Математический анализ — совокупность разделов математики, соответствующих историческому разделу под наименованием «анализ бесконечно малых», объединяет дифференциальное и интегральное исчисления.

Основная учебная литература

- Шершнев В.Г. Математический анализ. Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=342089
- Шершнев В.Г. Математический анализ: сборник задач с решениями. Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=501529#

Дополнительная учебная литература

- Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник. Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=469720
- Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=470407
- Рудык Б. М. Курс высшей математики для экономистов. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=512518#

Главы:

1. Элементы теории множеств
2. Введение в анализ
3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Глава 1. Элементы теории множеств.

§1. Основные понятия.

Множество?

Множество?

В математике некоторые понятия являются первичными, неопределяемыми.

К таким понятиям относится «множество».

Оно не определяется через другие понятия, его поясняют на примерах.

Множество?

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Основоположник теории множеств немецкий математик

Георг Кантор (1845-1918)

Множество — это совокупность элементов, объединенных общим (характеристическим) свойством.

Объекты, из которых состоит множество, называют его ***элементами***.

Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Обозначения:

A, B, C,…, X, Y, Z — множества;

a, b, c,…, x, y, z — элементы множеств;

$x \in A$ — обозначает принадлежность элемента x множеству A;

$x \notin A$ — x не принадлежит множеству A.

Кванторы:

$\Rightarrow$ — следовательно, если … то;

$\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда, необходимо и достаточно;

$\forall$ — любой, каждый;

$\exists$ — существует.

Выражение $\exists x \in X : P(x)$ читается так:

существует элемент x множества X, обладающий свойством P(x).

§2. Способы задания множеств

• Перечислением элементов.

Например, $X = \{1, 2\}$ — множество X состоит из двух элементов: 1 и 2.

- Указанием характеристического свойства.

Например,

$X=\{x: (x-1)(x+3)=0\}$ — это множество содержит

два элемента — корни уравнения $(x-1)(x+3) = 0$,

то есть числа 1 и −3.

- Указанием характеристического свойства.

Например,

$A=\{(\lambda_1, \dots , \lambda_n) : \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0\}$ – такое множество содержит единственный набор чисел, состоящий из n нулей, т. е. $A=\{(0, 0, \dots , 0)\}$.

Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента.

$$\forall x \;\; x \notin \varnothing.$$

Универсальное множество – это множество, содержащее все элементы.

$$\forall x \;\; x \in U.$$

Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента.

Универсальное множество – это множество, содержащее все элементы.

ПРИМЕР.

$$\{x \in R : x^2 < 0\} = \varnothing. \qquad \{x \in R : x^2 \geq 0\} = R = U.$$

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B:

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

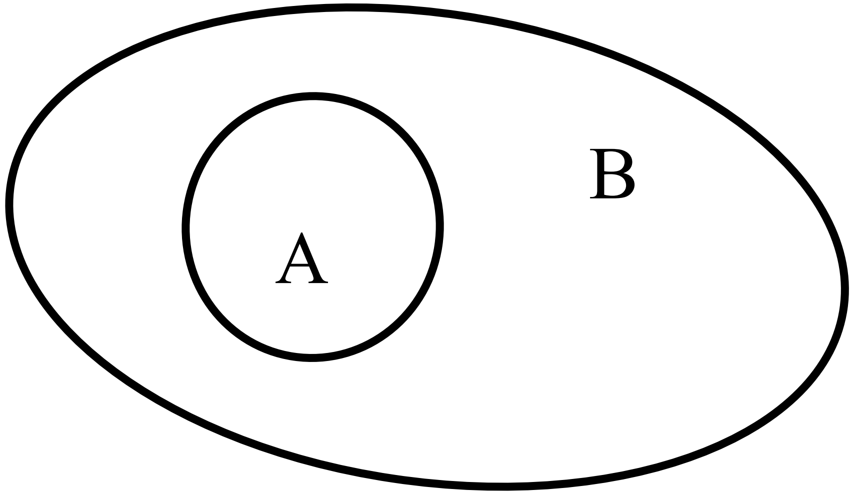
Очевидно, что $\varnothing \subset A$, $A \subset A$, $A \subset U$ для любого множества A.

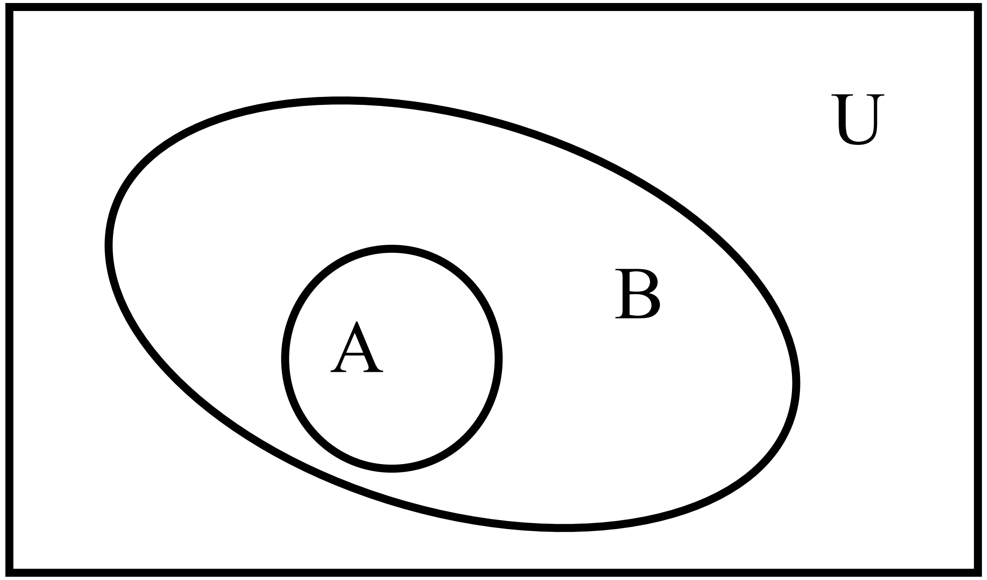
Множества A и B называются ***равными***, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

