

Дальневосточный государственный университет  
путей сообщения

Кафедра «Вычислительная техника и компьютерная  
графика»

# Конструктивная геометрия

## Метрические задачи

Лекция 5



# План лекции

1

Метрические задачи.  
Основные положения

2

Четыре основные задачи

3

Способ замены плоскостей  
проекций



# Метрические задачи. Основные положения

**Метрические задачи - это задачи связанные с измерением, а именно, на определение натуральной величины размеров заданных фигур: расстояний (длин), углов, контуров плоских геометрических форм**



# Метрические задачи. Основные положения

**Метрические задачи решаются не только в теоретических исследованиях, но и в прикладных вопросах. Наряду с аналитическим решением, конструктивные способы позволяют наглядно представлять полученный результат, анализировать исходные данные с ИСКОМЫМИ**



Метрические задачи.

Основные положения

**Естественно полагать, что в общем случае заданные проекции не представляют натуральную величину. В этом мы убедились при решении задачи №2, применяя при ее решении метод прямоугольного треугольника (определение натуральной величины отрезка АВ и углов его наклона к плоскостям проекций)**



# Метрические задачи.

**Основные положения и примеры**  
**Однако, при изучении свойств ортогонального**  
**проецирования отметили, если прямая**  
**параллельна плоскости проекций (прямая**  
**уровня), то её отрезок на эту плоскость**  
**проекций изображается в натуральную**  
**величину.**

**Аналогичное свойство имеет плоская фигура,**  
**расположенная в плоскости уровня.**

**Таким образом, результат решения задачи**  
**имеет место, когда прямая и плоскость**  
**занимают частное положение относительно**  
**плоскостей проекций**

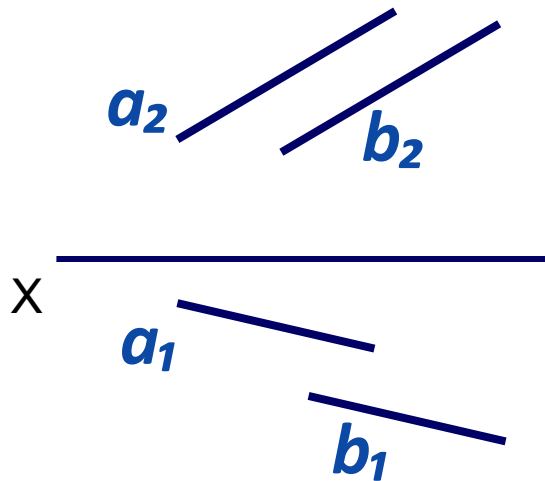


# Метрические задачи.

## Основные положения и примеры

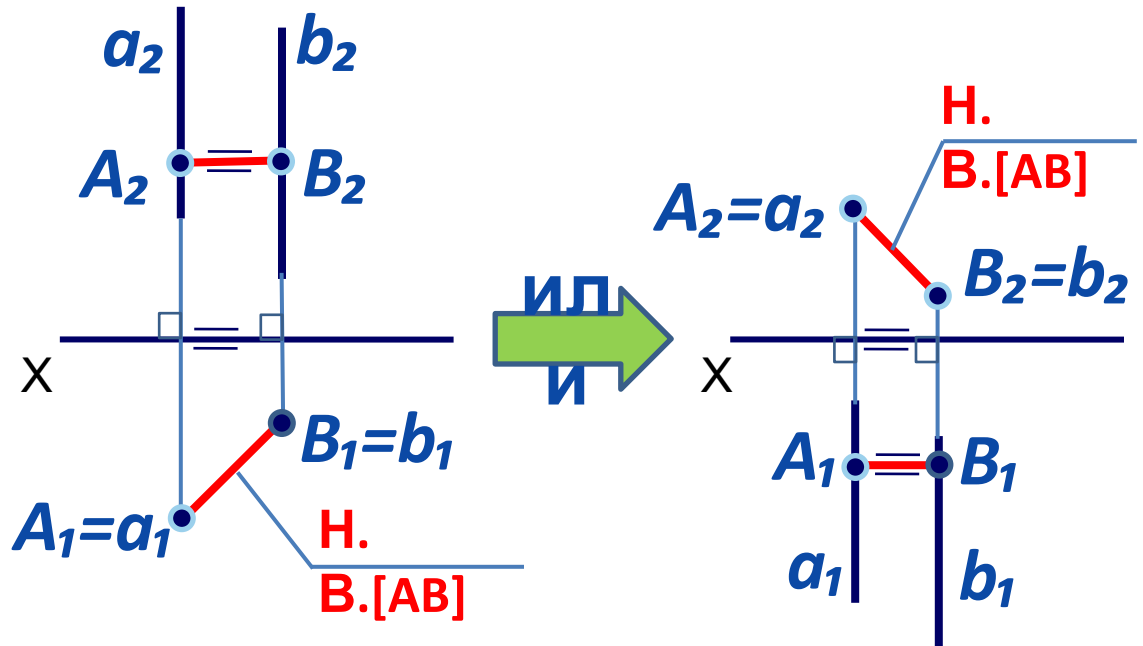
### Можно привести и другие примеры

$a \| b$  – прямые  
общего положения



В этом случае не наблюдается натуральная величина расстояния между прямыми  $a \| b$

$a \| b$  – проецирующие прямые



**Н.В.[AB]** - натуральная величина расстояния между прямыми  $a \| b$



# Метрические задачи. Основные положения

*Таким образом, решение метрических задач значительно облегчается, когда заданные геометрические объекты занимают частные положения, т.е. параллельны и/или перпендикулярны относительно плоскостей проекций. В связи с этим, во многих решаемых задачах возникает необходимость преобразования комплексного чертежа, при котором заданные геометрические объекты переводятся из общего положения в частное*





# Метрические задачи.

## Основные положения (решаемые задачи)

Продумайте, с какими геометрическими объектами могут встречаться метрические задачи по определению натуральной величины и продолжите в конспекте заполнение таблицы по строкам: 1 – расстояние (длина), 2

Определение параметра	Отношения объектов (между)
1. Расстояние (длина)	Точка-точка, точка-прямая, ...
2. Угол	Прямая-прямая (пересекающиеся и скрещивающие), прямая и ...
3. Плоский контур	Натуральная величина плоской фигуры

# Метрические задачи.

## Основные положения (основные задачи)

Все метрические задачи, решаются посредством **определенного способа преобразования** на основе реализации **четырёх основных задач** :

- 1) преобразование прямой общего положения в прямую уровня;
- 2) преобразование прямой уровня в прямую проецирующую;
- 3) преобразование плоскости общего положения в плоскость проецирующую;
- 4) преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня.

