

Математический анализ — совокупность разделов математики, соответствующих историческому разделу под наименованием «анализ бесконечно малых», объединяет дифференциальное и интегральное исчисления.



Основная учебная литература

- Шершнева В.Г. Математический анализ. Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=342089>
- Шершнева В.Г. Математический анализ: сборник задач с решениями. Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=501529#>

Дополнительная учебная литература

- Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник. Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=469720>
- Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=470407>
- Рудык Б. М. Курс высшей математики для экономистов. – Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=512518#>

Главы:

1. Элементы теории множеств
2. Введение в анализ
3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

A α	альфа	N ν	ню
B β	бета	E ξ	кси
G γ	гамма	O \omicron	омикрон
D δ	дельта	P π	пи
E ϵ	эпсилон	R ρ	ро
Z ζ	дзета	S σ	сигма
H η	эта	T τ	тау
\Theta θ	тета	Y υ	ипсилон
I ι	йота	\Phi ϕ	фи
K κ	каппа	X χ	хи
L λ	лямбда	\Psi ψ	пси
M μ	мю	\Omega ω	омега

Глава 1. Элементы теории множеств.

§1. Основные понятия.

Множество?

Множество?

В математике некоторые понятия являются первичными, неопределяемыми.

К таким понятиям относится «множество».

Оно не определяется через другие понятия, его поясняют на примерах.

Множество?

«Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Основоположник теории множеств немецкий математик

Георг Кантор (1845-1918)

Множество — это совокупность элементов, объединенных общим (характеристическим) свойством.

Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами*.

Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Обозначения:

A, B, C, \dots, X, Y, Z — множества;

a, b, c, \dots, x, y, z — элементы множеств;

$x \in A$ — обозначает принадлежность элемента x множеству A ;

$x \notin A$ — x не принадлежит множеству A .

Кванторы:

\Rightarrow — следовательно, если ... то;

\Leftrightarrow — тогда и только тогда, необходимо и достаточно;

\forall — любой, каждый;

\exists — существует.

Выражение $\exists x \in X, P(x)$ читается так:

существует элемент x множества X , обладающий свойством $P(x)$.

§2. Способы задания множеств

- Перечислением элементов.

Например, $X = \{1, 2\}$ — множество X состоит из двух элементов: 1 и 2.

- Указанием характеристического свойства.

Например,

$X = \{x: (x-1)(x+3)=0\}$ — это множество содержит

два элемента — корни уравнения $(x-1)(x+3) = 0$,

то есть числа 1 и -3 .

- Указанием характеристического свойства.

Например,

$A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0\}$ – такое множество содержит единственный набор чисел, состоящий из n нулей, т. е. $A = \{(0, 0, \dots, 0)\}$.

Пустое множество — это множество, не содержащее ни одного элемента.

$$\forall x \quad x \notin \emptyset.$$

Универсальное множество — это множество, содержащее все элементы.

$$\forall x \quad x \in U.$$

Пустое множество — это множество, не содержащее ни одного элемента.

Универсальное множество — это множество, содержащее все элементы.

ПРИМЕР.

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \emptyset. \quad \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\} = \mathbb{R} = U.$$

Множество A называется *подмножеством* множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B :