§3. Операции над множествами

При графическом изображении множеств удобно использовать круги Эйлера, на которых универсальное множество обычно представляют в виде прямоугольника, а остальные множества в виде овалов, заключенных внутри этого прямоугольника.

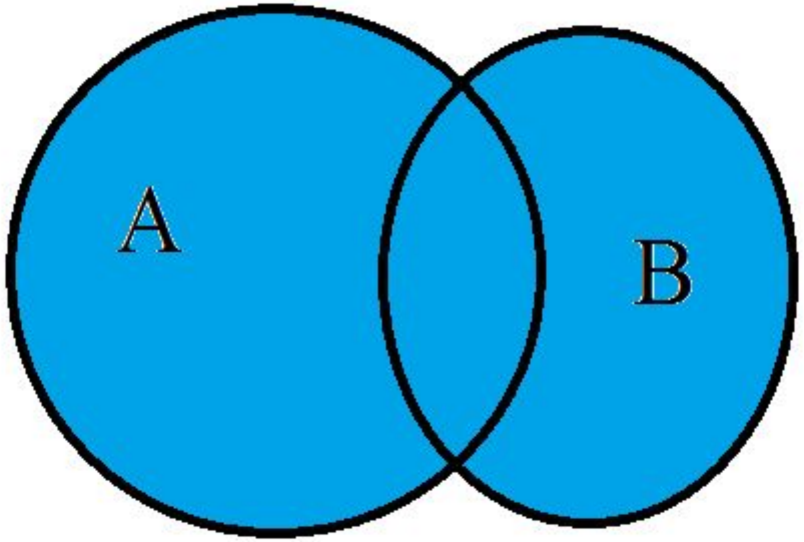




Объединением $A \cup B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, содержащихся либо в A, либо в B.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B;$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \notin B.$$


A
B

Найти объединение множеств A и B, если:

а) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$;

Найти объединение множеств A и B, если:

а) A={1, 2, 3, 4, 5}, B={2, 4, 6, 8, 10};

Ответ: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

Найти объединение множеств А и В, если:

б) А={а, б, в, г, д, е}, В={а, в, д, к, и};

Найти объединение множеств A и B, если:

б) $A=\{а, б, в, г, д, е\}$, $B=\{а, в, д, к, и\}$;

Ответ: $A \cup B=\{а, б, в, г, д, е, к, и\}$

Найти объединение множеств A и B, если:

в) A={а, в, д, ж, и, м, н, о}, B={в, к, и, о, м, п, с, ф};

Найти объединение множеств А и В, если:

в) $A=\{$а, в, д, ж, и, м, н, о$\}$, $B=\{$в, к, и, о, м, п, с, ф$\}$;

Ответ: $A \cup B=\{$а, в, д, ж, к, и, м, н, о, п, с, ф$\}$

Найти объединение множеств A и B, если:

г) $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Найти объединение множеств A и B, если:

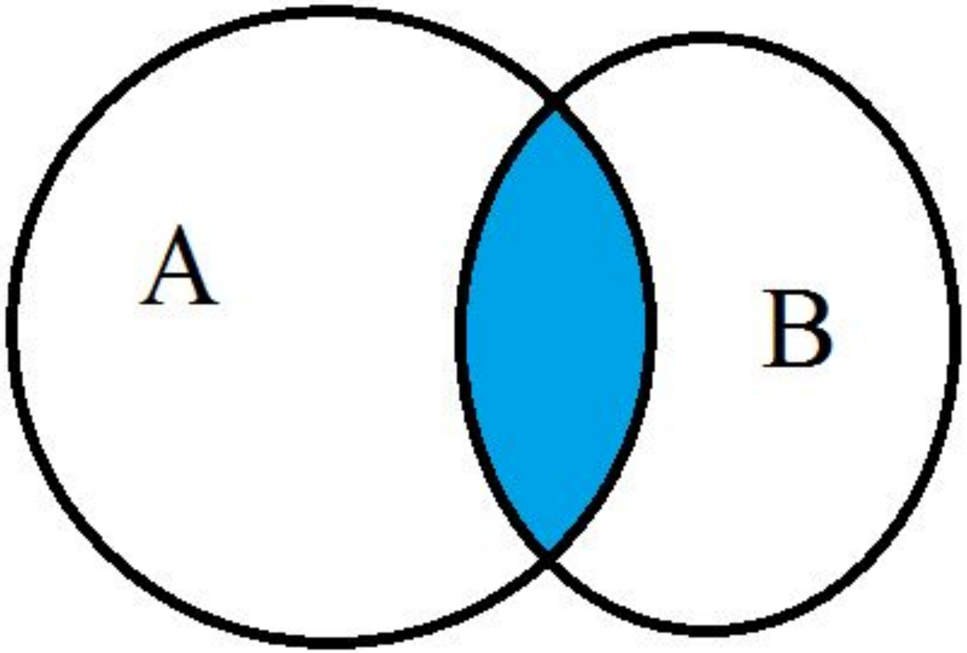
г) $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Ответ: $A \cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Пересечением $A \cap B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, содержащихся и в A, и в B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B;$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B.$$


