Лекция 11

«Исследование функций с помощью производных»

1. Правила Лопиталя.
2. Возрастание и убывание функций.
3. Максимум и минимум функций.

1. Правила Лопиталя.

Теорема 1:

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ - непрерывные и дифференцируемые в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке $f(x_0)=\varphi(x_0)=0.$ Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$

Пример: Вычислить, используя правило Лопиталя, предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-2\sin x+x^2}{x^3}$$

1. Правила Лопиталя.

Теорема 2:

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ - непрерывные и дифференцируемые в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой точки x_0). Пусть в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x_0)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Пример: Вычислить, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}$.

1. Правила Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей различных видов.

1. Пусть $f(x) \to 0,\ \varphi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Пример:

Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} tg\frac{\pi x}{4} \cdot (2 - x)$

1. Правила Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей различных видов.

2. Пусть $f(x) \to \infty,\ \varphi(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - \varphi(x)) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right) =$$

.

$$= \lim_{x \to x_0}\left(\frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Пример:

Вычислить $\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right)$

1. Правила Лопиталя.

Раскрытие неопределенностей различных видов.

3. Пусть или $f(x) \to 1$ и $\varphi(x) \to \infty$,

   или $f(x) \to \infty$ и $\varphi(x) \to 0$,

   или $f(x) \to 0$ и $\varphi(x) \to 0$, при $x \to x_0$.

   Тогда для нахождения $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ логарифмируют выражение

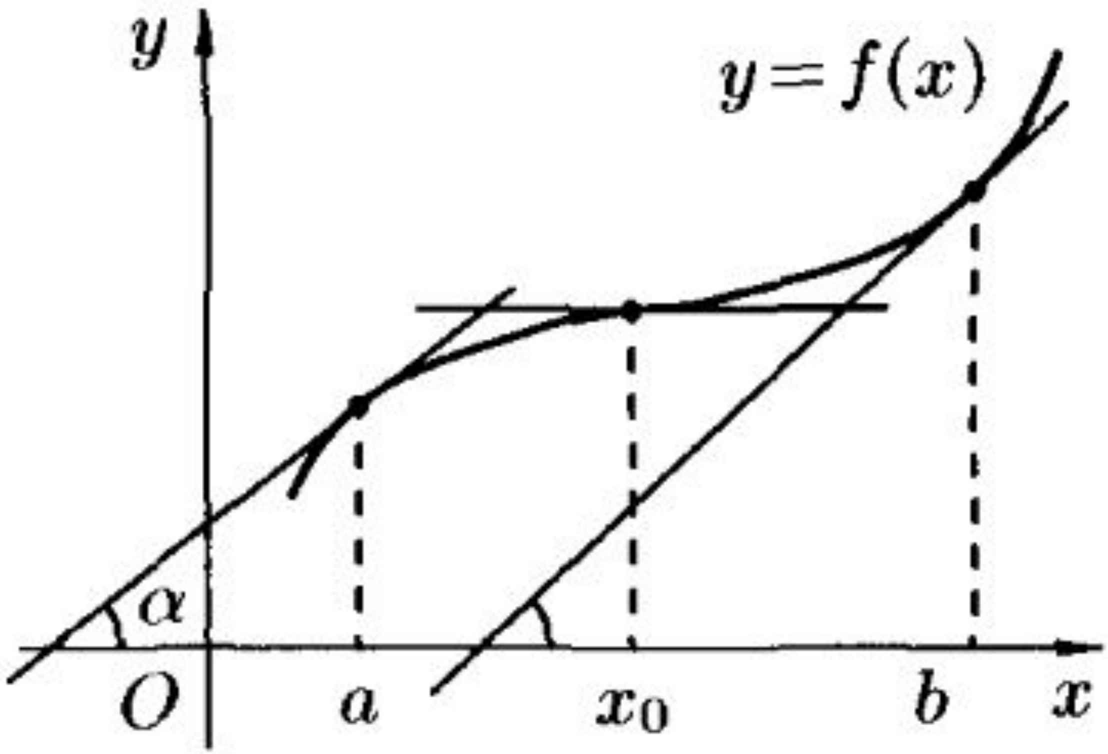
   $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$.

Пример:

Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

2. Возрастание и убывание функций.

Теорема 3 (необходимое условие):
Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на (a, b) возрастает (убывает), что $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$.



2. Возрастание и убывание функций.

Теорема 4 (достаточное условие):

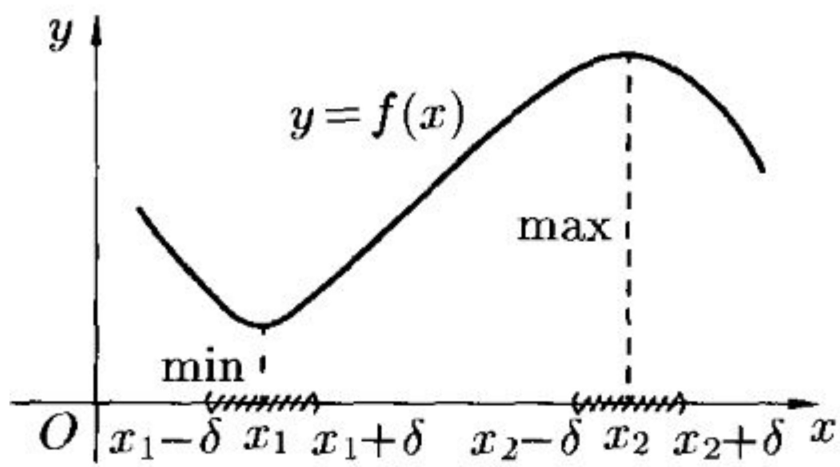
Если $y = f(x)$ - дифференцируемая функция на (a,b) и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ $\forall x \in (a,b)$, то функция возрастает (убывает) на (a,b).