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

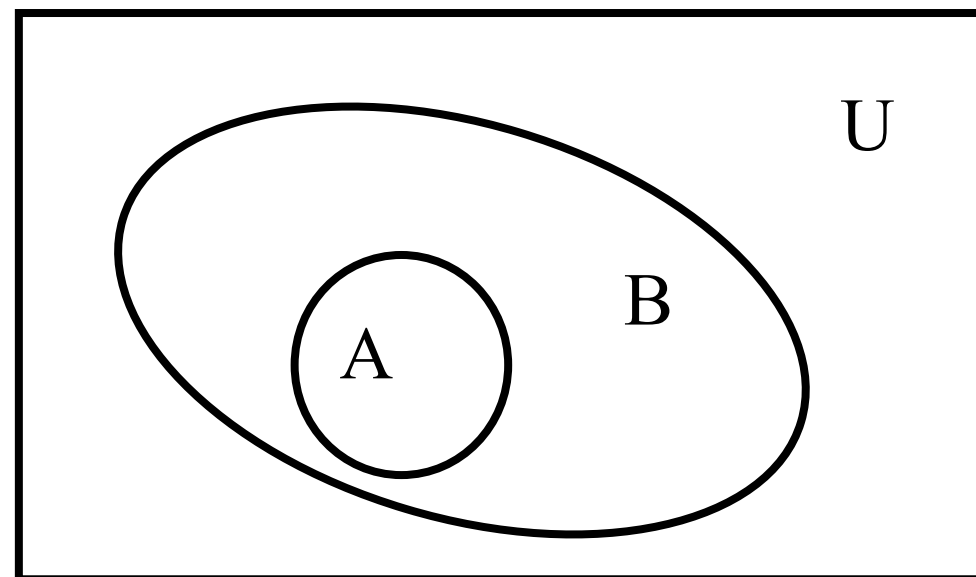
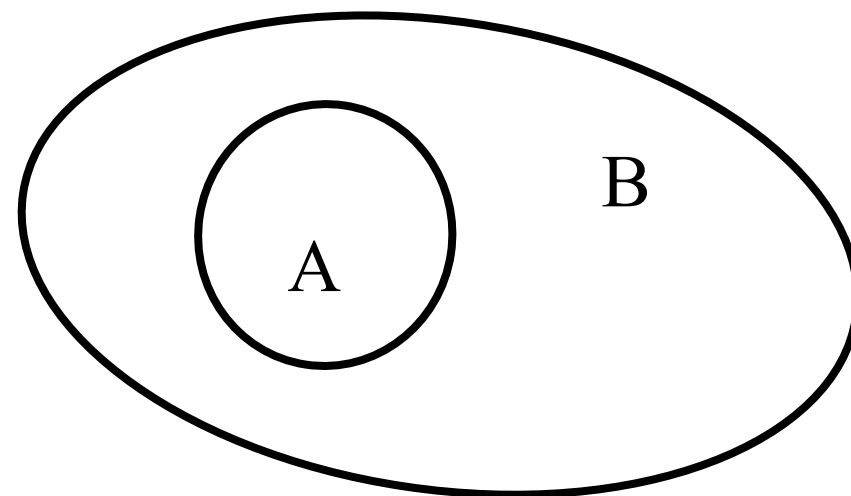
Очевидно, что $\emptyset \subset A$, $A \subset A$, $A \subset U$ для любого множества A .

Множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

§3. Операции над множествами

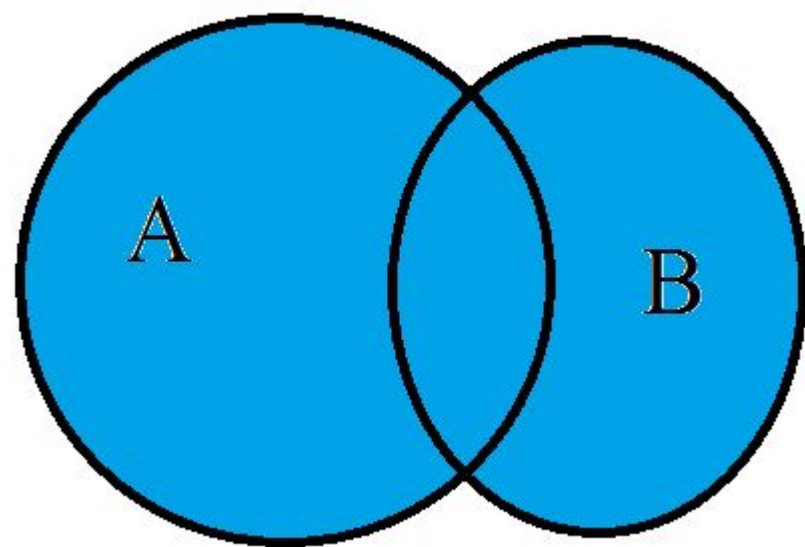
При графическом изображении множеств удобно использовать круги Эйлера, на которых универсальное множество обычно представляют в виде прямоугольника, а остальные множества в виде овалов, заключенных внутри этого прямоугольника.



Объединением $A \cup B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, содержащихся либо в A , либо в B .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B;$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \notin B.$$



Найти объединение множеств A и B , если:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

Найти объединение множеств A и B , если:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

Ответ: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

Найти объединение множеств A и B , если:

$$\text{б) } A = \{a, б, в, г, д, е\}, B = \{a, в, д, к, и\};$$

Найти объединение множеств A и B , если:

$$\text{б) } A = \{a, б, в, г, д, е\}, B = \{a, в, д, к, и\};$$

$$\text{Ответ: } A \cup B = \{a, б, в, г, д, е, к, и\}$$

Найти объединение множеств A и B , если:

$$в) A = \{a, в, д, ж, и, м, н, о\}, B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\};$$

Найти объединение множеств A и B , если:

$$в) A = \{a, в, д, ж, и, м, н, о\}, B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\};$$

$$\text{Ответ: } A \cup B = \{a, в, д, ж, к, и, м, н, о, п, с, ф\}$$

Найти объединение множеств A и B , если:

г) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Найти объединение множеств A и B , если:

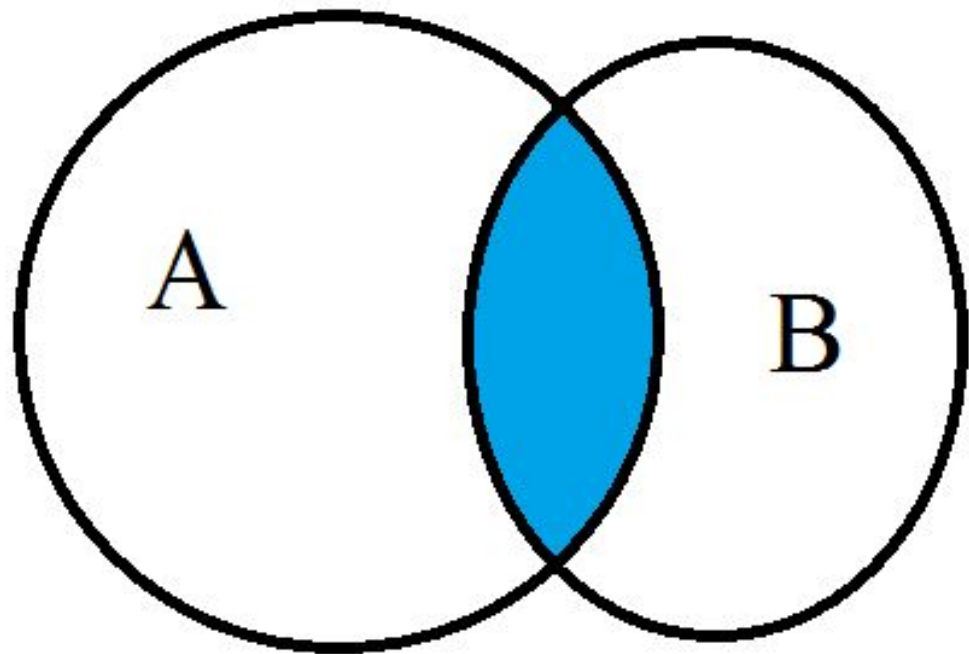
$$\text{г) } A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\text{Ответ: } A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Пересечением $A \cap B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, содержащихся и в A , и в B .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B;$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B.$$



Найти пересечение множеств A и B , если:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

Найти пересечение множеств A и B , если:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

Ответ: $A \cap B = \{2, 4\}$

Найти пересечение множеств A и B , если:

б) $A = \{a, б, в, г, д, е\}$, $B = \{a, в, д, к, и\}$;

Найти пересечение множеств A и B , если:

$$\text{б) } A = \{a, б, в, г, д, е\}, B = \{a, в, д, к, и\};$$

$$\text{Ответ: } A \cap B = \{a, в, д\}$$

Найти пересечение множеств A и B , если:

в) $A = \{a, в, д, ж, и, м, н, о\}$, $B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\}$;

Найти пересечение множеств A и B , если:

$$в) A = \{a, в, д, ж, и, м, н, о\}, B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\};$$

$$\text{Ответ: } A \cap B = \{в, и, м, о\}$$

Найти пересечение множеств A и B , если:

$$\text{г) } A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Найти пересечение множеств A и B , если:

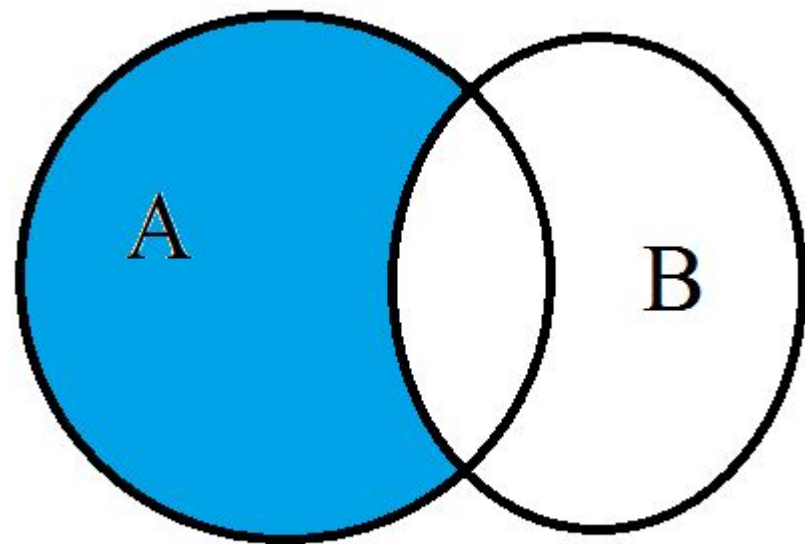
$$\text{г) } A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\text{Ответ: } A \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B .