A
B

Найти пересечение множеств A и B, если:

а) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$;

Найти пересечение множеств A и B, если:

а) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$;

Ответ: $A \cap B=\{2, 4\}$

Найти пересечение множеств A и B, если:

б) $A=\{а, б, в, г, д, е\}$, $B=\{а, в, д, к, и\}$;

Найти пересечение множеств А и В, если:

б) А={а, б, в, г, д, е}, В={а, в, д, к, и};

Ответ: А∩В={а, в, д}

Найти пересечение множеств A и B, если:

в) A={а, в, д, ж, и, м, н, о}, B={в, к, и, о, м, п, с, ф};

Найти пересечение множеств A и B, если:

в) $A=\{а, в, д, ж, и, м, н, о\}$, $B=\{в, к, и, о, м, п, с, ф\}$;

Ответ: $A \cap B=\{в, и, м, о\}$

Найти пересечение множеств A и B, если:

г) $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Найти пересечение множеств A и B, если:

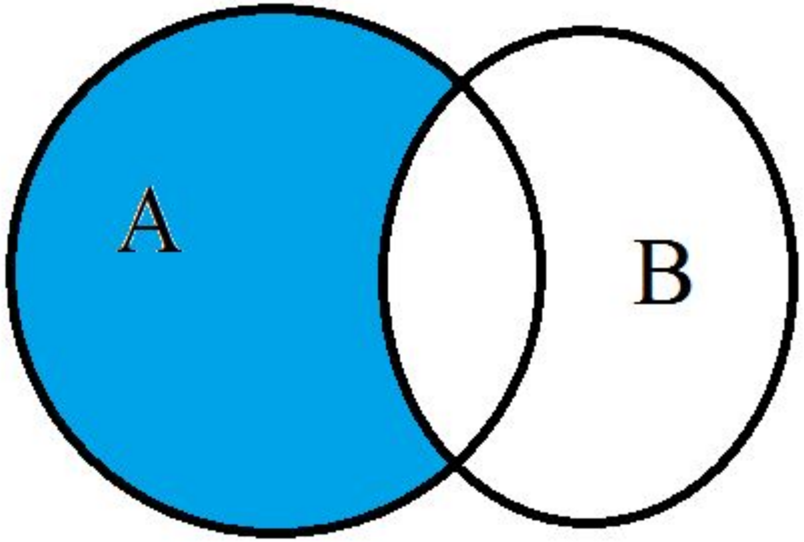
г) $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Ответ: $A \cap B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Разностью A \ B множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin B;$$

$$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \in B.$$


A
B

Найти разность множеств A и B, если:

а) A={1, 2, 3, 4, 5}, B={2, 4, 6, 8, 10};

б) A={а, б, в, г, д, е}, B={а, в, д, к, и};

в) A={а, в, д, ж, и, м, н, о}, B={в, к, и, о, м, п, с, ф};

г) A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Найти разность множеств A и B, если:

а) A={1, 2, 3, 4, 5}, B={2, 4, 6, 8, 10};

б) A={а, б, в, г, д, е}, B={а, в, д, к, и};

в) A={а, в, д, ж, и, м, н, о}, B={в, к, и, о, м, п, с, ф};

г) A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

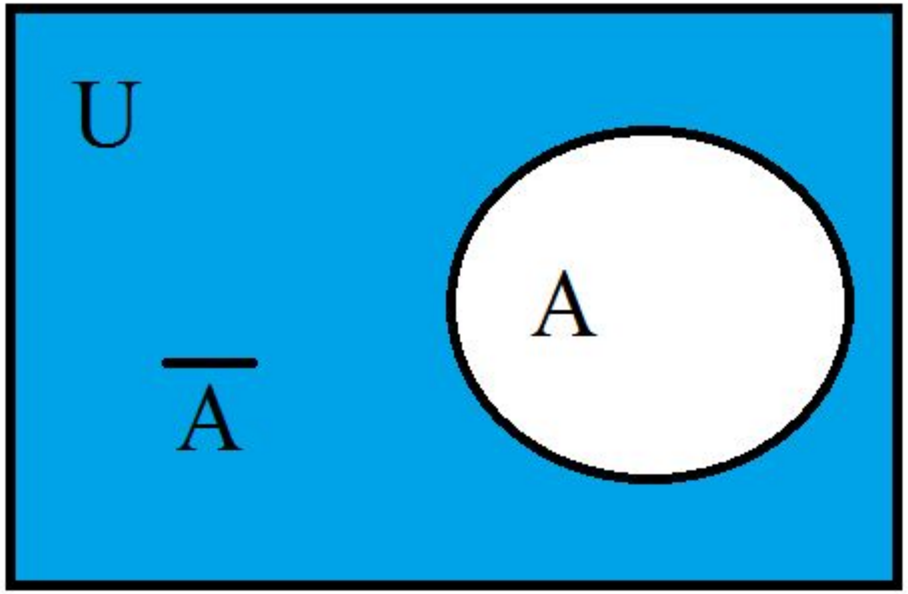
Ответ: а) $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, б) $A \setminus B = \{$б, г, е$\}$,

в) $A \setminus B = \{$а, д, ж, н$\}$, г) $A \setminus B = \{0, 1, 2\}$.

