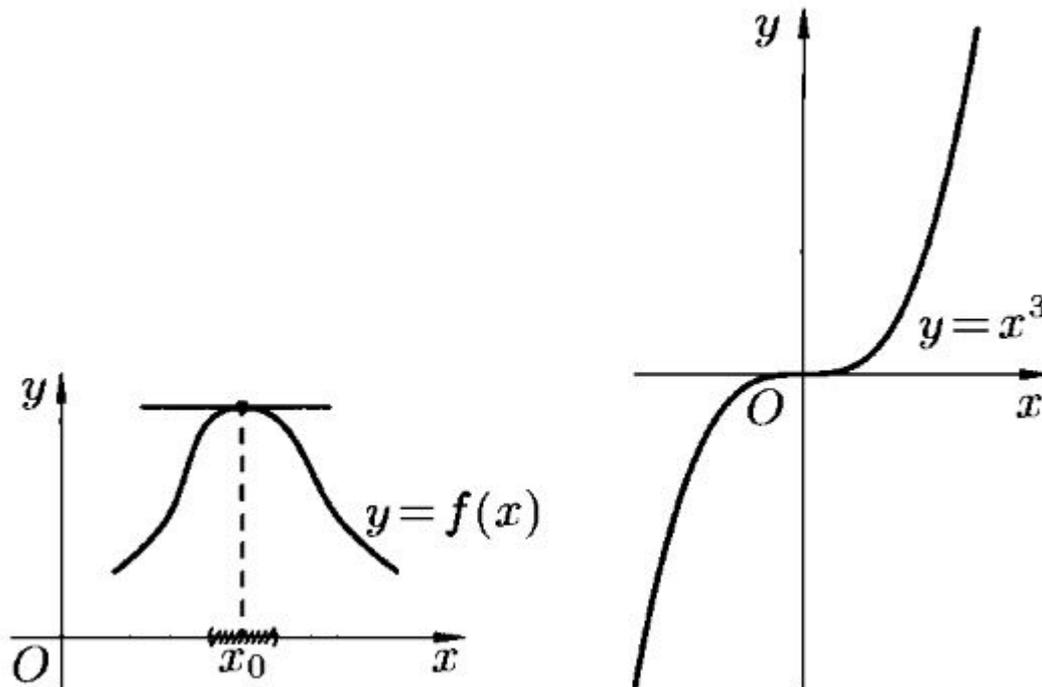
Опр.2: Точка  $x_0$  называется точкой минимума функции  $y = f(x)$ , если  $\exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$



# 3. Максимум и минимум функций.

Теорема 5 (необходимое условие экстремума):

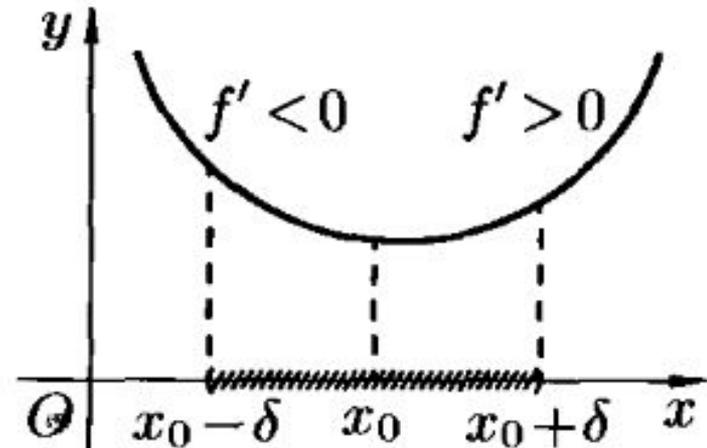
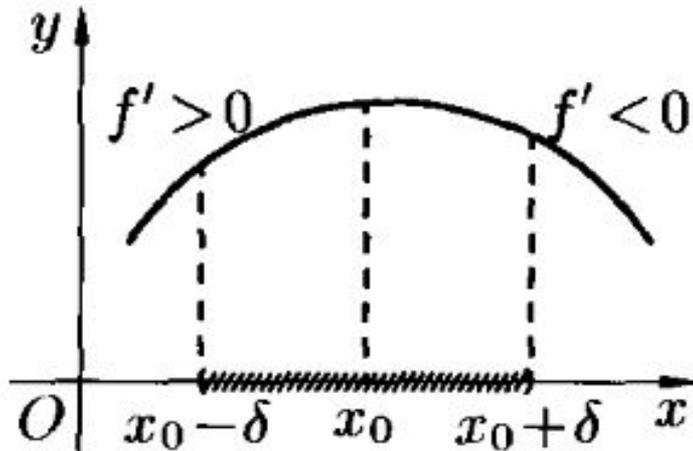
Если дифференцируемая функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то ее производная в этой точке равна нулю.



# 3. Максимум и минимум функций.

Теорема 6 (достаточное условие экстремума):

Если непрерывная функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой  $\delta$ -окрестности критической точки  $x_0$  и при переходе через нее (слева направо) производная  $f'(x)$  меняет знак с минуса на плюс, то  $x_0$  - точка минимума; с плюса на минус - точка максимума.



# 3. Максимум и минимум функций.

Правило исследования функции на экстремум:

1. Найти критические точки функции  $y = f(x)$ .
2. Выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения.
3. Исследовать знак производной  $f'(x)$  слева и справа от каждой из выбранных точек.
4. Найти точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Пример: Найти экстремумы функции  $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$