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin B;$$

$$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \in B.$$



Найти разность множеств A и B , если:

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

б) $A = \{a, б, в, г, д, е\}$, $B = \{a, в, д, к, и\}$;

в) $A = \{a, в, д, ж, и, м, н, о\}$, $B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\}$;

г) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Найти разность множеств A и B , если:

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

б) $A = \{а, б, в, г, д, е\}$, $B = \{а, в, д, к, и\}$;

в) $A = \{а, в, д, ж, и, м, н, о\}$, $B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\}$;

г) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

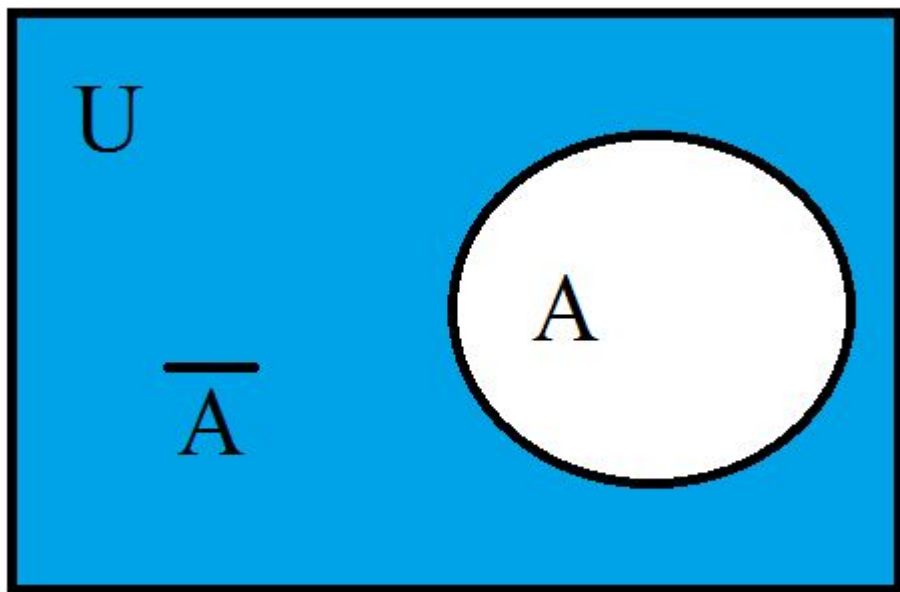
Ответ: а) $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, б) $A \setminus B = \{б, г, е\}$,

в) $A \setminus B = \{а, д, ж, н\}$, г) $A \setminus B = \{0, 1, 2\}$.

Разность $U \setminus A$ называется *дополнением* множества A и обозначается \overline{A}

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A;$$

$$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in A.$$



Свойства операций:

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $A \cap B = B \cap A$

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$7. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$8. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$9. A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$10. A \cup A = A \cap A = A$$

$$11. A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$12. A \cup U = U; A \cap U = A$$

$$13. A \cup \bar{A} = U; A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$14. \overline{\bar{A}} = A$$

Даны следующие числовые множества: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$,
 $B = \{2, 5, 6, 11, 12\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$. Найти множества, которые будут
получены в результате выполнения следующих операций:

а) $(A \cup C) \cap B$; г) $A \cap B \cap C$;

б) $(A \cap C) \setminus B$; д) $B \setminus (A \cap C)$;

в) $(C \setminus B) \cup A$; е) $(B \cap C) \cup A$.

ОТВЕТЫ:

Даны следующие числовые множества: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$,
 $B = \{2, 5, 6, 11, 12\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$. Найти множества, которые будут
получены в результате выполнения следующих операций:

а) $(A \cup C) \cap B = \{2, 5, 11, 12\}$; г) $A \cap B \cap C = \{5\}$;

б) $(A \cap C) \setminus B = \{1, 3, 9\}$; д) $B \setminus (A \cap C) = \{2, 6, 11, 12\}$;

в) $(C \setminus B) \cup A = A$; е) $(B \cap C) \cup A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$.

Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

а) $(A \cup B) \setminus C$;