Разность U\A называется ***дополнением*** множества А и обозначается $\overline{A}$

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A;$$

$$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in A.$$


U
A
$\overline{A}$

Свойства операций:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

9. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

10. $A \cup A = A \cap A = A$

11. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

12. $A \cup U = U$; $A \cap U = A$

13. $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

14. $\overline{\overline{A}} = A$

Даны следующие числовые множества: $A=\{1,3,5,7,9,11\}$, $B=\{2,5,6,11,12\}$, $C=\{1,2,3,5,9,12\}$. Найти множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

а) $(A \cup C) \cap B$; г) $A \cap B \cap C$;

б) $(A \cap C) \setminus B$; д) $B \setminus (A \cap C)$;

в) $(C \setminus B) \cup A$; е) $(B \cap C) \cup A$.

ОТВЕТЫ:

Даны следующие числовые множества: $A=\{1,3,5,7,9,11\}$, $B=\{2,5,6,11,12\}$, $C=\{1,2,3,5,9,12\}$. Найти множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

а) $(A \cup C) \cap B=\{2, 5, 11, 12\}$;

г) $A \cap B \cap C=\{5\}$;

б) $(A \cap C) \setminus B=\{1, 3, 9\}$;

д) $B \setminus (A \cap C)=\{2, 6, 11, 12\}$;

в) $(C \setminus B) \cup A=A$;

е) $(B \cap C) \cup A=\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$.

Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

а) $(A \cup B) \setminus C$;

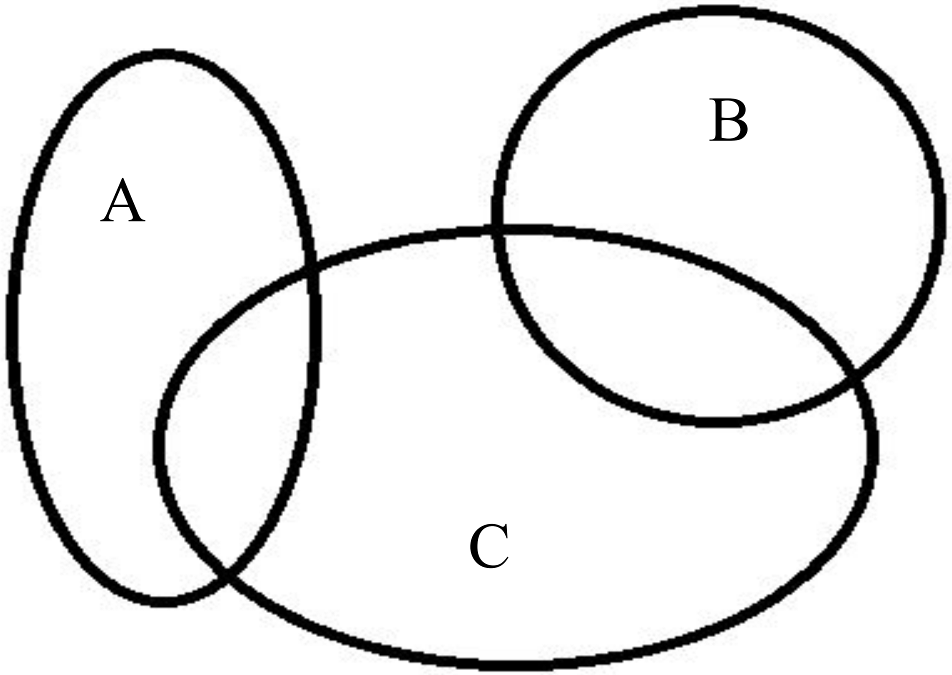
б) $(A \cup B) \cap (C \cup B)$;

в) $(A \cup B) \cap (C \setminus B)$;

г) $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

д) $(A \setminus C) \cup (B \cap C)$;

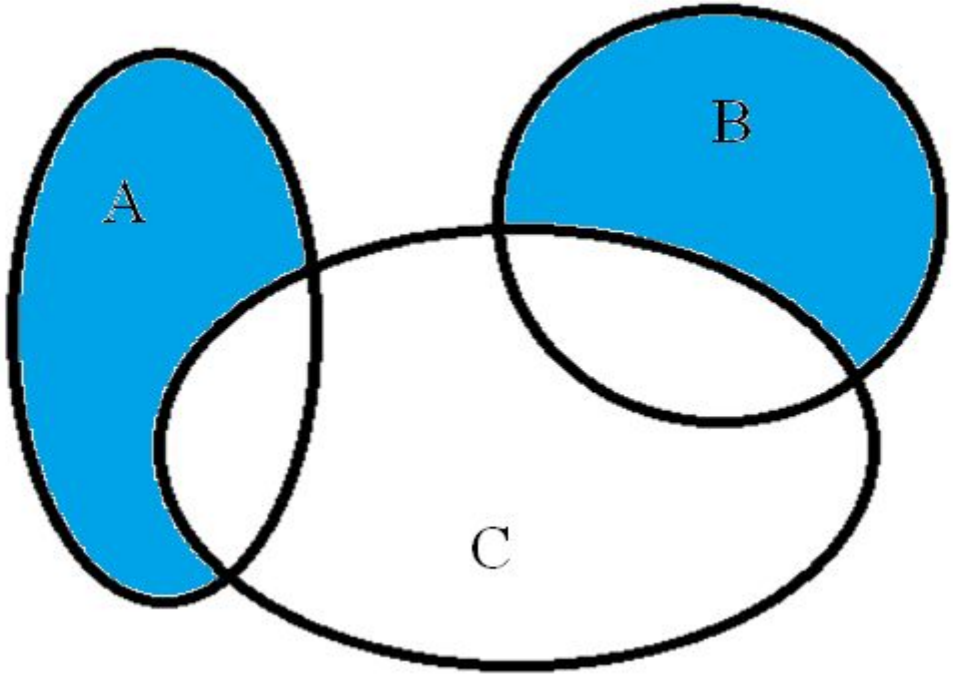
е) $(C \cup A) \setminus (B \cap A)$.