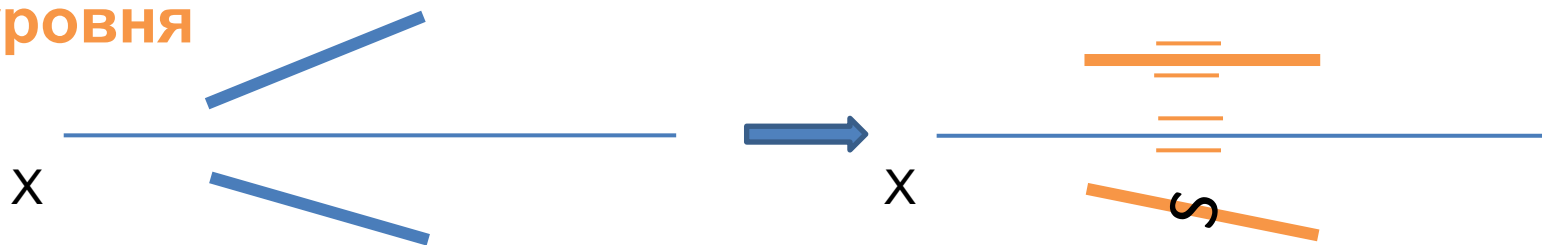
Необходимо запомнить (наизусть!) формулировку четырех основных задач



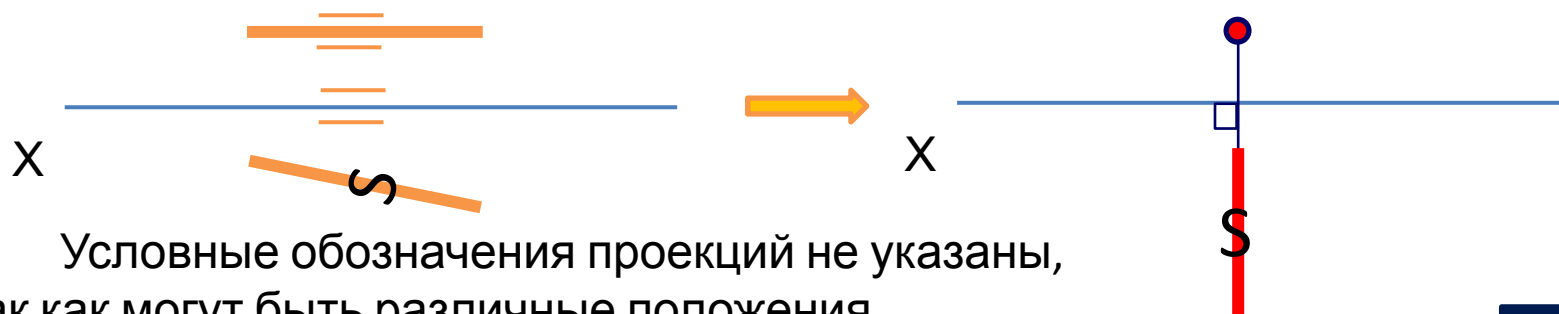
# Четыре основные задачи

Примеры 1-й и 2-й основных задач (1оз и 2оз), которые предусматривают преобразования прямой линии

**1оз можно трактовать и так: преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения стала прямой уровня**



**2оз - преобразовать чертеж так, чтобы прямая уровня заняла положение прямой проецирующей;**



Условные обозначения проекций не указаны, так как могут быть различные положения относительно наблюдателя (зависит от того, на какой проекции будет

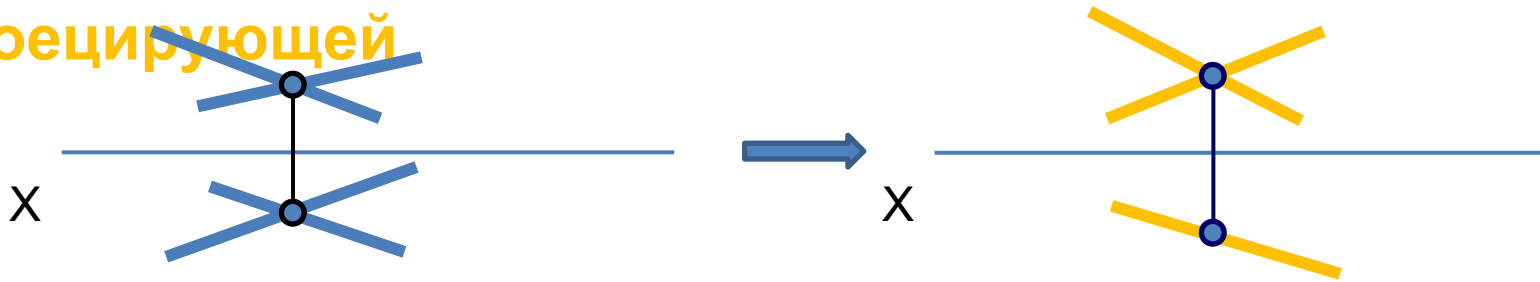
НВ)



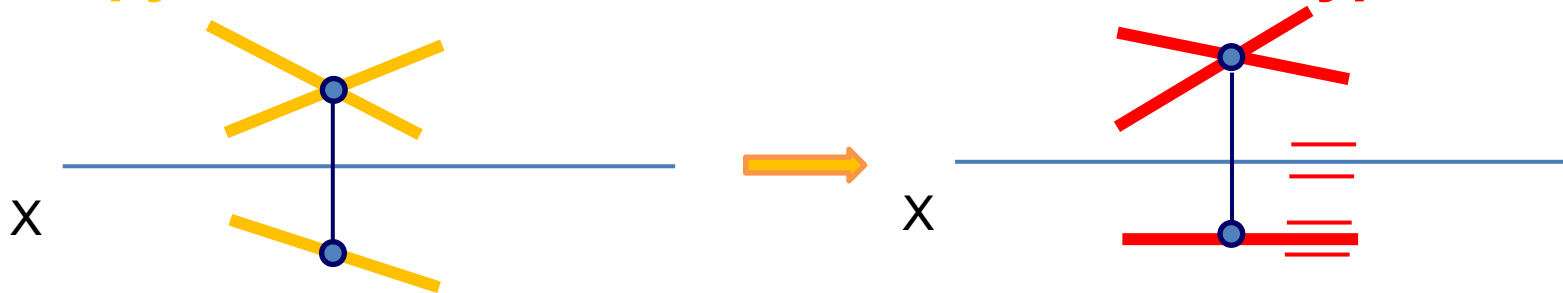
# Четыре основные задачи

Примеры 3-й и 4-й основных задач 3оз и 4оз),  
которые предусматривают преобразования плоскости

**3оз можно трактовать и так: преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала плоскостью проецирующей**



**4оз - преобразовать чертеж так, чтобы плоскость проецирующая заняла положение плоскости уровня;**



В 4оз можно определить Н.В. угла между **пересекающимися прямыми** (и Н.В. плоской фигуры)



# Метрические задачи.

## Основные положения (три важных аспекта)

Таким образом, рассмотрим **три очень важных аспекта**, без знаний которых требуемую метрическую задачу не решить:

**1 аспект – необходимо предвидеть конечный результат решаемой задачи (казалось бы мы не знаем как ещё решать, но в соответствии с представленными выше примерами, их необходимо обобщить на остальные задачи в составленной Вами таблице (решаемые задачи));**

**2 аспект – для решения конкретной задачи необходимо освоить четыре основные задачи, как «подзадачи», применение которых позволит выполнить решение конкретной задачи. При этом, возможно нужно будет применить только одну основную задачу, или последовательно за ней и следующую;**