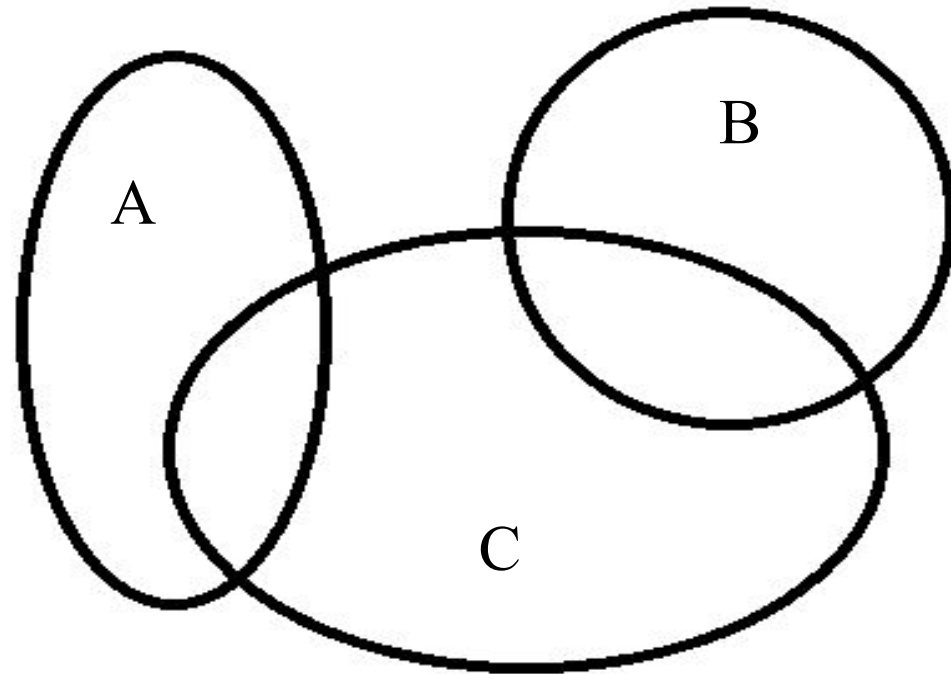
б) $(A \cup B) \cap (C \cup B)$;

в) $(A \cup B) \cap (C \setminus B)$;

г) $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

д) $(A \setminus C) \cup (B \cap C)$;

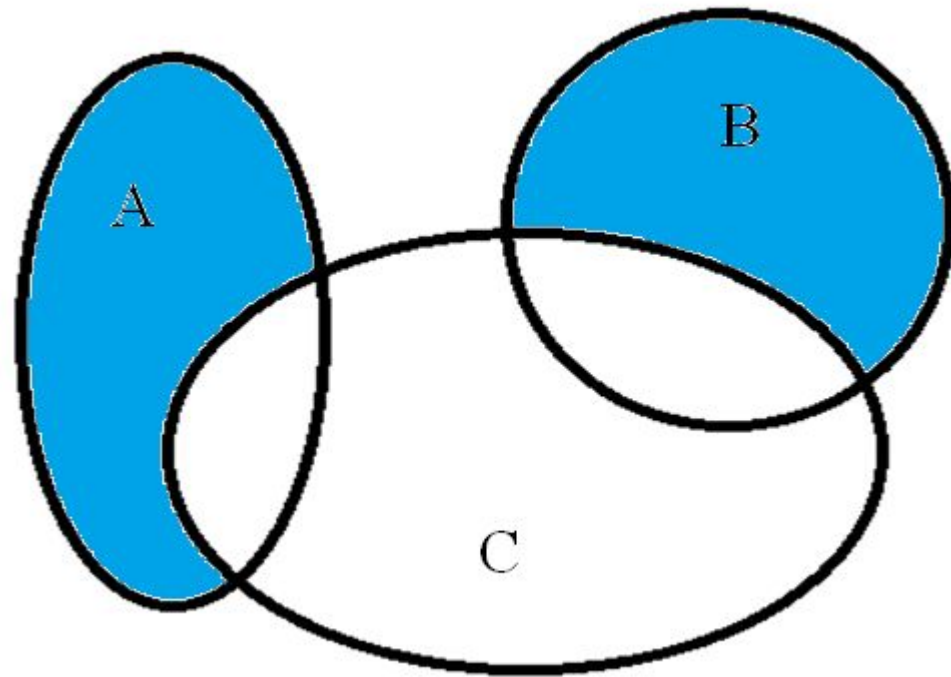
е) $(C \cup A) \setminus (B \cap A)$.



ОТВЕТЫ:

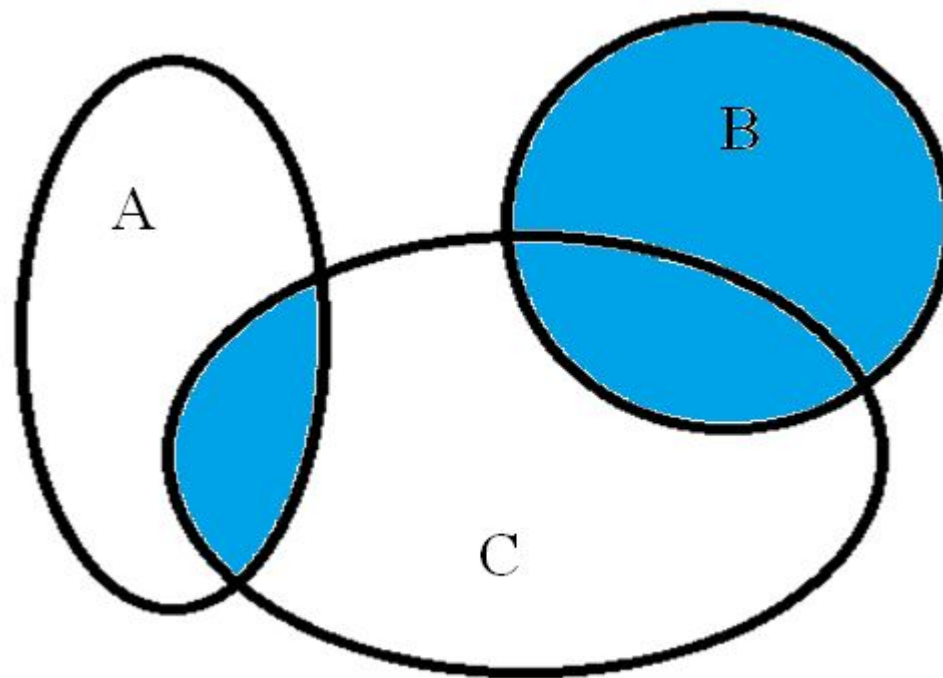
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