ОТВЕТЫ:

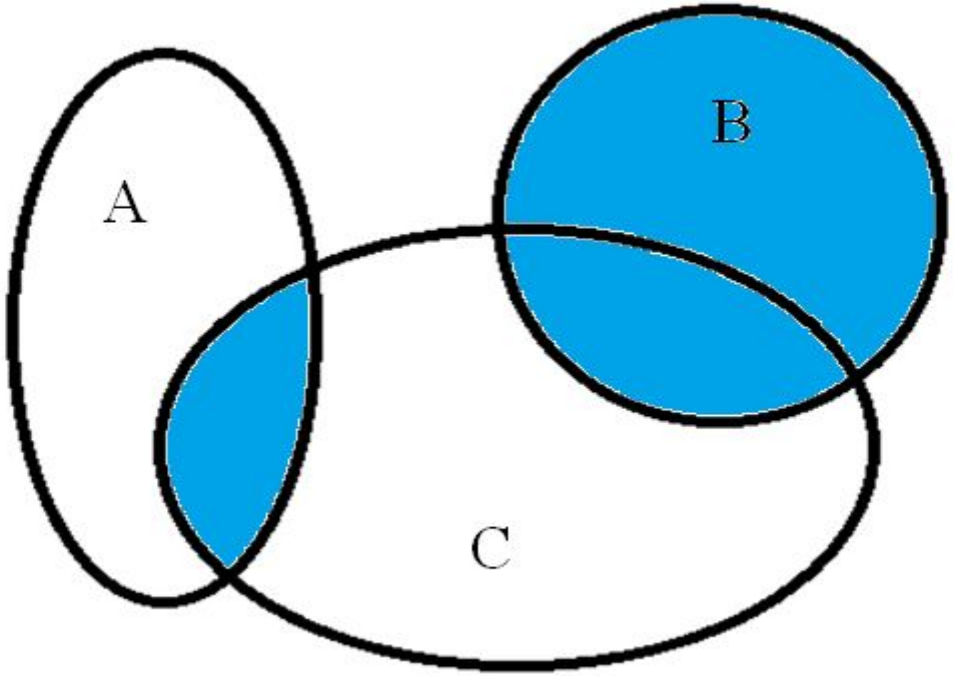
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

а) $(A \cup B) \setminus C$;



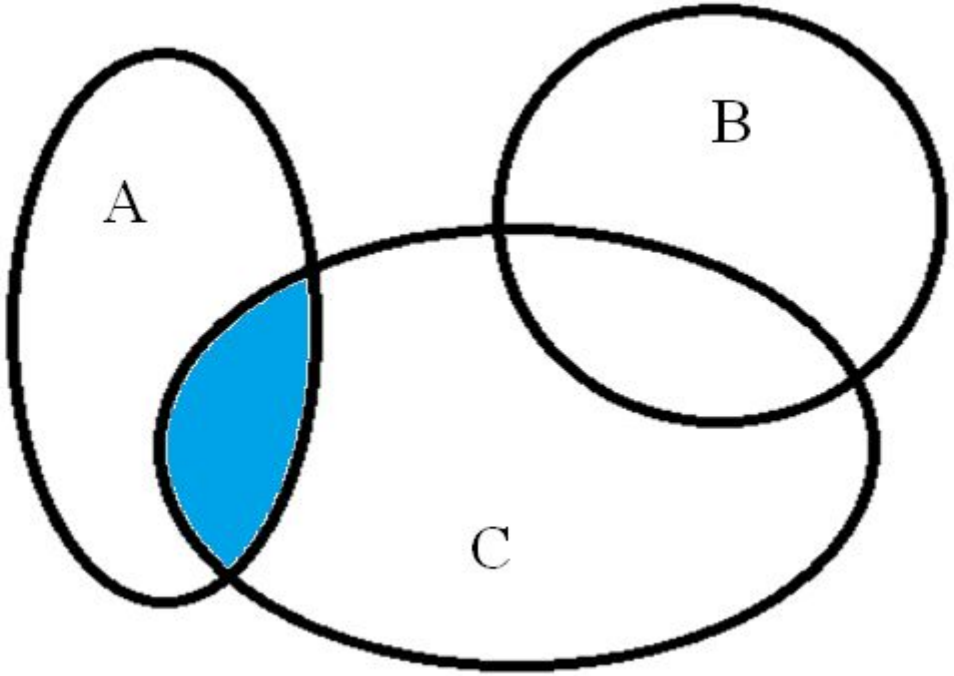
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

б) $(A \cup B) \cap (C \cup B)$;



