ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

РАБОТУ ВЫПОЛНЯЛ: ДЕСЯТКОВ АРТЕМ

ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Функцию F(x) называют первообразной для функции f(x) на интервале (a; b), если на нем производная функции F(x) равна f(x):

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Операцию, обратную дифференцированию называют интегрированием.

ПРИМЕРЫ ПЕРВООБРАЗНОЙ

Приведем примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для всех x справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

3) Функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$, поскольку для всех x справедливо равенство $(\sin x)' = \cos x$.

Примеры

1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$

   $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x; \quad F(x) = \cos x$

   $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4; \quad F(x) = 2x^3 + 4x$

   $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x; \quad F(x) = \mathrm{tg}\, x$

   $F'(x) = (\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$

Вообще, зная формулы для отыскания производных, нетрудно составить таблицу формул для отыскания первообразных:

Функция $y = f(x)$	Первообразная $y = F(x)$
0	C
1	x
$x^r, r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
$a^x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a; b) функции f(x) называют любую ее первообразную функцию.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Где С – произвольная постоянная (const).

Примеры

$$1.\ \int A\,dx = Ax + C; \quad (Ax+C)' = A$$

$$2.\ \int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$$

$$3.\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4.\ \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3$$

$$5.\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ТАБЛИЦА ПЕРВООБРАЗНЫХ

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n	a^x+C	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}+C$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x+C$	$\cos x$	e^x+C	e^x
$-\cos x+C$	$\sin x$	C	Cx
$\operatorname{tg}x+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x+C$	$\frac{1}{x\ln a}$
$-\operatorname{ctg}x+C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x+C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Три правила нахождения первообразных

1^o Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

2^o Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для kf.

3^o Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$

есть первообразная для $f(kx + b)$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула **Ньютона-Лейбница**.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,

и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx = (x^3 - x^2 + x)\Big|_1^2 =$$

$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

$$\int_3^{10} (\sqrt{x+6})dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3}\Bigg|_3^{10} =$$

$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$