a) $(A \cup B) \setminus C$;



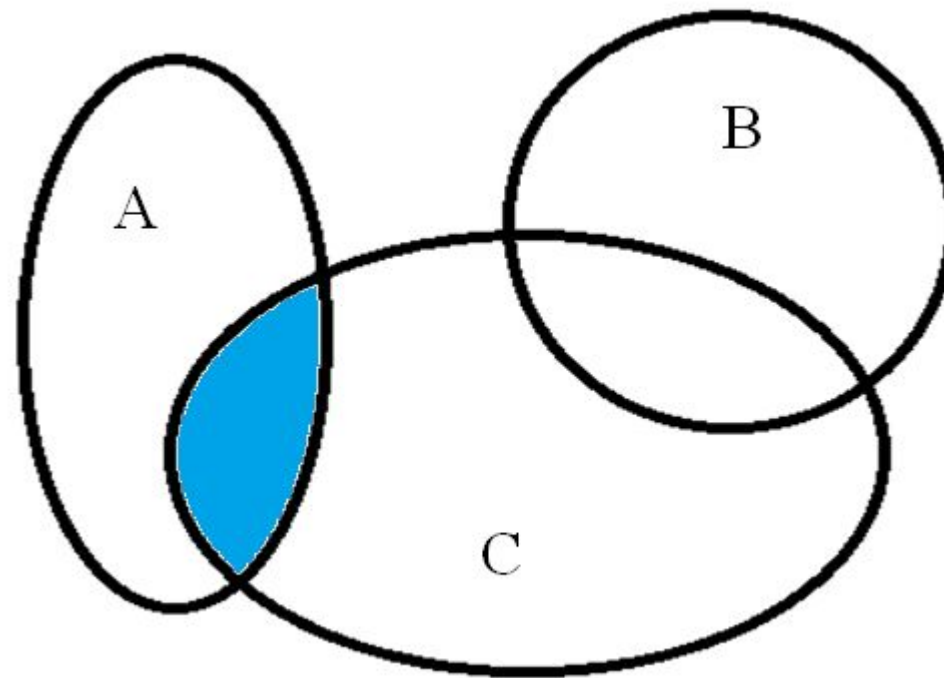
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая
соответствует следующему множеству:

б) $(A \cup B) \cap (C \cup B)$;



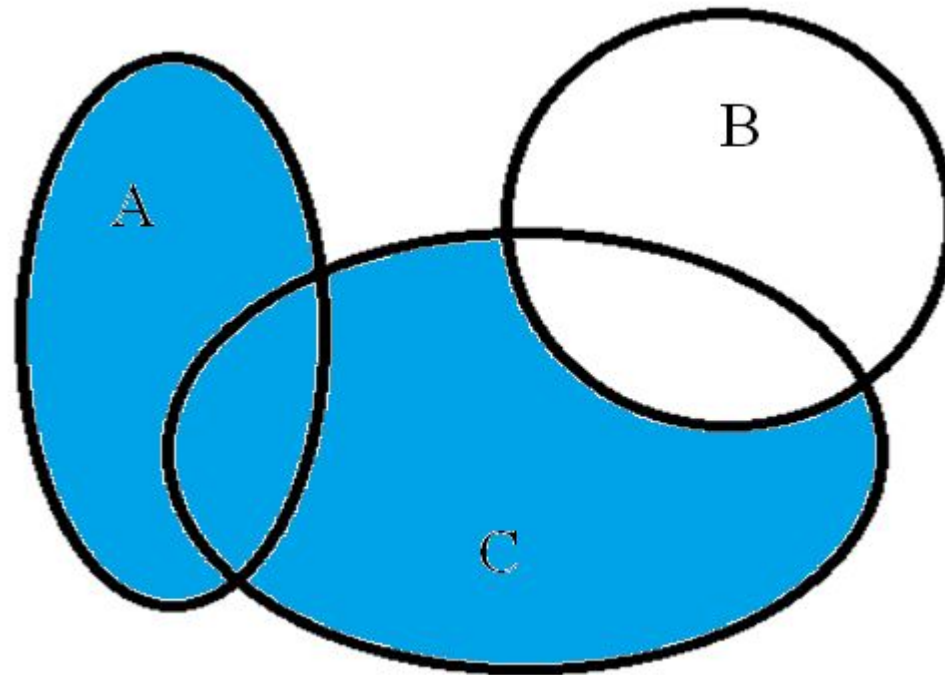
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая
соответствует следующему множеству:

в) $(A \cup B) \cap (C \setminus B)$;



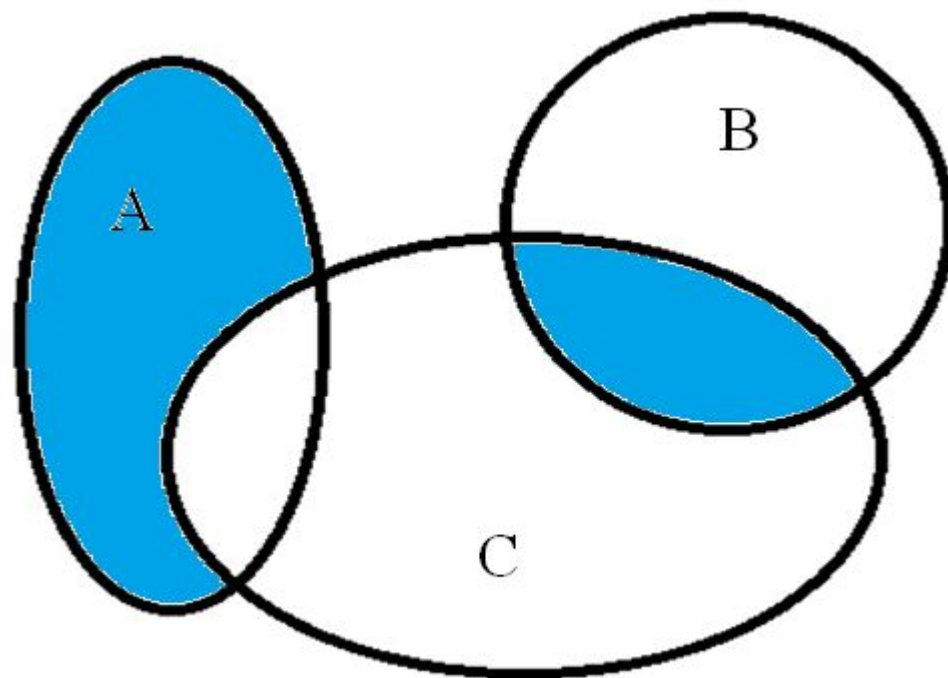
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая
соответствует следующему множеству:

г) $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$;



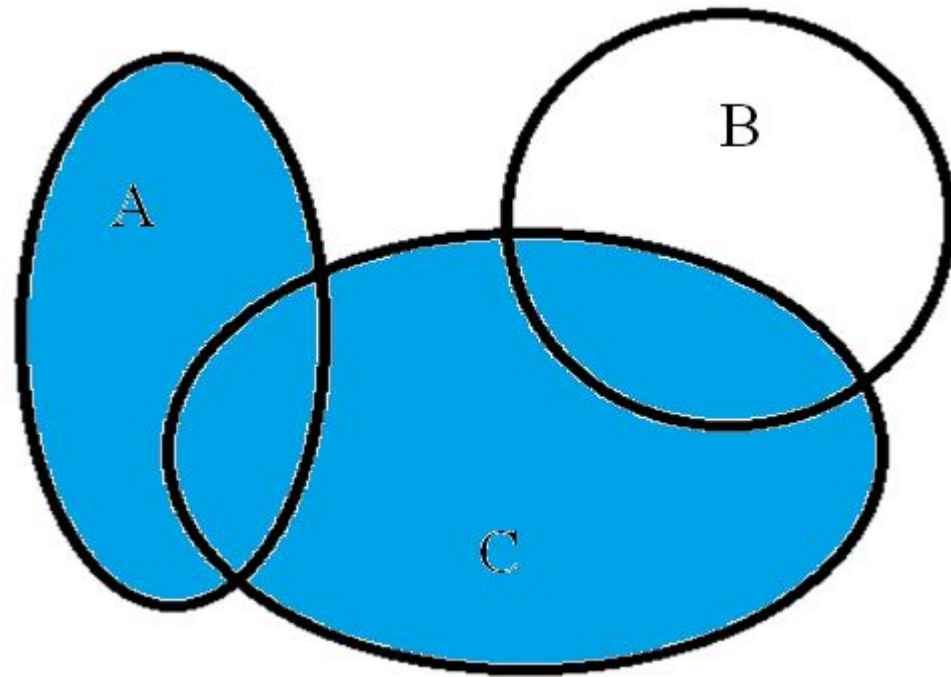
Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая
соответствует следующему множеству:

д) $(A \setminus C) \cup (B \cap C)$;

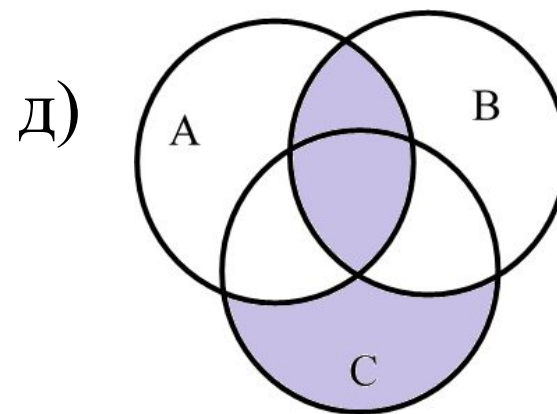
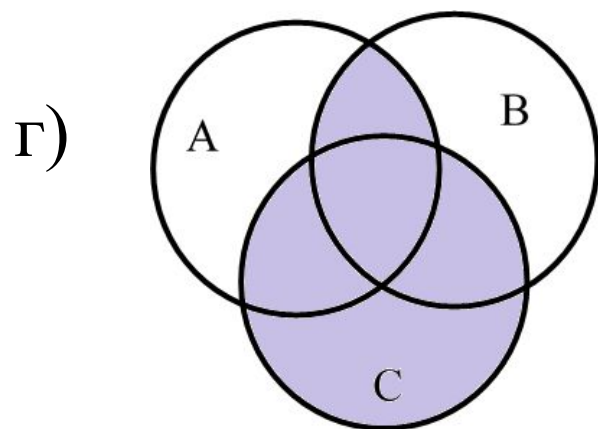
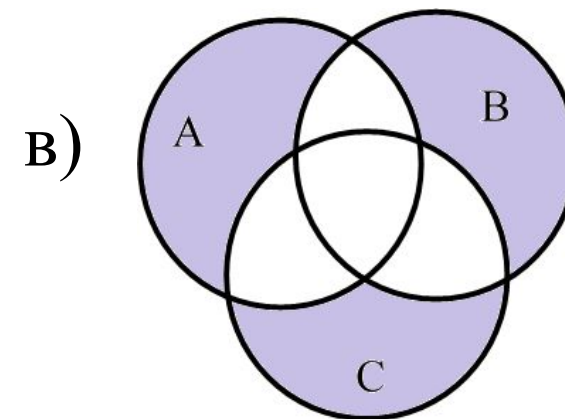
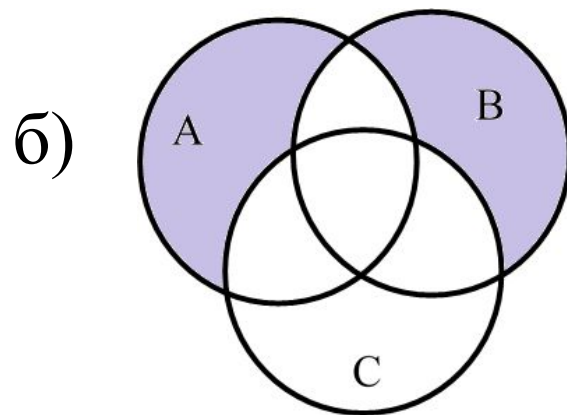
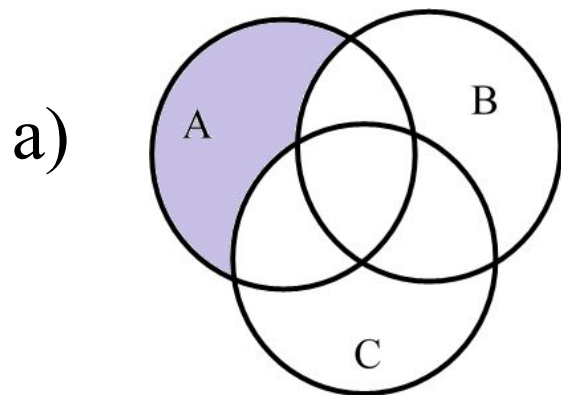


Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая
соответствует следующему множеству:

$$e) (C \cup A) \setminus (B \cap A).$$



Записать множество, изображенное с помощью кругов Эйлера на рисунке:



§4. Числовые множества

N