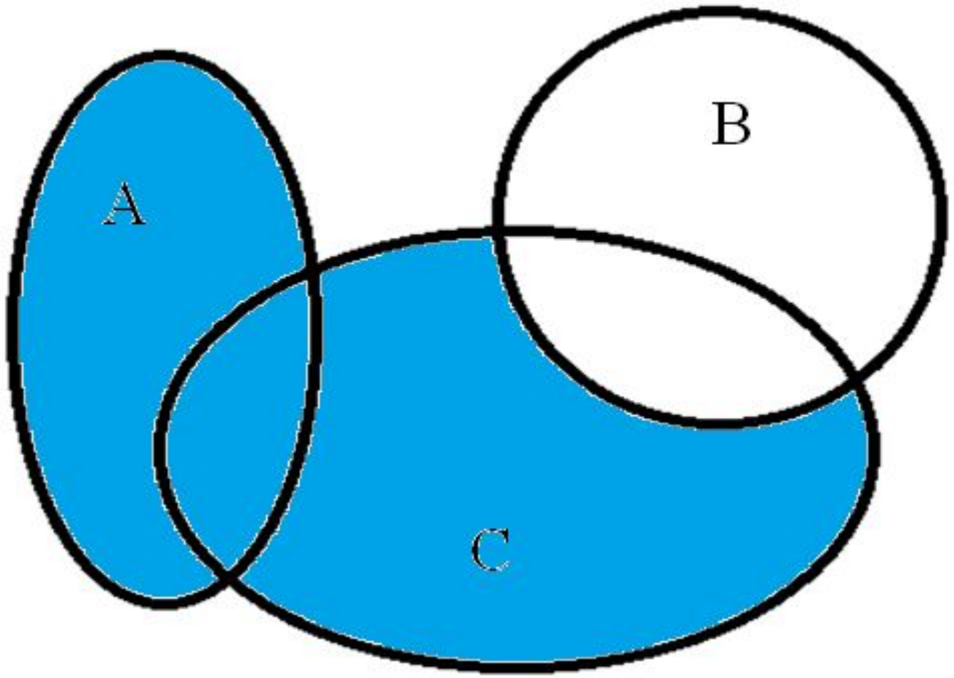
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

в) $(A \cup B) \cap (C \setminus B)$;



Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

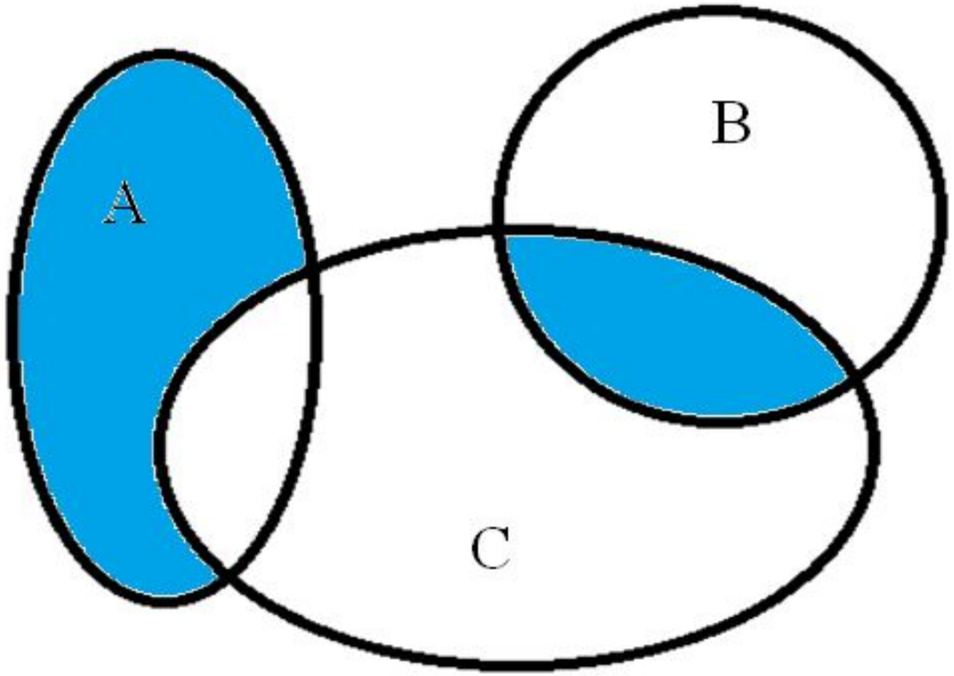
г) $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$;



Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая

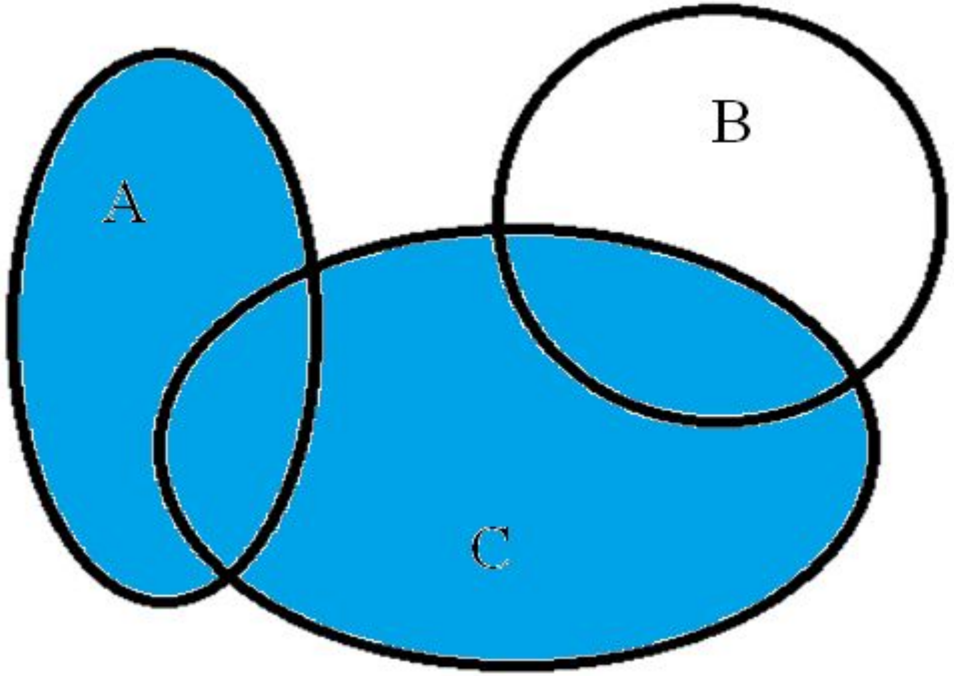
соответствует следующему множеству:

д) $(A \setminus C) \cup (B \cap C)$;

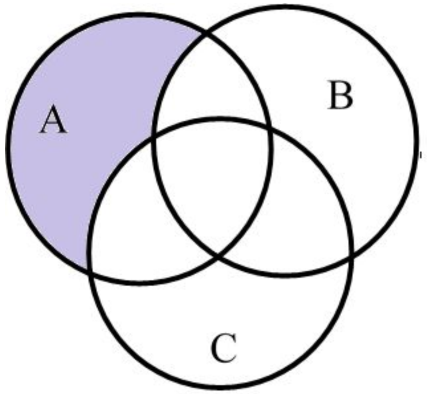


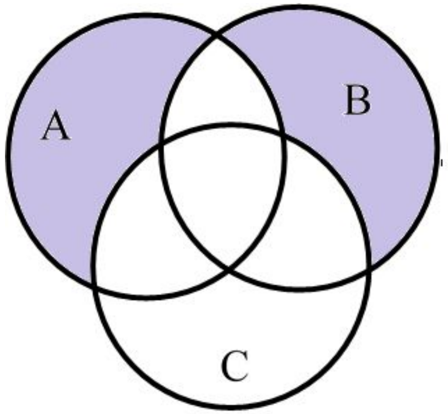
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

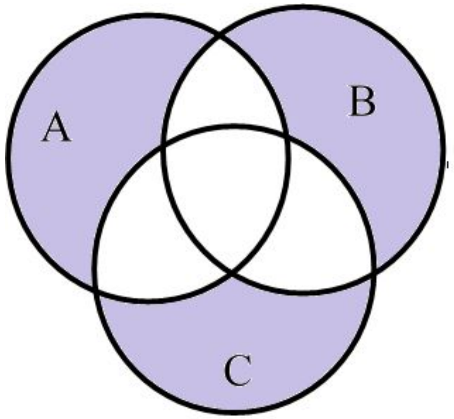
е) $(C \cup A) \setminus (B \cap A)$.

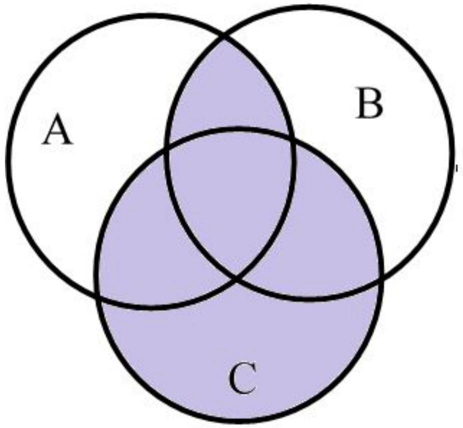


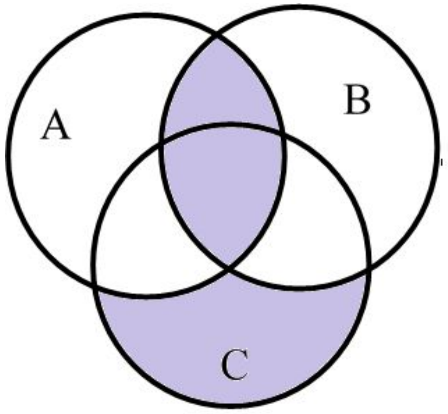
Записать множество, изображенное с помощью кругов Эйлера на рисунке:

а) 

б) 

в) 

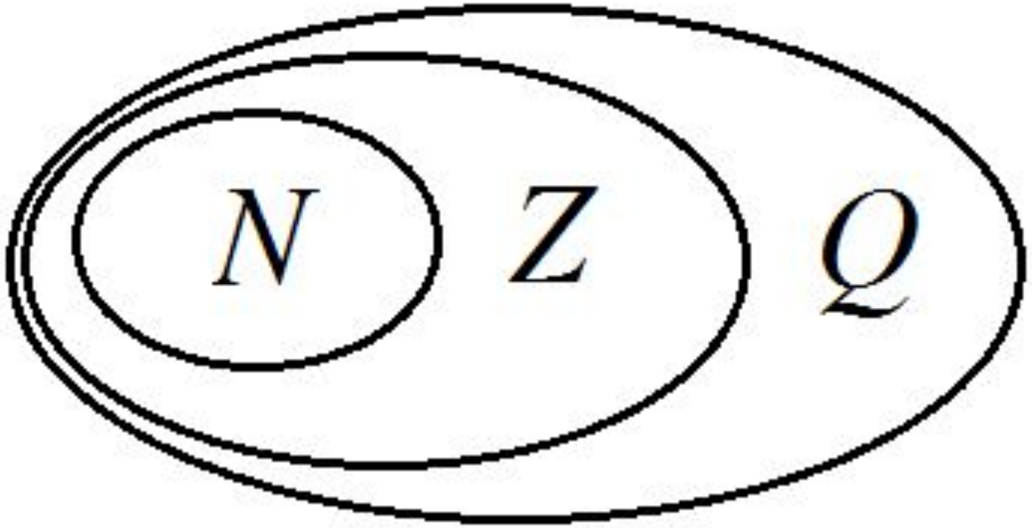
г) 

