Элементы комбинат

Правило умножения

Если нужно выполнить ***к*** действий, причем первое можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами, …. , *К*-ое - n_k способами, то общее число способов, которыми можно выполнить ***к*** действий, равно

$$n = n_1 n_2 \ldots n_k$$

Пример 1

Автомобильный номер состоит из трех букв и четырех цифр. Сколько автомобильных номеров может составить таким образом.

Решение:

$$30^3 10^4$$

! Факториал

Формула $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Например

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Запомни $0! = 1$ и $1! = 1$

Удобная формула $n! = (n-1)! \cdot n$

Например: $6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$

Значения факториалов от 0 до 10

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$

$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$

Перестановкой из n элементов называется всякое размещение из n элементов по n.

$$p_n = n!$$

Две перестановки будут различными, если они отличаются порядком элементов.

Размещением из n элементов по ***к*** называется всякое упорядоченное подмножество, состоящее из
к элементов множества из ***n*** элементов:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Два размещения будут различными, если они отличаются порядком и составом элементов.

Сочетанием из ***n*** элементов по ***к*** называется всякое подмножество, состоящее из ***к*** элементов множества из ***n*** элементов.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Два сочетания будут различными, если они отличаются, хотя бы одним элементом.

Пример 2

На шести одинаковых карточках написаны буквы А,Р,И,О,Д,Н. Карточки наугад раскладыва ются в ряд. Какова вероятность того, что при этом
получится слова «РОДИНА».

Решение:

$m = 1$

$n = p = 6!$

$$p(A) = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{720} = 0{,}0014$$

$$p(A) = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{720} = 0{,}0014$$

Пример 3

Устройство содержит 5 элементов, из которых 3 исправны, а 2 нет. При работе устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся исправные элементы.

Решение:

$$n = C_5^2, m = C_3^2$$

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{\frac{3!}{2!1!}}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{3!2!3!}{2!1!5!} = \frac{3!}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = 0{,}3$$

Решение задач

Примеры решений задач.

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из класса, в котором 20 человек?

Очевидно, что здесь речь идет о сочетаниях, так как каждая группа учащихся в 3 человека должна отличаться хотя бы одним из учащихся. Следовательно, таких групп должно быть C_{20}^3.

Значит, $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140.$

Ответ: 1140.

Решение комбинаторных задач

Задача 1. На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Способов постановки в расписание трех предметов из 16 столько, сколько можно составить размещений из 16 элементов по 3.

$$A_{16}^{3} = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{13!\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{13!} = 14\cdot 15\cdot 16 = 3360$$

Выбор с возвращением и с учётом порядка (Размещение с повторениями)	n^k
Выбор с возвращением и без учёта порядка (Сочетание с повторением)	$C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$
Выбор без возвращения и с учётом порядка (Размещение без повторений)	$\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Выбор без возвращения и без учёта порядка (Сочетание без повторений)	$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Число всех возможных ***перестановок***, которые можно образовать из n элементов	$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ Или $A_n^n = n!$

Упростить выражения

1) $$\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=$$

2) $$\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}=$$

3) $$\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}=$$

4) $$\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}=$$