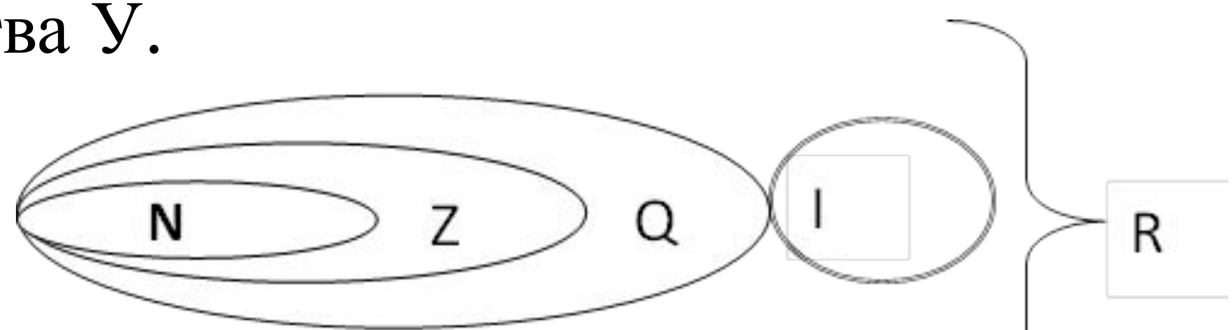
Раздел 1. Пределы и их свойства
Тема 1.2. Понятия и свойства функции. Предел функции

План

1. Числовые множества;
2. Функция одной переменной;
3. Простейшие элементарные функции;
4. Построение графиков функций;
5. Пределы, их свойства.

Числовые множества

- **<u>Опр.</u>** Множество X называется подмножеством множества У, если каждый элемент множества X является элементом множества У.



Натуральные числа $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Целые числа $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Рациональные числа $Q = N + Z + \left\{\frac{m}{n},\ m \in Z, n \in N\right\}$

Иррациональные числа $I = \{\pi, \ell, \sqrt{7}, \ldots\}$

Действительные числа $R \supset Q \supset Z \supset N$.

Функция одной переменной

- **<u>Опр.</u>** Переменная величина y называется функцией (или зависимой переменной) переменной величины x, называемой аргументом, или независимой переменной, если каждому допустимому значению x соответствует определённое значение y.

Способы задания функций:

1.**Аналитический** – правило соответствия задаётся в виде формулы.

2.**Табличный** – используется при проведении экспериментальных исследований. При этом данные заносятся в таблицу.

3.**Графический** – представляет запись изменения различных величин, например, от времени.

4.**Словесный**.

Нахождение области определения и области значений функции

1. Дробь имеет смысл, если знаменатель отличен от нуля;
2. Корень чётной степени существует, если подкоренное выражение не отрицательно;
3. Корень нечётной степени существует при любом значении подкоренного выражения;
4. Функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ определена на множестве всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < +\infty$;
5. Логарифмы отрицательных чисел не существуют;
6. Область определения функций $y = \sin x, y = \cos x, y = arctg\, x$ является множество всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < +\infty$;
7. Функция $y = tg\ x$ определена, если $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0,1,2,3, \ldots$;
8. Функция $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены, если $-1 \leq x \leq 1$.

Для нахождения области значения функции необходимо подставлять значения аргумента в аналитическую формулу и определять границы, в которых находятся изменения зависимой переменной.

- Пример

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

$$\text{ООФ: } 1 - 4x^2 > 0;\ \ x^2 < \frac{1}{4};\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}.$$

$$\text{ОЗФ: } 1 \leq y \leq +\infty.$$

Обратная функция

- Если для каждого значения y из множества значений функции $y = f(x)$ становиться в соответствие одно или несколько значений x из области определения функции, то такая зависимость называется ***обратной функцией*** и обозначается $x = У(y)$

Чётные и нечётные функции

- **<u>Опр</u>.** Функция ***y = f (x)***, определённая на промежутке, симметричном относительно начала координат, называется ***чётной***, если для любого значения ***x*** из этой области определения ***f(-x) = f(x)***, и ***нечётной***, если ***f(-x) = - f(x)***.

Периодические функции

- **Опр**. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число Т, что
$f(x+T)=f(x)$ для любого **x** из области определения функции.

Возрастающие и убывающие функции

- **<u>Опр</u>.** Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на интервале $(a<x<b)$, если для всех точек этого интервала при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.
- **<u>Опр</u>.** Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на интервале $(a<x<b)$, если для всех точек этого интервала при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Простейшие элементарные функции

1. Линейная функция. $\boldsymbol{y = ax + b}$, где a и b − действительные числа. График – прямая.
2. Степенная функция. $\boldsymbol{y = x^n}$, где n − любое действительное число. График – парабола, гипербола.
3. Показательная функция. $\boldsymbol{y = a^x}$, где $a \neq 1$, $a > 0$. Графики всех показательных функций пересекают ось ординат в точке y=1.
4. Логарифмическая функция. $y = \log_a x$, где a − основание логарифма, $a > 0$, $a \neq 1$.
5. Тригонометрические функции. y= cos x; y = sin x; y = tg x; y = ctg x.
6. Обратные тригонометрические функции. y= arccos x; y = arcsin x; y = arctg x; y = arcctg x.

Построение графиков функций

- **<u>Опр.</u>** График функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ – это множество всех точек (x,y) плоскости Oxy, координаты которых связаны соотношением $\boldsymbol{y = f(x)}$, называемым уравнением графика функции.

Пределы, их свойства

- **Опр.** Пределом функции f(x) в точке x_0 называется такое число b, если для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое положительное число δ, что для любого числа $x \neq x_0$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$,

  выполняется отношение $|y - b| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается: $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$

Например:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

Свойства пределов

1. Если предел функции в точке x_0 существует, то он единственный.

2. Предел постоянной равен этой постоянной. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$

3. Предел алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих же функций.

- $\lim\limits_{x \to x_0} (U + V - W) = \lim\limits_{x \to x_0} U + \lim\limits_{x \to x_0} V - \lim\limits_{x \to x_0} W$

4. Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих функций.

- $\lim\limits_{x \to x_0} (U \cdot V \cdot W) = \lim\limits_{x \to x_0} U \cdot \lim\limits_{x \to x_0} V \cdot \lim\limits_{x \to x_0} W$

5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций.

- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{U}{V} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} U}{\lim\limits_{x \to x_0} V}$