**3 аспект – поставленная задача решается одним из способов преобразования комплексного чертежа (т.е. ортогональных проекций). В конструктивной (начертательной) геометрии таких способов несколько, поэтому следующие слайды посвящены способам преобразования и решению основных задач с примерами.**

# Метрические задачи.

## Основные положения (способы преобразования)

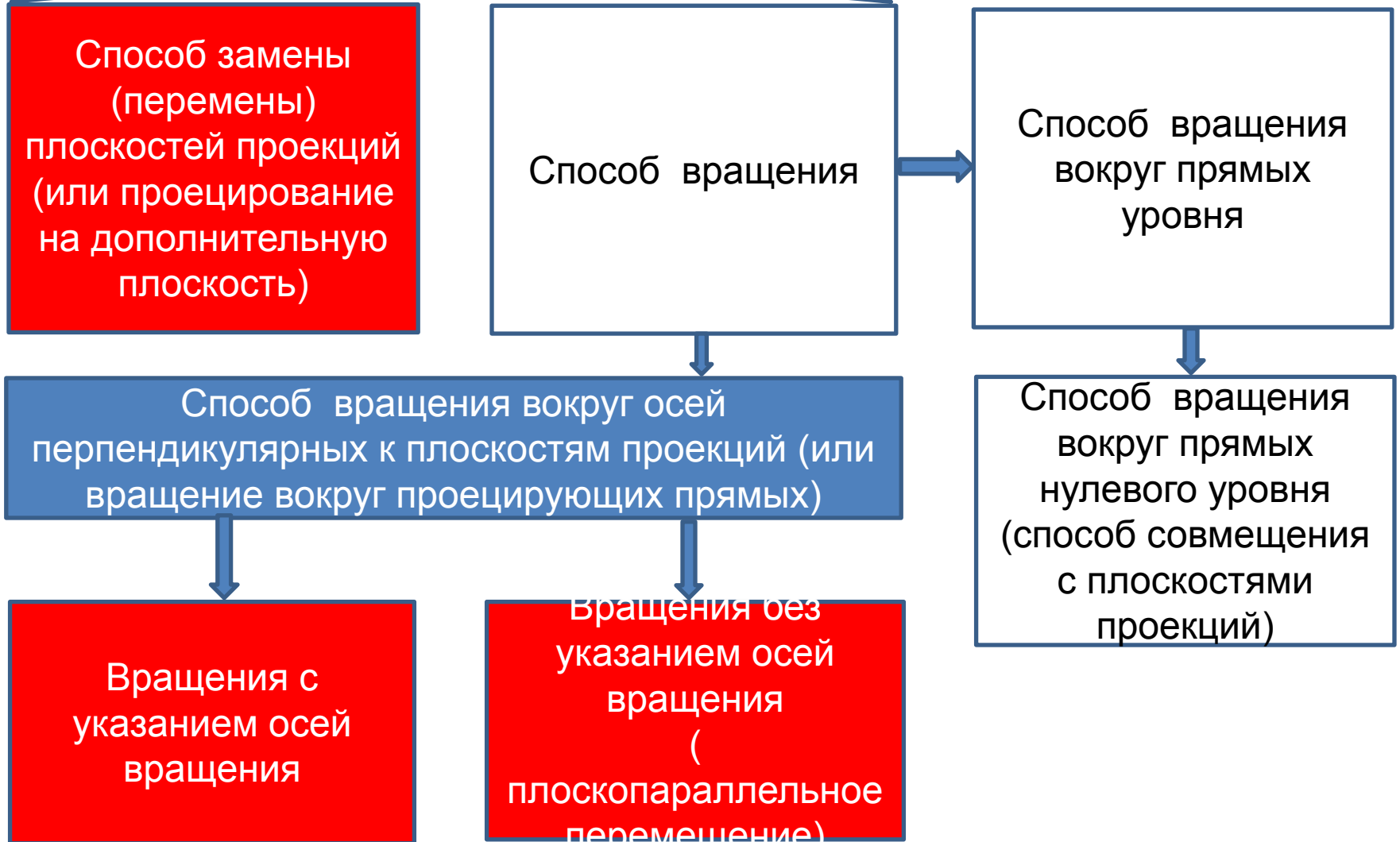
**В соответствии с решением метрических задач можно подразделить такие способы преобразования, при которых геометрический объект(ы), при решении поставленной задачи, остаются фиксированными (неизменными) относительно системы плоскостей проекций, в другом преобразовании – геометрические объекты меняют своё положение относительно плоскостей проекций.**

**Любой из этих способов преобразования однозначно приводит к решению поставленной задачи, при условии, что Вами, во-первых, в общем виде реализуется предвиденье результата решения задачи, это – выполнение первого аспекта, во-вторых, Вы обоснованно применили реализацию основной(ных) задач – это второй аспект.**

**В результате этих преобразований будет получен чертёж, облегчающий дальнейшее решение задачи, либо на выполняемом чертеже будет получено готовое решение задачи.**



# Способы преобразования



Красным цветом обозначены способы,

рассматриваемые ниже

# Способ замены плоскостей проекций

**Способ замены плоскостей проекций** заключается в замене одной из плоскостей проекций на другую (новую) плоскость проекций, на которой задача решается проще или будет получен готовый результат решения.

**Геометрическая фигура относительно исходной системы**

**плоскостей проекций  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  своего положения не**

**При этом должны быть обязательно выдержаны два**

**условия:**

1. Новая плоскость проекций по отношению к оставшейся плоскости проекций должна быть перпендикулярна (но таких новых плоскостей может быть множество, тогда необходимо второе условие:

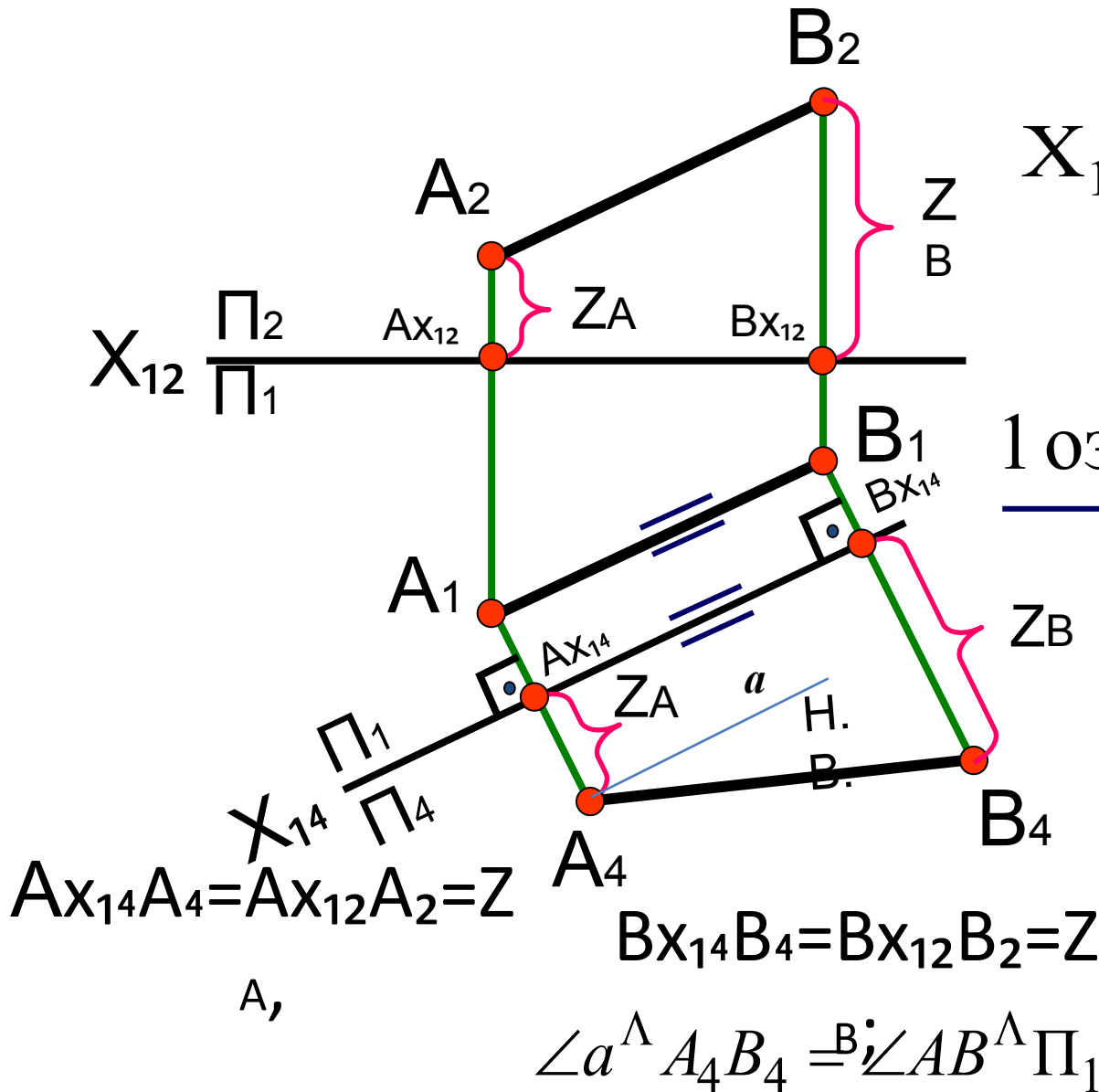
2. Новая плоскость проекций ориентируется в соответствии с применяемой основной задачи







# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ УРОВНЯ



$$X_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow X_{14} \frac{\Pi_4}{\Pi_1}$$

$$1) \Pi_4 \perp \Pi_1$$

$$1 \text{ и } 3 \Rightarrow 2) \Pi_4 \parallel (AB)$$

$$X_{14} \parallel (A_1B_1)$$

$$A_1A_4 \perp X_1$$

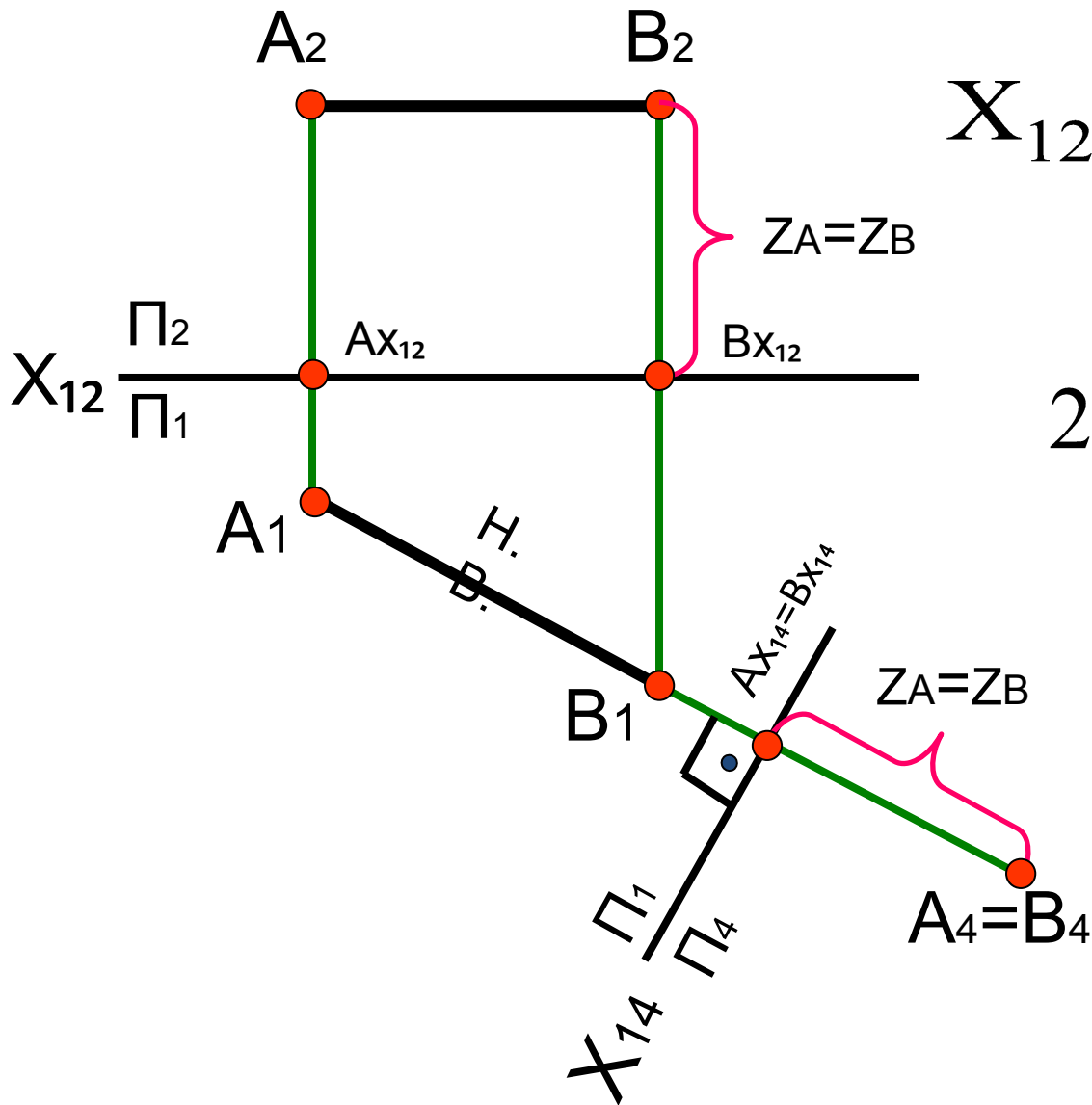
$$B_1B_4 \perp X_1$$

$$A_4B_4 = H.$$

$$B. [AB]$$



# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОЙ УРОВНЯ В ПОЛОЖЕНИЕ ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ



$$X_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow X_{14} \frac{\Pi_4}{\Pi_1}$$