д) 

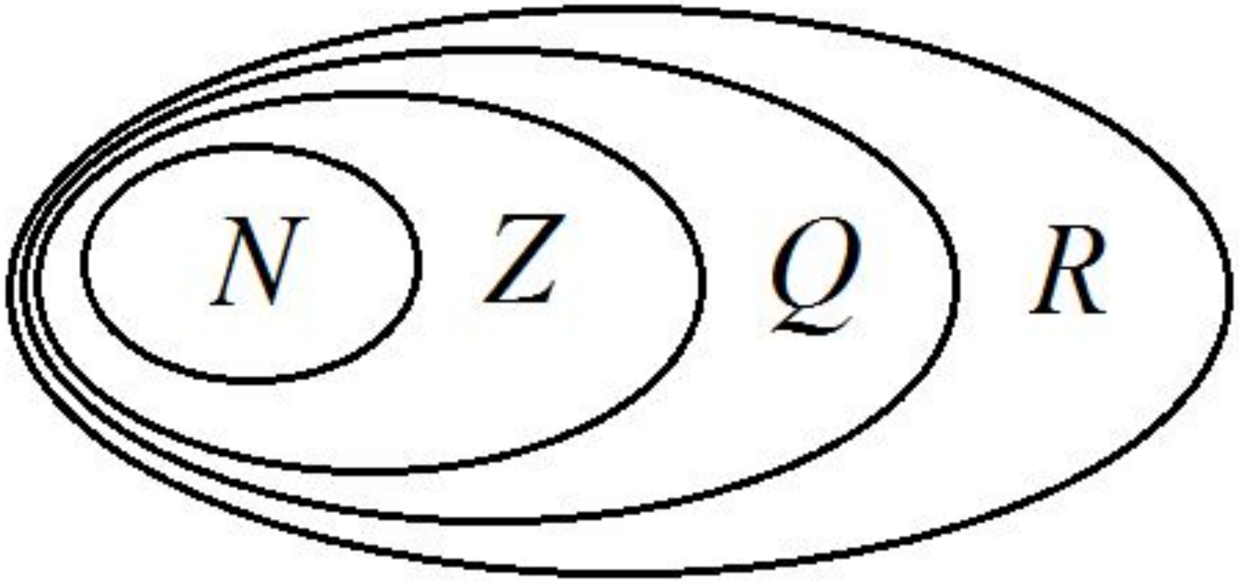
§4. Числовые множества

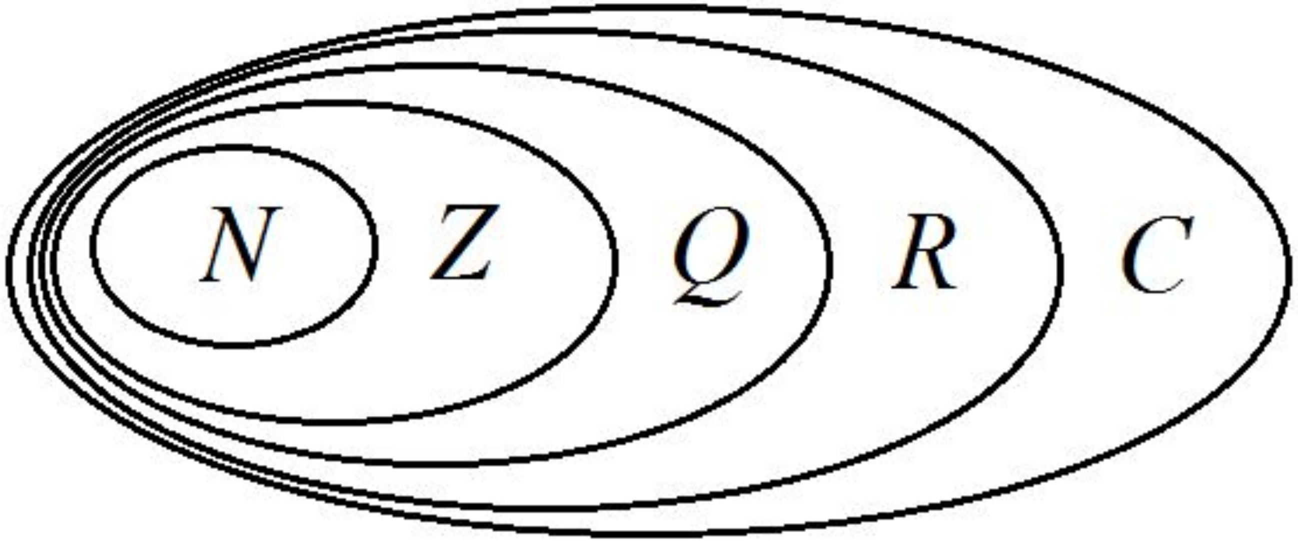

N


N
Z



N
Z
Q


N
Z
Q
R


N
Z
Q
R
C