

Элементы комбинат

Правило умножения

Если нужно выполнить k действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами, ..., k -ое - n_k способами, то общее число способов, которыми можно выполнить k действий, равно

$$n = n_1 n_2 \dots n_k$$

Пример 1

Автомобильный номер состоит из трех букв и четырех цифр. Сколько автомобильных номеров может составить таким образом.

Решение:

$$30^3 10^4$$

! Факториал



Формула

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Например

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Запомни

$$0! = 1 \text{ и } 1! = 1$$

Удобная формула $n! = (n-1)! \cdot n$

$$\text{Например: } 6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$$

Значения факториалов от 0 до 10

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

$$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$$

Перестановкой из n элементов называется всякое размещение из n элементов по n .

$$P_n = n!$$

Две перестановки будут различными, если они отличаются порядком элементов.

Размещением из n элементов по k называется всякое упорядоченное подмножество, состоящее из

k элементов множества из n элементов:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Два размещения будут различными, если они отличаются порядком и составом элементов.

Сочетанием из n элементов по k называется всякое подмножество, состоящее из k элементов множества из n элементов.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Два сочетания будут различными, если они отличаются, хотя бы одним элементом.

Пример 2

На шести одинаковых карточках написаны буквы А, Р, И, О, Д, Н. Карточки наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что при ЭТОМ получится слова «РОДИНА».

Решение:

$$m = 1$$

$$n = p = 6!$$

$$p(A) = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{720} = 0,0014$$

Пример 3



Устройство содержит 5 элементов, из которых 3 исправны, а 2 нет. При работе устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся исправные элементы.

Решение:

$$n = C_5^2, m = C_3^2$$

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{\frac{3!}{2!1!}}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{3!2!3!}{2!1!5!} = \frac{3!}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = 0,3$$

Примеры решений задач.

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из класса, в котором 20 человек?

Очевидно, что здесь речь идет о сочетаниях, так как каждая группа учащихся в 3 человека должна отличаться хотя бы одним из учащихся. Следовательно, таких групп должно быть C_{20}^3 .

$$\text{Значит, } C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140.$$

Ответ: 1140.

Решение комбинаторных задач

Задача 1. На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Способов постановки в расписание трех предметов из 16 столько, сколько можно составить размещений из 16 элементов по 3.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{13!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360$$

<p>Выбор с возвращением и с учётом порядка <i>(Размещение с повторениями)</i></p>	n^k
<p>Выбор с возвращением и без учёта порядка <i>(Сочетание с повторением)</i></p>	$C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$
<p>Выбор без возвращения и с учётом порядка <i>(Размещение без повторений)</i></p>	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
<p>Выбор без возвращения и без учёта порядка <i>(Сочетание без повторений)</i></p>	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
<p>Число всех возможных перестановок, которые можно образовать из n элементов</p>	<p>Или</p> $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ $A_n^n = n!$

Упростить выражения

$$1) \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} =$$

$$2) \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!} =$$

$$3) \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!} =$$

$$4) \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!} =$$