Пример: Исследовать функцию $y = x^3 - 3x - 4$.

3. Максимум и минимум функций.

Опр.1: Точка x_0 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что $\forall x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

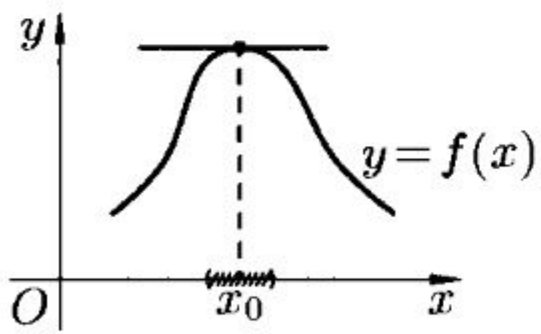
Опр.2: Точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если $\exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

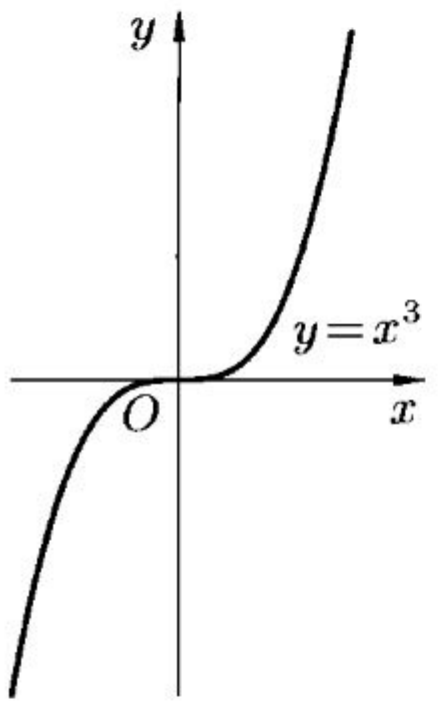


3. Максимум и минимум функций.

Теорема 5 (необходимое условие экстремума):

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю.

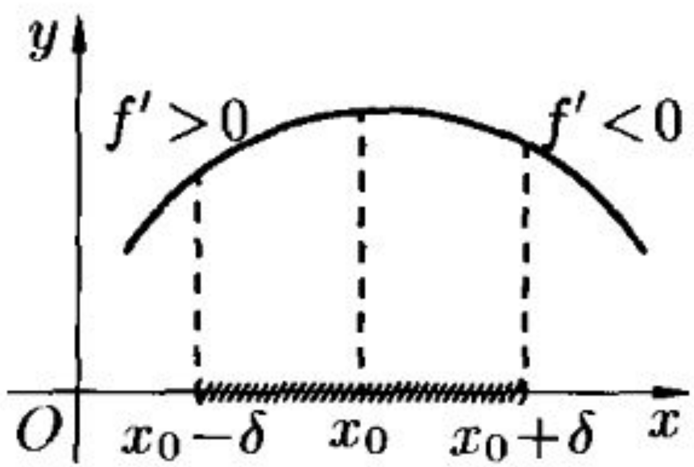


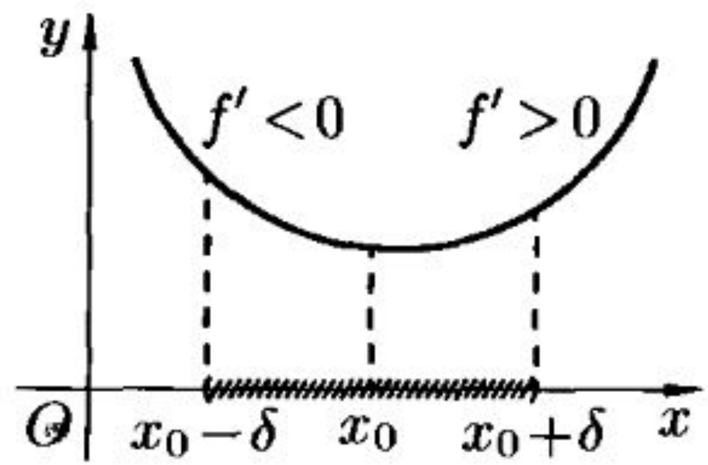


3. Максимум и минимум функций.

Теорема 6 (достаточное условие экстремума):

Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума; с плюса на минус – точка максимума.





3. Максимум и минимум функций.

Правило исследования функции на экстремум:

1. Найти критические точки функции $y = f(x)$.
2. Выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой из выбранных точек.
4. Найти точки экстремума и вычислить значения функции в них.

Пример: Найти экстремумы функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$