$$\Pi_4 \perp \Pi_1$$

$$203 \Rightarrow \Pi_4 \perp (AB)$$

---


$$X_{14} \perp (A_1B_1)$$



# Преобразование чертежа прямой

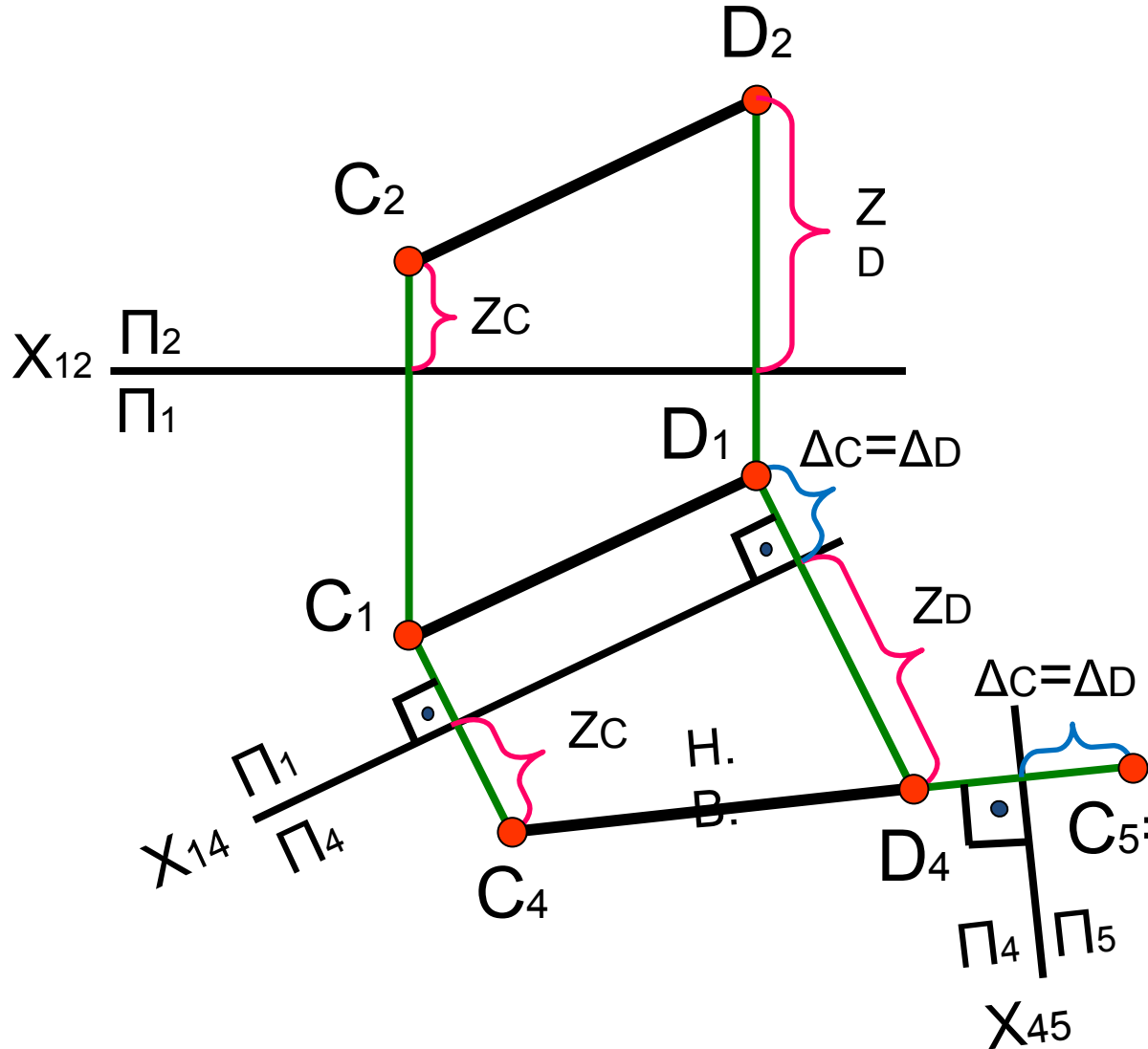
Прямая общего положения может  
быть последовательно

преобразована  
*в прямую уровня, и только  
затем,*

*в проецирующую прямую  
таким образом, в первую  
очередь необходимо решить  
первую основную задачу (1 оз), а  
затем вторую (2 оз).*



# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПОЛОЖЕНИЕ ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ



$$1. X_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_4}{\Pi_1}$$

$$\Pi_4 \perp \Pi_1$$

$$103 \Rightarrow \Pi_4 \parallel (CD)$$

$$X_{14} \parallel (C_1D_1)$$

$$2. X_{45} \frac{\Pi_4}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$$

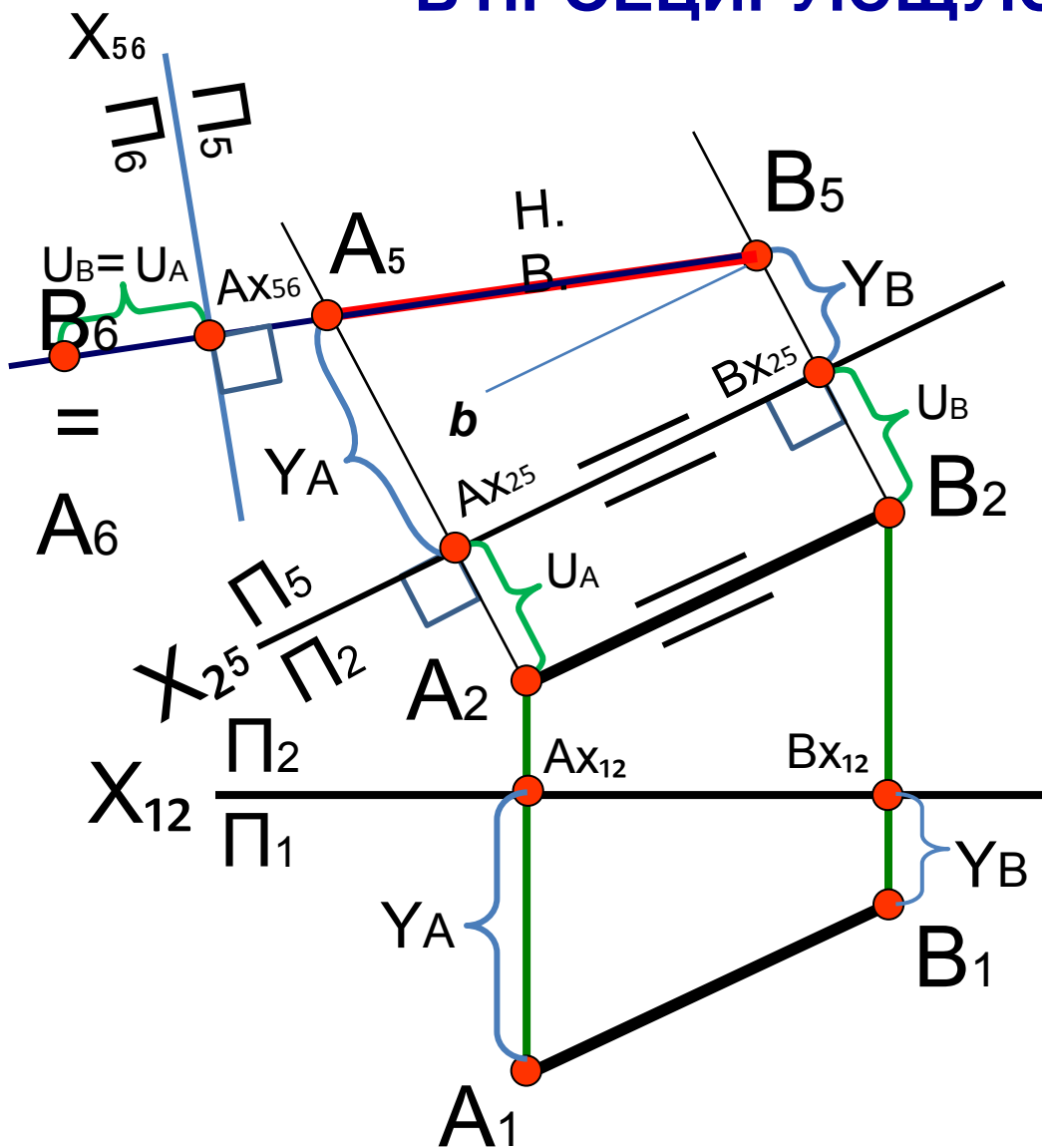
$$\Pi_5 \perp \Pi_4$$

$$203 \Rightarrow \Pi_5 \perp (CD)$$

$$X_{45} \perp (C_4D_4)$$



# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПРОЕЦИРУЮЩУЮ ПРЯМУЮ



$$X_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow X_{25} \frac{\Pi_2}{\Pi_5}$$

1) \$\Pi\_5 \perp \Pi\_2\$

1 03 \$\Rightarrow\$ 2) \$\Pi\_5 \parallel (AB)\$

$$X_{25} \parallel (A_2B_2)$$

$$A_2A_5 \perp X_{25}$$

$$B_2B_5 \perp X_{25}$$

$$X_{25} \frac{\Pi_2}{\Pi_5} \rightarrow X_{56} \frac{\Pi_6}{\Pi_5}$$

1) \$\Pi\_6 \perp \Pi\_5\$

2 03 \$\Rightarrow\$ 2) \$\Pi\_6 \perp (AB)\$

$$X_{56} \perp A_5B_5$$

$$\angle b^\wedge A_5B_5 = \angle AB^\wedge \Pi_2$$



# Преобразование чертежа плоскости

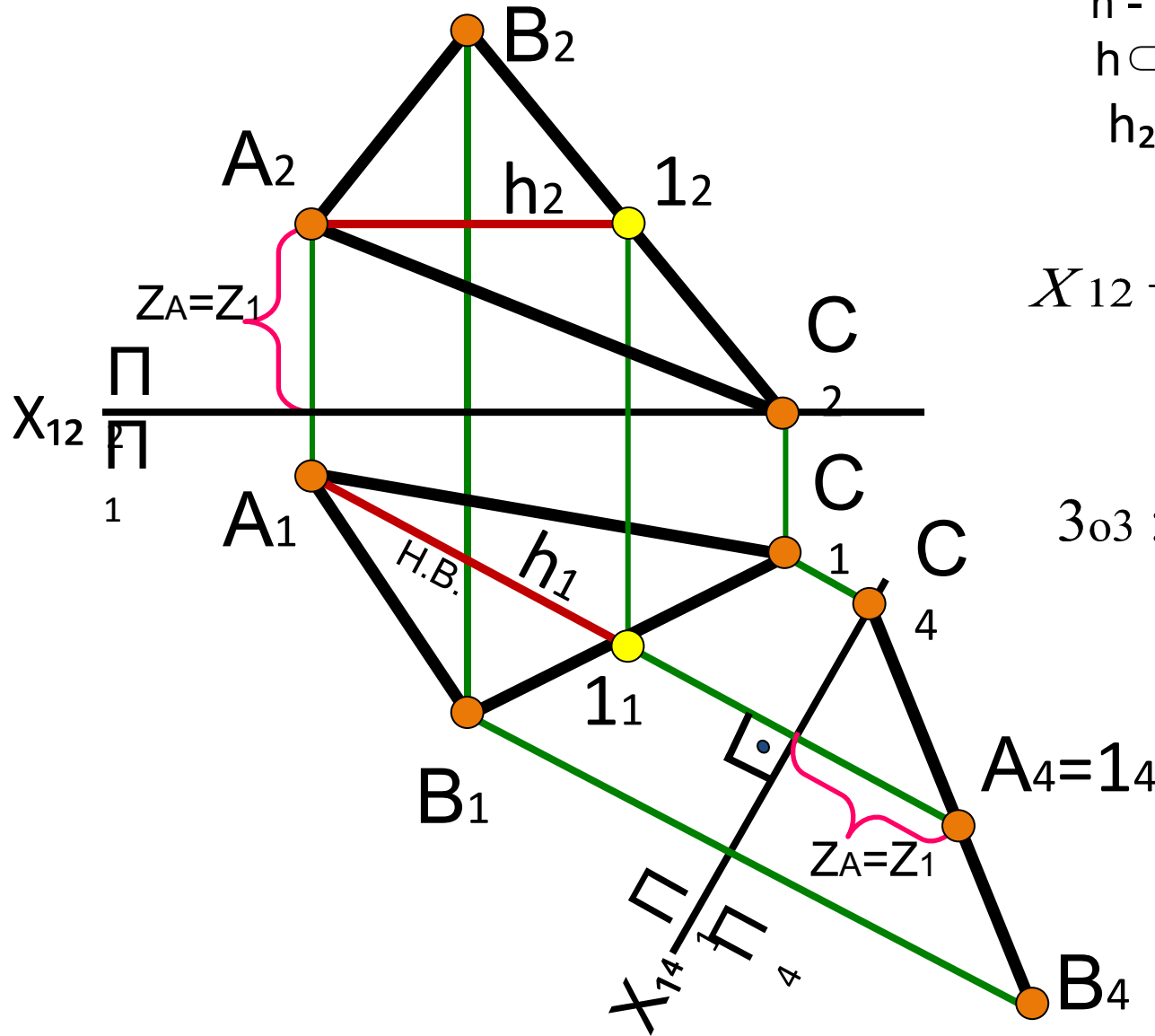
Плоскость общего положения  
может быть последовательно  
преобразована:

в положение проецирующей  
плоскости;

Только затем в положение плоскости  
уровня.



# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПОЛОЖЕНИЕ ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ



$h$  - горизонталь  
 $h \subset \Sigma(\Delta ABC)$ ;  $h \supset A$ ,  $h_2 \parallel X_{12}$   
 $h_2 \cap B_2C_2 = 1$ ,  $h_1 \supset A_1 1_1$

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi_2 & & \Pi_4 \\
 X_{12} \xrightarrow{\quad} & \rightarrow & X_{14} \xrightarrow{\quad} \\
 \Pi_1 & & \Pi_1 \\
 \Pi_4 \perp \Pi_1 & & 
 \end{array}$$

$3_{o3} : \Pi_4 \perp \Sigma(\Delta ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Pi_4 \perp h,$

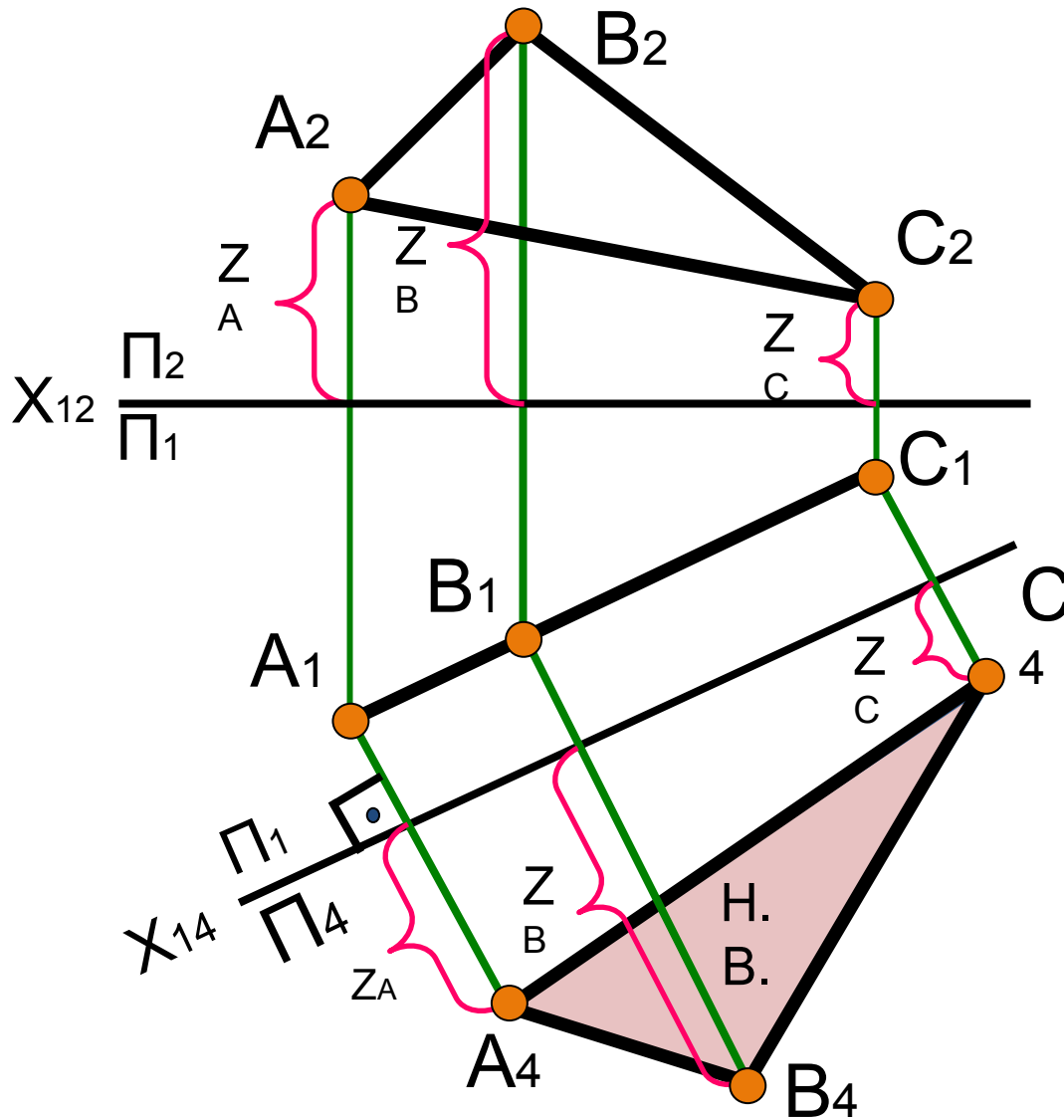
$X_{14} \perp h_1$

$A_4B_4C_4$  - отображается в  
 прямую линию,  
 $\Sigma(\Delta ABC) \perp \Pi_4$





# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ В ПЛОСКОСТЬ УРОВНЯ



$$X_{12} \xrightarrow[\Pi_1]{\Pi_2} \rightarrow X_{14} \xrightarrow[\Pi_4]{\Pi_1} :$$

$$\Pi_4 \perp \Pi_1,$$

$$4 \text{ оз: } \Pi_4 \parallel (\Delta A_1B_1C_1),$$

$$X_{14} \parallel (A_1B_1C_1)$$

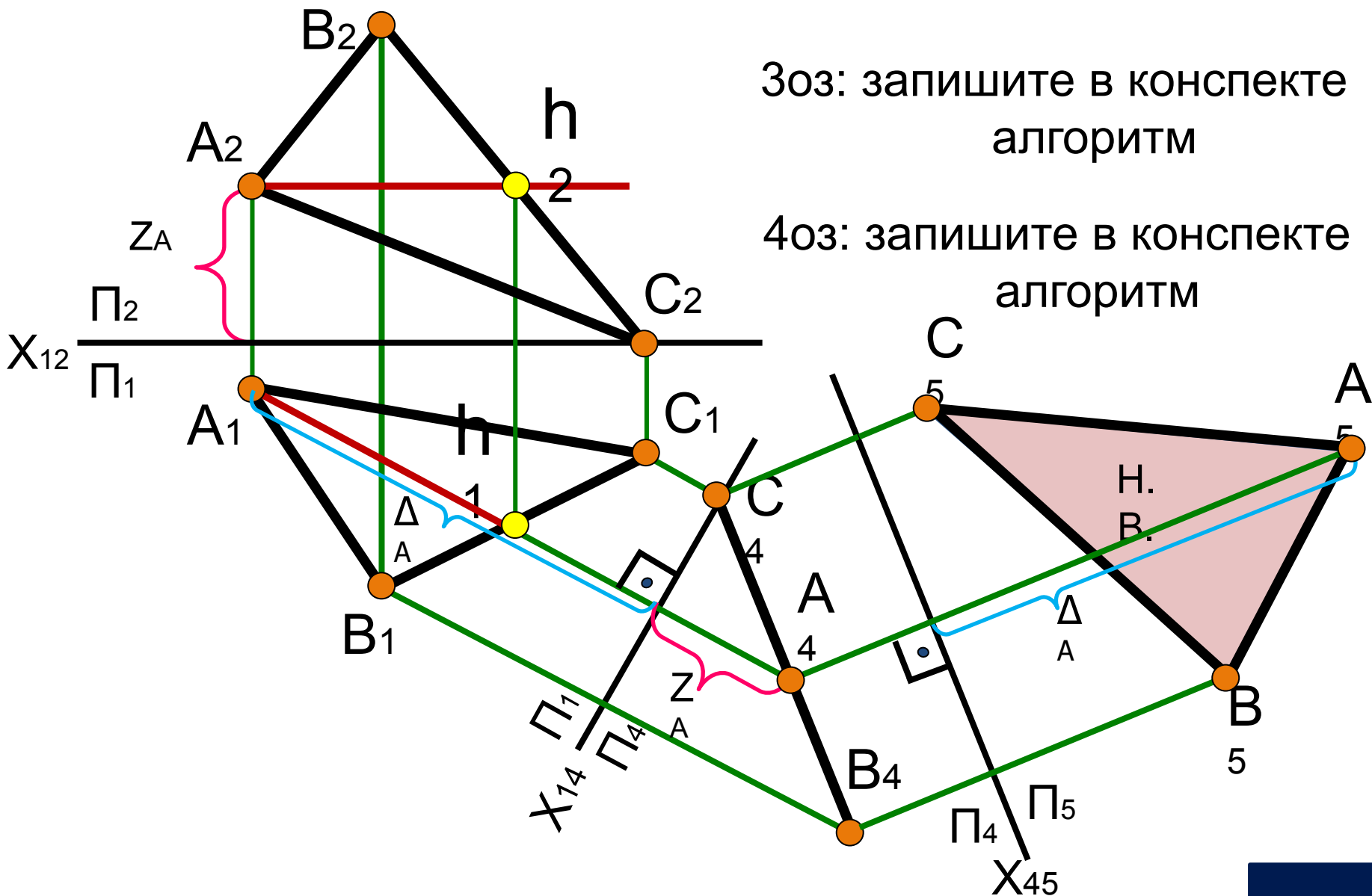
$$|\Delta A_4B_4C_4| = H \cdot B. (\Delta ABC)$$



# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТЬ УРОВНЯ

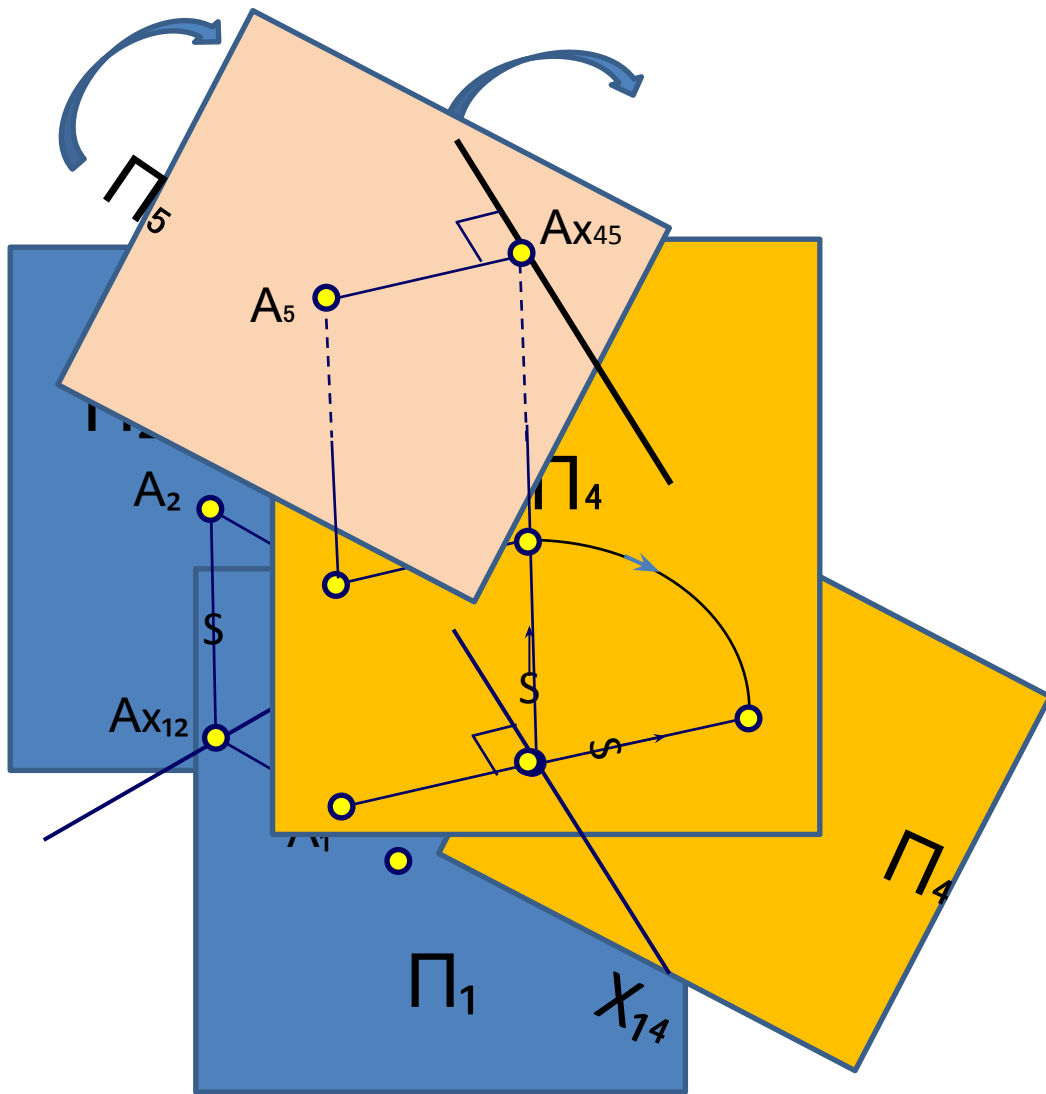
3оз: запишите в конспекте алгоритм

4оз: запишите в конспекте алгоритм

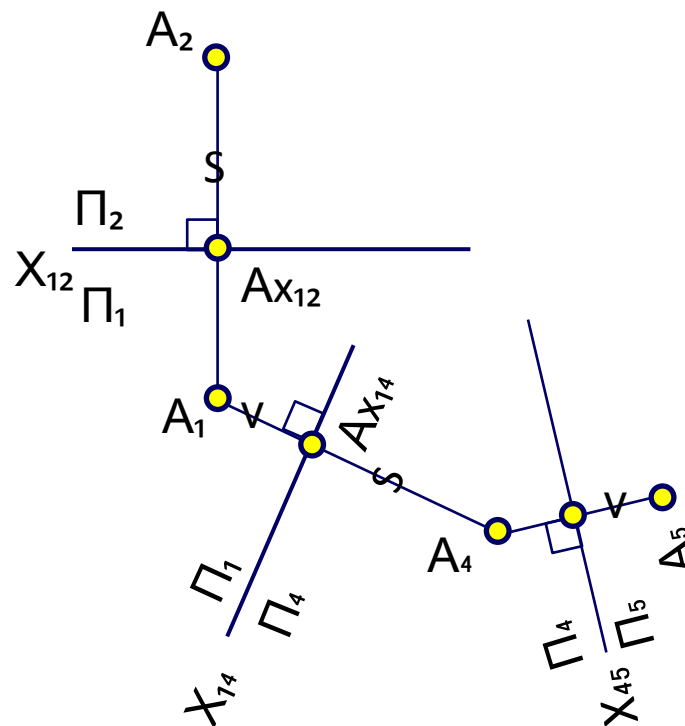


# Сущность способа замены плоскостей проекций

Замена: 1)  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$  (получили систему  $\Pi_1 - \Pi_4$ ); 2)  $\Pi_1$  на  $\Pi_5$  (получили систему  $\Pi_4 - \Pi_5$ )



Комплексный  
чертеж



$$1) X_{12} \frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow X_{14} \frac{\Pi_4}{\Pi_1}$$

$$2) X_{14} \frac{\Pi_4}{\Pi_1} \rightarrow X_{45} \frac{\Pi_4}{\Pi_5}$$